全国高等教育自学考试指定教材配套辅导丛书

高等数学（二）线性代数

应试指导及模拟试题

全国高等教育自学考试命题研究组 编

教材依据 姚慕生 高汝熹 主编

JI SUAN JI ZHUAN YE

计算机类 权威辅导

- 重点难点精讲
- 解题技巧分析
- 教材同步训练
- 考前实战演习

中国大地出版社

全国高等教育自学考试指定教材辅导

高等数学(二)线性代数

应试指导及模拟试题

全国高等教育自学考试命题研究组　编

教材依据　姚慕生　高汝熹　主编

中国大地出版社

内容简介

本书是由全国高等教育自学考试命题研究组专家编写的应试指导与题库，依据的是国家教育部考试中心于2002年开始，正式执行自学考试新计划下的新大纲、新教材。本书的试题经过精心设计，题型标准，应试导向准确，针对性强。考生只需用少量时间，通过实战练习，就能在较短时间内巩固所学知识，掌握要点，突破难点，把握重点，熟练掌握答题方法及技巧，适应考场氛围，顺利通过考试。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（二）线性代数应试指导及模拟试题 / 全国高等教育自学考试命题研究组编．—北京：中国大地出版社，2002．8

（全国高等教育自学考试辅导丛书）

ISBN 7 - 80097 - 498 - 7

Ⅰ．高… Ⅱ．全… Ⅲ．高等 — 高等教育 — 自学考试 —自学参考资料 Ⅳ．C932．6

中国版本图书馆CIP数据核字（2002）第012477号

责任编辑：王慧军
出版发行：中国大地出版社
社址邮编：北京市海淀区大柳树路19号 100081
电　　话：(010) - 62183493(发行部)
传　　真：(010) - 62183493
印　　刷：北京市顺义康华福利印刷厂
开　　本：787×1092 1/16
印　　张：220
字　　数：4000千字
版　　次：2002年8月第1版
印　　次：2002年8月第1次印刷
印　　数：1 - 3600册
书　　号：ISBN 7 - 80097 - 498 - 7/TP·7
总 定 价：300.00元

前　言

国家教育部考试中心于2002年开始,正式执行自学考试新计划,同时使用新编的大纲和教材。

参加自考的学生渴求在考前能通过应试指导的帮助及模拟试题的演练,全面检查自己所学的知识是否扎实,考试大纲所要求的内容是否掌握,已经理解的知识能否完整、确切、简明地进行书面表述,并借此增强考生分析和解决实际问题的能力,帮助考生顺利通过考试。因此,为配合广大考生参加考试,并能顺利过关,我们利用多年积累的自考教学辅导资源和经验,全面系统地剖析了各门专业课程新大纲和教材的内容体系,组织编写了一套“全国高等教育自学考试应试指导及模拟试题”丛书,推向全国,以满足考生之急需,适应社会之需要。

本书在编写过程中,严格按照考试大纲的要求,以指定教材为基础,包括了所有考试的知识点,并着重突出重点和难点,充分体现了“在考察课程主体知识的同时,注重考查能力尤其是应用能力”的新的命题指导思想。

本书以习题为主,完全按照指定教材的结构,以章为单位。每章设“考试要求”、“知识重点”、“反馈测试题解”三部分。“考试要求”主要是考试大纲所规定的本章考核要求。“知识重点”主要是对该章的重点、要点内容的总结归纳;“反馈测试题解”则根据考试大纲对各知识点不同能力层次的要求,将知识及知识点下的细目以各种主要考试题型的形式编写,覆盖全部考核内容,适当突出重点章节,并且加大重点内容的覆盖密度,所有试题均附详细解答;书后附有模拟试卷及2001年度试题,供考生检验自己学习情况,建议在规定时间内完成。本书由马兰、耿玉营主编。

欢迎广大读者对本丛书提出宝贵意见,以便我们今后工作中得以改进。

全国高等教育自学考试命题研究组

2002.7

目　　录

第一部分　高等数学(二)线性代数考试概述

学习第一章,要求读者掌握行列式的定义、性质,并学会行列式的展开,计算一些简单的行列式,能运用克莱姆法则求解代数方程组。

学习第二章,要求读者掌握矩阵及其各种特殊类型矩阵的定义,熟练运用矩阵的运算法则,并能求矩阵的逆阵。

学习第三章,要求读者掌握向量组线性相关、线性无关,向量组和矩阵的秩,正交向量组等重要概念,了解线性空间的基本知识,熟练掌握线性方程组解的结构及其判别法则,熟练运用初等变换方法求矩阵的秩、逆阵,求解齐次和非齐次线性方程组。

学习第四章,要求读者掌握线性空间的概念,主要掌握 R^n 及其中向量的运算规则;其的概念与维数的概念;R^n 中向量的内积、长度、向量间的夹角与距离等基本概念,学会内积的运算以及如何计算向量的长度、两向量之间的夹角、距离、知道二个向量正交的充要条件是内积等于零;掌握正交向量组及标准正交基的概念。

学习第五章,要求读者掌握特征值、特征向量、相似矩阵、约当型矩阵、二次型的标准形,正定二次型等重要概念,并学会计算特征值和特征向量,掌握化 n 阶矩阵为对角矩阵的条件和方法,学会将实二次型化为标准形。

本门课程的考试题型有单项选择题、简答题、计算题、证明题、综合应用题。

一、单项选择题

例 1. 如行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = d$$

则

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

(　　)

A. $2d$　　B. $3d$　　C. $6d$　　D. $-6d$

答:D

例 2. 方阵 A 的行列式为零,则　(　　)

A. $A=0$　　B. $|A^*|\neq 0$　　C. $AA^*=0$　　D. $A^*=0$

答:C

例 3. 两个 $m\times n$ 阶矩阵 A,B,它们等价的充要条件是　(　　)

A. 存在 m 阶非异阵 P 和 n 阶非异阵 Q,使 $B=PAQ$

B. 存在 m 阶矩阵 P 和 n 阶矩阵 Q,使 $B=PAQ$

C. 它们都等价于单位阵

D. 它们都不是零矩阵

答:A

例 4. 设向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关,则向量组(　　)线性相关。

A. $a_1, a_1 + a_2 a_1 + a_2 + a_3$

B. $a_1 + 2a_2 + a_3, 2a_1 + a_2 + 2a_3, a_1 + a_2 + a_3$

C. $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_1$

D. $a_1 - a_2, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3$

答:B

例 5. 线性方程组 $AX = \beta$ 中,A 是 8×6 矩阵,秩等于 6,增广矩阵(A, β)的秩也等于 6,则　　(　　)

A. 方程组有唯一组解　　B. 方程组有无穷多组解

C. 方程组无解　　D. 无法确定方程组是否有解

答:A

例 6. k 为何值时下列向量不可能是R^3 的一组基　　(　　)

$(1, -2, 2), (0, k-1, 3), (1, 0, 1)$

A. 0　　B. -2　　C. 5　　D. -5

答:D

例 7. 设 A, B 是 n 阶正交阵,下列命题正确的是　　(　　)

A. $A + B$ 也是正交阵　　B. $A^2 B^2$ 也是正交阵

C. $A + I_n$ 也是正交阵　　D. $\begin{pmatrix} A & I_n \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 也是正交阵

答:B

例 8. 下列矩阵中不可能和正定阵相似的矩阵是　　(　　)

A. 实对称矩阵　　B. 奇异阵

C. 正交矩阵　　D. 单位阵

答:B

二、简答题

例 9. 下列行列式表示的方程有几个根?

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

如行列式按第一行展开,x^2 项系数等于 1,因此这是一个一元二次方程,应有两个根,事实上此式为范德蒙行列式,当 $x = 2$ 或 3 时,行列式值为零,因此根为 2 和 3。

例 10. 当 $\lambda \neq \pm 1$ 时,线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x - y = a \\ -x + \lambda y = b \end{cases}$$

有唯一解是否正确。

答:正确,因为该线性方程组的系数行列式为

$$A=\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-1$$

由克莱姆法则可知,发 $\lambda^2-1\neq 0$ 时,线性方程组有唯一解,即 $\lambda\neq \pm 1$ 时,线性方程组有唯一解。

例 11. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 \\ a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 \end{vmatrix}$$

答:观察行列式可以发现上述行列式的第一第二行元素成比例,因此行列式值为零。

例 12. 计算行列式的值

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{a+c}{2} & \frac{b+c}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

答:由观察知道该行列式的第四行等于第二,三行的和的二分之一,将第二行加到第三行上,结果使所得行列式的第三第四行成比例,因此行列式值等于零。

例 13. “一个 n 阶矩阵的秩小于 n,则它的某两行成比例。”这句话对不对?为什么?

答:不对,下面的矩阵秩小于 3,但任意二行都不成比例。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

例 14. 设 a_1,a_2 和 β 是 n 维实列向量,a,b 是任意实数,若 β 分别和 a_1,a_2 正交,问:β 是否必和所有形如 aa_1+ba_2 的非零向量正交?

答:正交,计算 β 和 aa_1+ba_2 的内积:

$\beta\cdot(aa_1+ba_2)=a(\beta\cdot a_1)+b(\beta\cdot a_2)=0+0=0$

因此 β 和 aa_1+ba_2 正交。

三、计算题

例 15. 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & -\frac{8}{3} & -1 \\ 1 & -2 & \frac{5}{3} & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -\frac{3}{4} & 9 \end{vmatrix}$$

答:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & -\frac{8}{3} & -1 \\ 1 & -2 & \frac{5}{3} & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -\frac{3}{4} & 9 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3 \div \frac{1}{3}} \frac{1}{3}\begin{vmatrix} -2 & 3 & -8 & -1 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & -4 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-2r_2]{\substack{r_1+2r_2 \\ r_3-4r_2}} \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -17 & 4 \\ 0 & 1 & -14 & 9 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 7 & -17 & 4 \\ 1 & -14 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\substack{c_2+2c_1 \\ c_3-c_1}} = -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 7 & -3 & -3 \\ 1 & -12 & 8 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -12 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}(-24-36) = -20$$

例 16. 计算行列式

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

答:先将第一行的公因子 3 提出来

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} \; (-2)(-5)$$

$$= 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -7 & -8 \\ 5 & -9 & -18 \end{vmatrix}$$

$$= 3\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -7 & -8 \\ -9 & -18 \end{vmatrix}$$

$$= 3\times(7\times 8-72) = 3\times 54 = 162$$

例 17. 计算行列式的值

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$$

答:从观察看出行列式每一行的和相同,因此将第三第四列都加到第一列上去便可以提出一个因子$(x+y+z)$,于是原式等于

$$(x+y+z)\begin{vmatrix}1 & x & y & z\\1 & 0 & z & y\\1 & z & 0 & x\\1 & y & x & 0\end{vmatrix}$$

$$=(x+y+z)\begin{vmatrix}1 & x & y & z\\0 & -x & z-y & y-z\\0 & z-x & -y & x-z\\0 & y-x & x-y & -z\end{vmatrix}$$

$$=(x+y+z)\begin{vmatrix}-x & z-y & y-z\\z-x & -y & x-z\\y-x & x-y & -z\end{vmatrix}$$

$$=(x+y+z)\begin{vmatrix}-x-y+z & z-y & y-z\\-x-y+z & -y & x-z\\0 & x-y & -z\end{vmatrix}$$

$$=(x+y+z)(-x-y+z)\begin{vmatrix}1 & z-y & y-z\\1 & -y & x-z\\0 & x-y & -z\end{vmatrix}$$

$$=(x+y+z)(-x-y+z)\begin{vmatrix}1 & z-y & y-z\\0 & -z & x-y\\0 & x-y & -z\end{vmatrix}$$

$$=(x+y+z)(-x-y+z)\begin{vmatrix}-z & x-y\\x-y & -z\end{vmatrix}$$

$$=(x+y+z)(z-x-y)(z+x-y)(z-x+y).$$

例 18.求一个二次多项式 $f(x)$,使 $f(1)=-1,f(-1)=9,f(2)=-3$。

答:设所求的二次多项式为 $f(x)=ax^2+bx+c$,其中,a,b,c 为待定系数。由已知条件得:

$f(1)=a+b+c=-1$

$f(-1)=a-b+c=9$

$f(2)=4a+2b+c=-3$

解以 a,b,c 为未知数的线性方程组,由克莱姆法则,计算得到

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -1 & 1\\4 & 2 & 1\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-4r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -2 & 0\\0 & -2 & -3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_2}\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\0 & -2 & 0\\0 & 0 & -3\end{vmatrix}=6\neq0$$

$$D_1=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\9 & -1 & 1\\-3 & 2 & 1\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-3r_1]{r_2+9r_1}\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\0 & 8 & 10\\0 & -1 & -2\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 8 & 10 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=6$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-4r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$=-30$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 9 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-4r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 10 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & -9 \end{vmatrix}=18$$

所以 $a=\dfrac{D_1}{D}=1, b=\dfrac{D_2}{D}=-5, c=\dfrac{D_3}{D}=3$

例 19. 已知 n 阶行列式

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

求 A

$$答:A=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{次对换到第 2 行}]{\text{将第 } n \text{ 行依}} (-1)^{n-2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{次对换到第 3 行}]{\text{将第 } n \text{ 行依}} (-1)^{n-2}(-1)^{n-3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-2}(-1)^{n-3}\cdots(-1)\begin{vmatrix}1&0&0&0&\cdots&0&0\\0&1&0&0&\cdots&0&0\\0&0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&0&1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\\0&0&0&0&\cdots&0&1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}$$

例 20. 计算下列行列式的值：

$$\begin{vmatrix}a_1^{n-1}&a_1^{n-2}b_1&\cdots&b_1^{n-1}\\a_2^{n-1}&a_2^{n-2}b_2&\cdots&b_2^{n-1}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_n^{n-1}&a_n^{n-2}b_n&\cdots&b_n^{n-1}\end{vmatrix}(a_1a_2\cdots a_n\neq0)$$

答：在第一式提出因子 a_1^{n-1}，第二式提出因子 $a_2^{n-1}\cdots$，在第 n 式提出因子 a_n^{n-1} 后便得到一个范德蒙行列式，由范德蒙行列式的计算公式可得该行列式值等于 $a_1^{n-1}a_1^{n-1}\cdots a_n^{n-1}\prod\limits_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}\left(\frac{bi}{ai}-\frac{bj}{aj}\right)$

例 21. 利用行列式定义计算下列行列式

$$(1)\begin{vmatrix}1&2&1&4\\0&-1&2&1\\1&0&1&3\\0&1&3&1\end{vmatrix}$$

$$(2)\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\0&0&0&a_{24}&a_{25}\\0&0&0&a_{34}&a_{35}\\0&0&0&a_{44}&a_{45}\\a_{51}&a_{52}&a_{53}&a_{54}&a_{55}\end{vmatrix}$$

答：

$$(1)\begin{vmatrix}1&2&1&4\\0&-1&2&1\\1&0&1&3\\0&1&3&1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1&2&1\\0&1&3\\1&3&1\end{vmatrix}+=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&1&4\\-1&2&1\\1&3&1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+1}(-1)\begin{vmatrix}1&3\\3&1\end{vmatrix}+(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix}+(-1)^{1+1}2\begin{vmatrix}2&1\\3&1\end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{2+1}(-1)\begin{vmatrix}1&4\\3&1\end{vmatrix}+(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1&4\\2&1\end{vmatrix}$$

$$= -(1-9)+(6-1)+2(2-3)+(1-12)+(1-8)$$
$$= -7$$

(2) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{5+1} a_{51} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{4+1} a_{11} \cdot a_{52} \begin{vmatrix} 0 & a_{24} & a_{25} \\ 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+1} a_{51} \cdot a_{12} \begin{vmatrix} 0 & a_{24} & a_{25} \\ 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{11} \cdot a_{52} \cdot 0 + a_{51} \cdot a_{12} \cdot 0$$
$$= 0$$

例 22. 已知

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & x & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

求 A 中 x 的一次项的系数。

答:

$$(-1)(-1)(1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & x & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & x-1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & x-1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=2\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & x-1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}=2[2+2(x-1)]=4x$$

故 x 的一次项系数为 4。

例 23. 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} 4 & 427 & 327 \\ 5 & 543 & 443 \\ 7 & 721 & 621 \end{vmatrix}$$

分析:该行列式计算的困难在于第 2、第 3 列的数较大,可用行列式的性质将其分解成几个较简单的行列式之和。

答:

$$\begin{vmatrix} 4 & 427 & 327 \\ 5 & 543 & 443 \\ 7 & 721 & 621 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 400+27 & 300+27 \\ 5 & 500+43 & 400+43 \\ 7 & 700+21 & 600+21 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 4 & 400 & 300+27 \\ 5 & 500 & 400+43 \\ 7 & 700 & 600+21 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 4 & 27 & 300+27 \\ 5 & 43 & 400+43 \\ 7 & 21 & 600+21 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 4 & 400 & 300 \\ 5 & 500 & 400 \\ 7 & 700 & 600 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 4 & 400 & 27 \\ 5 & 500 & 43 \\ 7 & 700 & 21 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 4 & 27 & 300 \\ 5 & 43 & 400 \\ 7 & 21 & 600 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 4 & 27 & 27 \\ 5 & 43 & 43 \\ 7 & 21 & 21 \end{vmatrix}=0+0+100\begin{vmatrix} 4 & 27 & 3 \\ 5 & 43 & 4 \\ 7 & 21 & 6 \end{vmatrix}+0$$

$$=100\begin{vmatrix} 4 & 27 & 3 \\ 5 & 43 & 4 \\ 7 & 21 & 6 \end{vmatrix}\xlongequal{c_1-c_3}100\begin{vmatrix} 1 & 27 & 3 \\ 1 & 43 & 4 \\ 1 & 21 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r3-r1]{r_2-r_1}100\begin{vmatrix} 1 & 27 & 3 \\ 0 & 16 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{vmatrix}=100\begin{vmatrix} 16 & 1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=100(48+6)=540$$

例 24. 用克莱姆法则解下列方程组：

$$\begin{cases} x+y-2z=-3, \\ 5x-2y+7z=22, \\ 2x-5y+4z=4; \end{cases}$$

答：$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 7 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-2r_1]{r_2-5r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -7 & 17 \\ 0 & -7 & 8 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-r_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -7 & 17 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix}=63$

$$D_1=\begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 22 & -2 & 7 \\ 4 & -5 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+5r_1]{r_2+2r_1} \begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 16 & 0 & 3 \\ -11 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 16 & 3 \\ -11 & -6 \end{vmatrix}=-(96+33)=63$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 5 & 22 & 7 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{\substack{r_2-5r_1 \\ r_3-2r_1}} \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 37 & 17 \\ 0 & 10 & 8 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 37 & 17 \\ 10 & 8 \end{vmatrix}=37\times 8-17\times 10=126$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 22 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-2r_1]{r_2-5r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 37 \\ 0 & -7 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 37 \\ 0 & 0 & -27 \end{vmatrix}=189$$

于是

$$x=\frac{D_1}{D}=1, y=\frac{D_2}{D}=2, z=\frac{D_3}{D}=3$$

例 25. 计算 n 阶行列式：

$$A=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

答：通过观察知道行列式各行和相同，于是从第二列开始将每一列都加到第一列上去，再从第一列提出公因子 $x+(n-1)a$ 得：

$$A=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&a&a&\cdots&a\\1&x&a&\cdots&a\\1&a&x&\cdots&a\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$$

再从第二行起每一行减去第一行得

$$A=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&a&a&\cdots&a\\0&x-a&0&\cdots&0\\0&0&x-a&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&x-a\end{vmatrix}$$

利用上三角行列式的展开得：

$A=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$

例 26. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$ ；

(2) $D_n=\begin{vmatrix}x&a&\cdots&a\\a&x&\cdots&a\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$ ，$(x\neq a)$。

答：(1)这个行列式的特点是各列 4 个数之和都是 6，把第 2，3，4 行同时加到第 1 行，提出公因子 6，然后各行减去第 1 行：

$$\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4}\begin{vmatrix}6&6&6&6\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1\div r_6}+\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}$$

$=48$

(2)类似于(1)的解法，把第 2，3，…，n 行加到第 1 行，提出公因子 $x+(n+1)a$，然后各行减去第 1 行乘数 a。

$$\begin{vmatrix}x&a&\cdots&a\\a&x&\cdots&a\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+r_2+\cdots+r_n}$$

$$\begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_n-ar_1]{\substack{r_2-ar_1\\ r_3-ar_1\\ \cdots}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{(n-1)}$$

例 27. 计算下列行列式的值

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

答:将第二列加到第一列,将第三列加到第二列,将第四列加到第三列,得:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & x & x-1 \\ 0 & x & x & -1 \\ x & x & 0 & -1 \\ x & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & x & x-1 \\ 0 & x & x & -1 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=-x\begin{vmatrix} 0 & x & x-1 \\ x & x & -1 \\ x & 0 & 0 \end{vmatrix}=-x^2\begin{vmatrix} x & x-1 \\ x & -1 \end{vmatrix}=x^4$$

例 28. 当 c,d 为何值时,下列方程组有解?有多少解?

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=c \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=x_3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=d \end{cases}$$

答:对方程组的增广矩阵进行初等变换:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & \vdots & c \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & \vdots & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & \vdots & d \end{bmatrix}\rightarrow$$