

工程概率不确定性分析方法

熊芬芬 杨树兴

刘 宇 陈世适

编著



科学出版社

工程概率不确定性 分析方法

熊芬芬 杨树兴 刘 宇 陈世适 编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书全面系统地介绍了国内外现有的各种不确定性分析理论方法及其工程应用. 理论方法部分主要针对经典的和最新的不确定性分析方法, 按照数字模拟法、局部展开法、数值积分法、随机展开法、最可能失效点法以及代理模型法六大类, 全面系统地介绍了各种方法的发展历史、基本原理以及适用范围. 作为不确定性分析的前提条件, 各种相关变量的变换方法在本书中也做了详细的介绍. 工程应用部分, 针对各种不确定性分析方法, 给出了具体且通俗易懂的实现步骤和相关算例.

本书可作为高等院校设计相关专业的工程设计方法课程的研究生和高年级本科生教材及教学和科研的参考书, 也可供从事工程优化设计、可靠性分析方面工作的工程技术和科研人员参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

工程优化中不确定性分析方法/熊芬芬等编著. —北京: 科学出版社, 2015

ISBN 978-7-03-044069-3

I. ①工… II. ①熊… III. ①不确定系统—定性分析—分析方法 IV. ①N94

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 076500 号

责任编辑: 刘信力 赵彦超 / 责任校对: 钟 洋

责任印制: 徐晓晨 / 封面设计: 陈 敬

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencecp.com>

北京厚诚则铭印刷科技有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 7 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5

2015 年 7 月第一次印刷 印张: 14 5/8

字数: 282 000

POD 定价: 88.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

不确定性分析 (包括可靠性分析和统计矩估算) 是研究各种系统参数变化对产品系统性能的影响规律的一种方法, 是工程优化中关键技术之一. 不确定性分析在航空航天、汽车、机械、电子、核电设备等诸多领域都有广泛应用. 通过不确定性分析提高系统的可靠性、稳健性, 避免灾难性事故的发生, 对经济、政治、军事等方面都有重要的积极作用. 正因为如此, 自 20 世纪下半叶以来, 各种不确定性分析与设计理论和方法得到了迅速发展, 并在工程中取得了显著成效, 其中不确定性分析成为工程优化领域最重要的理论研究课题之一, 国内外众多学者在该领域取得了丰硕的研究成果, 尤其以基于概率论的不确定性分析理论和方法发展最为成熟, 这也是本书所要介绍的内容.

作者对基于概率论的不确定性分析理论和方法开展了长期深入的研究, 并提出了诸多新的理论和方法. 本书是在作者对所取得的研究成果以及国内外不确定性分析领域研究进展进行总结的基础上撰写而成的. 本书力图对概率不确定性分析理论和方法进行较为系统、全面、翔实地阐述, 旨在为高等院校的教师、研究生以及相关工程技术人员提供一套可借鉴的不确定性分析理论和工程实现方法. 目前, 关于工程不确定性分析方面的专著还较少, 因此本书具有一定的理论和工程应用价值.

与国内外同类书籍相比, 本书的特点主要包括以下几个方面:

(1) 国内外相关书籍大多局限于较为传统的方法且偏于结构可靠性分析. 而本书介绍的方法较之更为全面、新颖, 除了经典方法, 还包括数值积分、混沌多项式展开等在已出版的书籍中未提及的新方法.

(2) 以往大多数的关于不确定性分析的书籍学术性、理论性较强, 不易于初学者掌握和运用. 本书力图以通俗易懂的语言介绍各种不确定性分析方法, 并结合算例给出具体实现步骤及编程思路, 加强读者对各种方法的理解与掌握, 使其能够被更广泛的读者接受.

(3) 本书还主要针对复杂工程系统中一类典型的对象——高维黑箱型问题, 介绍了相应的不确定性分析理论和方法.

(4) 不确定性分析实施的前提是各随机变量之间相互独立, 故本书还对相关随机变量变换的相关理论和方法进行了介绍, 使本书内容更为全面、完整, 实用性更强.

本书由杨树兴教授制定提纲,第 1、2、4~8 章由熊芬芬撰写,第 3 章由陈世适和熊芬芬共同撰写,第 9 章由刘宇撰写。在本书的编写过程中,我们参考和引用了国内外众多学者的研究成果,并将其列在了各章的参考文献中,为此我们向这些作者表示衷心的感谢。此外,课题组的李宁、胡章力、吴颀参与了部分章节内容的编写和全书的整理校对工作,在此一并向他们表示感谢。衷心地感谢美国西北大学的陈卫教授和大连理工大学的杨迪雄教授,他们悉心的指导和有益的建议使得本书得以一步步完善。本书的研究工作得到了国家自然科学基金青年基金项目(No.51105034)、2012 北京市优博共建项目等项目的资助,在此深表感谢。

本书内容丰富翔实,具有较强的前沿性和实用性。另外,由于作者水平有限,书中难免有不妥之处,恳请读者批评指正。

编 者

2014 年 12 月 20 日

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 引言	1
1.2 什么是不确定性分析	1
1.3 不确定性的来源和种类	2
1.4 不确定性的表示方法	2
1.5 概率不确定性分析	4
1.6 本书的目的和内容安排	6
参考文献	6
第 2 章 不确定性分析基本概念	8
2.1 随机变量	8
2.2 随机变量的统计矩	9
2.3 常见的随机变量	11
2.3.1 均匀随机分布	11
2.3.2 正态随机分布	12
2.3.3 对数正态分布	13
2.3.4 Gamma 分布	14
2.3.5 指数分布	15
2.3.6 Weibull 分布	15
2.4 不确定性优化设计	17
2.4.1 稳健设计优化	18
2.4.2 基于可靠性的设计优化	20
2.5 工程概率不确定性分析的任务	20
2.5.1 几点说明	21
2.5.2 统计矩相关概念	21
2.5.3 失效概率相关概念	21
参考文献	23
第 3 章 数字模拟法	24
3.1 蒙特卡洛仿真	24
3.1.1 蒙特卡洛积分	24
3.1.2 蒙特卡洛不确定性分析方法	26

3.1.3 随机样本的产生	29
3.1.4 算例分析	29
3.1.5 蒙特卡洛方法小结	32
3.2 重要抽样法	33
3.2.1 重要抽样法的基本原理介绍	33
3.2.2 重要性密度函数的选取	34
3.2.3 重要抽样法的计算步骤	37
3.2.4 重要抽样法小结	38
3.3 分层抽样法	39
3.3.1 分层抽样法的基本原理介绍	39
3.3.2 分层抽样可靠性分析计算步骤	42
3.3.3 分层抽样法小结	42
3.4 拉丁超立方抽样法	43
3.4.1 拉丁超立方抽样法的基本原理介绍	43
3.4.2 拉丁超立方抽样法估算误差分析	44
3.4.3 拉丁超立方抽样法计算步骤	45
3.4.4 拉丁超立方抽样法小结	46
3.5 自适应抽样法	46
3.6 小结	47
参考文献	48
第 4 章 局部展开法	50
4.1 概述	50
4.2 均值一次二阶矩法	51
4.2.1 MVFOSM 的具体步骤	51
4.2.2 算例	54
4.3 一次可靠度法	55
4.3.1 带正态随机输入的线性极限状态函数	56
4.3.2 一次可靠度法的步骤	60
4.4 求取 MPP 点的 HL-RF 算法	64
4.5 二次可靠度法	66
4.6 导数的计算	68
4.7 算例	69
4.7.1 FORM 求解	70
4.7.2 SORM 求解	74
4.8 小结	77

参考文献	77
第 5 章 数值积分法	80
5.1 概述	80
5.2 全因子数值积分法	81
5.2.1 FFNI 介绍	81
5.2.2 算例分析	87
5.3 单变元降维法	88
5.3.1 UDRM 的实现步骤	89
5.3.2 算例分析	93
5.3.3 多变元降维	97
5.4 基于稀疏网格数值积分的方法	98
5.4.1 稀疏网格数值积分	98
5.4.2 基于稀疏网格数值积分的矩估算法	100
5.4.3 数学算例	103
5.4.4 多学科火箭弹系统应用	104
5.4.5 维自适应算法	108
5.5 小结	109
参考文献	109
第 6 章 随机展开法	112
6.1 混沌多项式展开方法概述	112
6.2 Askey 方案	114
6.3 Wiener 混沌多项式	115
6.4 广义的混沌多项式	117
6.5 基于非干涉 PCE 的不确定性分析方法	119
6.5.1 随机响应面法	120
6.5.2 加权随机响应面方法	129
6.5.3 基于 Galerkin 投影的 PCE 方法	133
6.5.4 算例分析	136
6.6 基于干涉 PCE 的动力学不确定性分析	140
6.6.1 概述	141
6.6.2 具体步骤	142
6.6.3 几点说明	145
6.6.4 算例分析	146
6.6.5 最优控制中的应用	150
6.7 随机配点法	153

6.8 小结	155
参考文献	156
第 7 章 基于最可能失效点的方法	160
7.1 基于 MPP 的蒙特卡洛仿真法	160
7.2 基于 MPP 展开的降维法	161
7.2.1 方法介绍	161
7.2.2 算例分析	166
7.3 基于 MPP 的稀疏网格插值法	169
7.3.1 稀疏网格插值	170
7.3.2 基于稀疏网格插值的失效概率估计法	172
7.3.3 算例分析	173
7.4 基于 MPP 的随机响应面方法	174
7.4.1 方法介绍	175
7.4.2 算例分析	176
7.5 多个 MPP 点的情况	176
7.6 小结	179
参考文献	179
第 8 章 基于代理模型的方法	181
8.1 概述	181
8.2 传统基于代理模型的方法	182
8.3 代理模型的构建	183
8.3.1 试验设计	184
8.3.2 近似方法	184
8.3.3 精度校核	184
8.3.4 代理模型的选择	187
8.3.5 自适应抽样	188
8.4 基于 Kriging 的不确定性分析	189
8.4.1 Kriging 方法	189
8.4.2 代理模型的不确定性	190
8.4.3 代理模型不确定性和参数不确定性的综合量化	192
8.5 算例分析	194
8.5.1 数学算例	194
8.5.2 卷弧翼气动优化	199
8.6 小结	201

参考文献	201
第 9 章 相关随机输入变量	204
9.1 概述	204
9.2 正交变换	205
9.3 Rosenblatt 变换	206
9.4 Nataf 变换	208
9.4.1 Copula	208
9.4.2 高斯 Copula	209
9.4.3 Nataf 变换基本原理	210
9.5 说明	212
9.6 算例分析	213
9.7 本章结论	216
9.8 公式 (9.17) 中 F 取值的经验公式	217
参考文献	221
索引	222

第1章 绪 论

1.1 引 言

工程产品高水平、高效率的开发设计对国民经济及国防军事的发展有着举足轻重的作用。工程产品在其研发、生产到报废的整个寿命周期中充满了不确定性,如:对飞行器而言存在诸如有效载荷、发动机推力、工作环境等众多不确定性。不确定性因素对产品质量具有重要影响,而产品质量决定着企业的效益和生存。尤其对于一些重要的复杂机电系统,如飞行器、汽车等,若不考虑不确定性极有可能导致产品性能不稳定、可靠性降低,甚至带来灾难性事故。这不仅会导致经济损失,甚至可能引发政治、军事、文化等方面的社会问题。因此,必须在工程设计阶段就对不确定性予以重视和考虑,于此产生了不确定性设计优化^[1-4],相关的不确定性分析和设计理论得到迅速发展和广泛应用。传统的不确定性设计优化采取的是嵌套双循环模式,内循环实现不确定性分析,外循环负责寻优。近些年出现了不确定性分析与寻优过程序列执行的模式,提高了设计效率。不论何种模式,不确定性分析都是不确定性设计优化中的关键技术之一,它一直都是工程优化领域最重要的理论课题之一。不确定性分析的精度和效率几乎决定了整个设计的精度和效率^[5,6],高精度、高效率的不确定性分析是实现不确定性优化的基础和保障。然而,随着工程系统设计的复杂化、多学科化,以及仿真分析在优化设计中的盛行,给不确定性分析带来如维数灾难、精度低、可靠性差等诸多难题。因此,系统学习和深入研究不确定性分析理论和方法具有重要的意义。

1.2 什么是不确定性分析

不确定性分析 (Uncertainty Analysis, UA) 也称作不确定性传播 (Uncertainty Propagation, UP), 是研究各种系统参数 (泛指系统输入, 包括产品的可控的设计变量和不可控的设计参数) 影响产品的系统性能 (泛指系统输出, 它可能是设计目标、也可能是设计约束) 的规律的方法。简单点讲, 不确定性分析就是在给定系统输入的不确定性信息下, 如何估算输出响应的不确定性信息。平时较为常见的机构、结构的可靠性分析, 都是属于不确定性分析的范畴。在工程产品设计、优化中, 往往存在各种不确定性, 必然引起产品性能的波动, 因此, 需要分析这些不确定性对产品

性能的影响,从而用于指导优化设计,最终提高产品的稳健性和可靠性,避免系统结构失效,引发灾难性的后果,在概念设计阶段就考虑不确定性,还可大为缩短设计周期,节省成本.

1.3 不确定性的来源和种类

不确定性大致分为两大类:随机不确定性 (Aleatory Uncertainty) 和认知不确定性 (Epistemic Uncertainty). 前者表示自然界或物理现象中存在的随机性,设计者无法控制或减少这类随机性,也叫统计不确定性. 随机不确定性在实际中广泛存在,例如:在飞机起飞的仿真中,即使可以完全精确地控制沿着跑道的风速,若让十架相同的飞机同时起飞,由于每架飞机制造上的差异,它们的飞行轨迹也将不同. 类似地,如果平均风速相同,让同一架飞机做十次起飞,由于每次起飞的风速不同,每次的飞行轨迹也会不同. 这里,飞机的制造差异和风速都具有随机不确定性. 认知不确定性是指建模过程中由于缺乏数据或知识而导致的不确定性,也叫做系统不确定性,如:建模时对问题的客观认识不足或人为主观简化而导致的模型不确定性和变量分布参数的不确定性. 它的产生可能是由于对某个量未做足够精确的测量,或建模过程中未能或未完全能掌握系统运动的机理,或由于一些特殊的数据被刻意隐藏. 随机不确定性是没法避免和减小的,而认知不确定性理论上是可以避免的.

随机不确定性在工程设计中广泛存在,关于随机不确定性的理论研究较为完善成熟,应用空间广泛,因此,本书主要针对随机不确定性来介绍各种不确定性分析方法.

1.4 不确定性的表示方法

若存在不确定性,我们总是期望不确定性对系统性能的影响尽可能小,或者设法消除不确定性,在这之前首先要能够表示和量化这些不确定性. 表示不确定性的方法有多种:经典集合理论、概率理论、模糊集合理论和粗糙集理论,每种表示方法都有其应用领域和背景. 在工程优化中,比较常用的几种不确定性的表示方法有:概率分析理论、区间数学和模糊理论.

(a) 概率统计法

随机性是最早认识到的一种不确定性,对随机性的分析及其相应理论概率论^[7,8]的建立开启了不确定性研究的先河. 对随机性研究的深入以及其对应的表示理论(概率论)的发展完善经历了一个漫长的过程. 概率统计法自 17 世纪由赌博游戏引出后,一直是处理随机不确定性强有力的工具,随着社会生产以及科学技术的发展,概率统计方法在工业过程中的应用越来越深入,其成熟的理论基础保证

了它在处理随机不确定性时的有效性. 比如用均值、方差、概率密度函数以及概率累积分布函数等构造概率模型来描述机械功率、电压、电流、温度等的波动; 用贝叶斯方法^[9] 定性分析检测概率参数不确定性问题. 概率统计法用事件发生的概率来表征不确定性. 一个事件发生的概率可以用该事件发生的频率来解释. 当有大量样品或进行大量实验时, 一个事件的概率被定义为样品或实验发生的次数与总数的比率. 概率分析是物理系统中用于表征不确定性最广泛的方法, 它可以描述随机扰动、多变条件和考虑风险产生的不确定性等.

(b) 区间数

在许多情况下, 对于具有不确定性的数据可能无法获得它在不同取值处的概率, 而仅能获得该数据的误差范围. 因此, 此时该数据的不确定性就表示为一个区间范围. 在区间数学方法中, 不确定参数被认为是“未知但有界”, 每个不确定性参数都有上限和下限, 由一个区间描述, 而不具有概率形式. 区间分析的目的是在模型输入和模型参数变化的范围(上下界)已知的基础上, 估计模型输出的上下界. 区间数学的主要优点是它可以解决不能通过概率分析来研究的不确定性分析问题. 当输入的概率分布未知时, 区间分析方法是一种有效的选择. 如在建模过程中存在模型不确定性, 而此时对其概率分布特性无法清楚认识, 但是根据经验可以大致估计模型变化的上下界, 因此可以将模型不确定性表示为某个区间范围. 然而, 基于区间数的不确定性分析是一种非概率方法, 只根据不确定性量的上、下界建立模型, 若不确定量大部分情况集中于更小的范围内, 区间数理论会带来误差. 当输入的概率信息已知时, 区间分析实际上浪费掉了现有信息, 因此不推荐使用. 有关区间数理论的相关研究可参见 [10–13].

(c) 模糊集理论

模糊性是随机性之外的另一种不确定性, 广泛地存在于人类语言描述中. 由于事物的复杂性, 事物的界线不分明, 使其概念不能给出确定的描述, 不能给出确切的评定标准, 这种不确定性即为模糊性. 在我们的生活中, 经常会碰到“很高”“有点胖”“年轻人”“小自然数”等这类语言, 它表示的语意是模糊的、不精确的. 模糊集理论是处理模糊性的一种有效的理论框架. 1965 年, 模糊理论的创始人, 美国加利福尼亚大学伯克利分校的自动控制理论专家 Zadeh 教授首次发表了题为“模糊集”的论文^[14], 这标志着模糊信息处理的诞生. Zadeh 于 20 世纪 60 年代在各学科会议上从模糊信息处理观点出发, 阐述了他的理论. 这一理论为定量描述处理事物和系统中的模糊性, 以及模拟人所特有的模糊逻辑思维功能, 提供了真正强有力的工具. 模糊信息可通过模糊集来表示. 模糊集的表示是用隶属度函数来刻画的, 能处理和模拟不精确的模糊信息. 隶属度函数用来描述某个元素与模糊集的相容度, 隶属度函数值表示某个元素隶属于这个模糊集的程度. 有关模糊理论的相关研究可参考 [15, 16].

这些不确定性表示方法各有优缺点, 由于对于随机不确定性, 通常能够获得足够多的数据来描述其概率分布, 因此概率分析适合于表示随机不确定性. 对于认知不确定性, 数据通常较为稀疏, 由于没有足够的数据, 无法用概率分布来描述其不确定性, 因此通常用基于区间理论的非概率的方法进行分析. 因此, 区间理论适合于当不确定性概率信息没法获得的情况. 模糊理论适合于表示概念的不确定性. 在不确定性分析的应用中, 一些研究者已经指出模糊理论在不确定性分析应用中存在缺点^[17], 尤其是在确定描述模糊概率判断的隶属度函数时, 显得过于武断和不够精确, 且关于隶属度函数目前也没有很清楚的解释. 相对于不确定性的定量估算, 模糊理论更适合于定性推理和模糊集的元素分类. 区间理论分析结果较为粗糙, 某些情况下会带来较大误差. 利用概率理论来描述不确定性, 相对而言比较合理、准确, 其有关理论研究和工程应用较为成熟. 同时, 工程优化设计中大部分不确定性因素, 存在其特殊的物理意义, 且基于经验积累了大量数据, 这些不确定性因素都能用特定的概率分布来表示, 因此在工程优化设计中比较适合于利用概率分析法来表示不确定性. 当然, 用不同的方法来表示各种不确定性, 然后进行混合不确定性分析, 是不确定性分析发展的趋势^[18,19].

1.5 概率不确定性分析

本书主要是针对随机不确定性、基于概率统计理论来介绍各种不确定性传播理论和方法, 因此从概率统计学的角度, 不确定性分析的定义为: 在给定的随机输入下, 如何估算输出响应的随机不确定性. 若不做特殊说明, 本书提到的不确定性分析都是指概率不确定性分析. 图 1.1 展示了概率不确定性分析的基本概念, 从数学上描述具体为: 在随机输入 $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_d]$ 存在不确定性的情况下 (此时 $X_1, \dots, X_d$ 的不确定性可以用其概率密度函数、累积分布函数、或均值和方差描述), 计算响应函数 $Y = g(\mathbf{X})$ 的不确定性信息, 如: 均值、方差、失效概率、概率密度函数等. 显然, 若输入变量都是确定性变量, 那么输出 Y 是一个确定性的值.

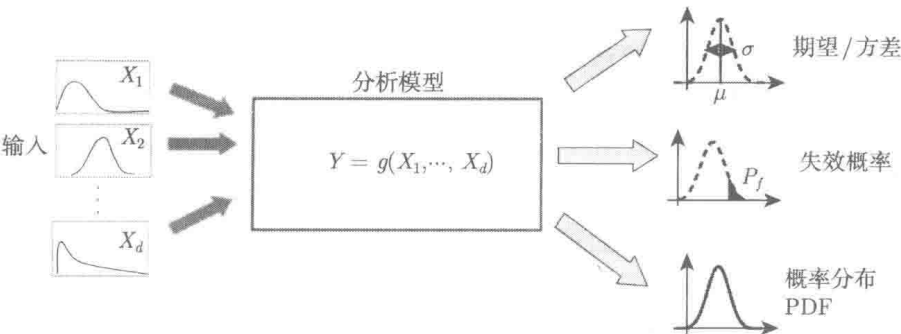


图 1.1 概率不确定性分析的基本概念

国内外现已提出了许多概率不确定性分析方法, 并成功运用到工程系统不确定性优化设计中. 图 1.2 给出了概率不确定性分析方法的概述框图, 主要可分为五类^[20].

(1) 数字模拟法. 通过抽样的方式来实现不确定性分析, 通过在样本点上仿真得到大量的响应函数值, 然后统计其概率随机特性. 这类方法有: 蒙特卡洛仿真、重要性抽样、自适应抽样. 由于需要抽取大量样本, 当性能响应函数的计算较为复杂费时, 数字模拟法存在计算量过大的问题.

(2) 局部展开法. 在参考点处基于泰勒展开对性能响应函数进行近似, 这类方法适用于非线性程度不高、且随机输入波动不大的问题. 局部展开法需要计算函数的导数信息, 因此, 必须要求性能响应函数可导.

(3) 数值积分法. 主要基于数值积分求积分的思想, 将不确定性分析求积分的问题利用数值积分来求解, 如: 全因子数值积分、单变元降维法和稀疏网格数值积分法. 这类方法无需计算函数导数信息.

(4) 随机展开法. 主要包括两大类: 混沌多项式展开和随机配点法. 这类方法主要思想是: 将随机变量表示为若干多项式的线性组合. 该方法的精度较高, 也无需计算函数导数信息, 最重要的是一旦将随机变量进行函数展开完成, 随机变量的任意概率信息都可很方便地得到.

(5) 最可能失效点法. 它以最可能失效点为基准, 进行抽样、或将性能函数近似展开, 在此基础上估算失效概率.

(6) 代理模型的方法. 顾名思义就是基于代理模型进行不确定性分析. 其原理非常简单, 但是精度和效率完全取决于构建代理模型的精度和效率, 最重要的是代理模型的预测值不可能与真实模型完全相同, 难免带来误差, 会带来额外的不确定性.

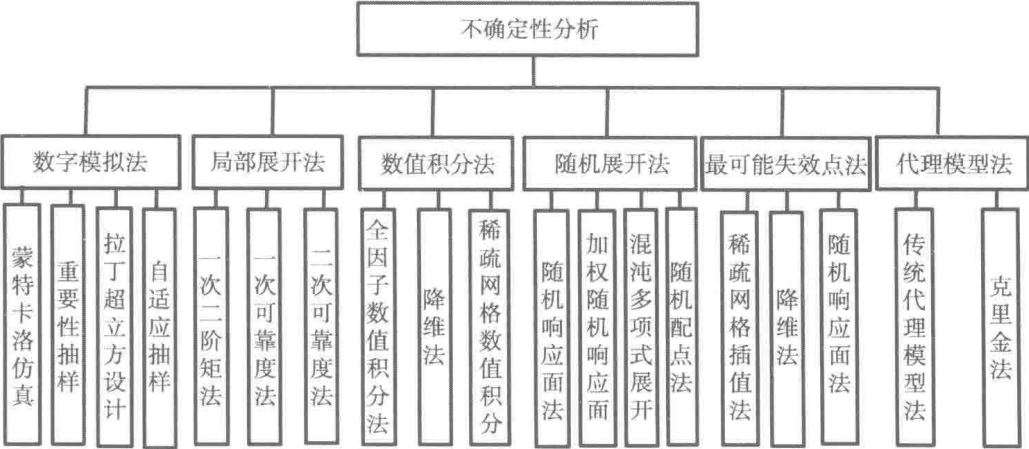


图 1.2 不确定性分析方法概述框图

1.6 本书的目的和内容安排

本书对现有的各种概率不确定性分析方法进行了较为全面、详细的介绍,其大部分内容出自作者多年研究成果的总结。本书力求系统性和先进性,从理论、方法、应用等几个方面论述了不确定性分析理论和方法,给出了该领域国内外最新的研究成果。全书共 9 章,主要内容安排如下:

第 1 章阐述了不确定性分析的定义和研究的必要性。

第 2 章主要对概率不确定性分析中涉及的基本理论和方法进行介绍。

第 3 章对不确定性分析中最传统的方法,数字模拟法进行介绍。

第 4 章介绍局部展开法,包括均值一次二阶矩法,经典的一次可靠度法和二次可靠度法。

第 5 章介绍数值积分法,包括降维法、全因子数值积分法和稀疏网格数值积分法。

第 6 章介绍随机展开法,包括混沌多项式展开和随机配点法。

第 7 章介绍基于最可能失效点的方法。

第 8 章介绍基于代理模型的方法,主要包括传统方法及改进的方法。

第 9 章介绍相关变量的变换方法,是不确定性分析实施的前提条件。

参 考 文 献

- [1] Taguchi G. Taguchi on Robust Technology Development: Bringing Quality Engineering Upstream. New York: ASME Press, 1993.
- [2] Du X, Chen W. Towards a Better Understanding of Modeling Feasibility Robustness in Engineering Design. Journal of Mechanical Design, 2000, 122(4):385-394.
- [3] 李晓斌, 向杨蕊, 金振中, 邹汝平, 张为华. 不确定性设计优化理论与方法研究. 机械设计, 2007, 24(9):1-4.
- [4] 李伟平, 王磊, 张宝珍, 马腾飞. 基于不确定性和模糊理论的汽车平顺性优化机械科学与技术, 2013, 32(5):637-640.
- [5] 刘德顺, 岳文辉, 杜小平. 不确定性分析与稳健设计的研究进展. 中国机械工程, 2006, 17(17):1834-1841.
- [6] Thomas A Z, Michael J H, Mark W H, et al. Needs and opportunities for uncertainty-based multidisciplinary design methods for aerospace vehicle. NASA /TM-2002-211462, 2002.
- [7] Spiegelhalter D J. A statistical view of uncertainty in expert systems. Artificial Intelligence and Statistics, 1986, 17-55.

- [8] Papoulis A. Probability, Random Variables, and Stochastic Processes. McGraw-Hill, New York, 1991.
- [9] Kennedy M C, O'Hagan A. Bayesian calibration of computer models. *Journal of the Royal Statistical Society Series B-Statistical Methodology*, 2001, 63:425–450.
- [10] Shaalan H E, Broadwater R P. Using interval mathematics in cost benefit analysis of distribution automation. *Electric Power Systems Research*, 1993, 27:145–152.
- [11] Moore R E. Interval Analysis. Prentice-Hall, 1966.
- [12] Moore R E. Methods and Applications of Interval Analysis. SIAM, Philadelphia, 1979.
- [13] 姜潮. 基于区间的不确定性优化理论与算法. 湖南大学, 博士学位论文, 2008.
- [14] Zadeh L A. Fuzzy Sets. *Information and Control*, 1965, 8:338–253.
- [15] Yen J, Langari R, Zadeh L A. Industrial Applications of Fuzzy Logic and Intelligent Systems. New Jersey: IEEE Press, Piscataway, 1995.
- [16] 王淑英. 水文系统模糊不确定性分析方法的研究与应用. 大连理工大学, 博士学位论文, 2004.
- [17] Walley P. Statistical reasoning with imprecise probabilities. Chapman & Hall, 1991.
- [18] 唐敏. 混合不确定性表示及应用研究. 国防科学技术大学研究生院, 博士学位论文, 2012.
- [19] 肖宁聪. 随机和认知不确定性下的结构可靠性方法研究. 电子科技大学, 博士学位论文, 2012.
- [20] Lee S H, Chen W. A comparative study of uncertainty propagation methods for black-box type functions. *Journal of Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2008, 37(3):39–253.