

〔西汉〕张苍等/辑撰

# 九章算术

The Nine  
Chapters on the  
Mathematical Art

全译修订版 邹涌/译解

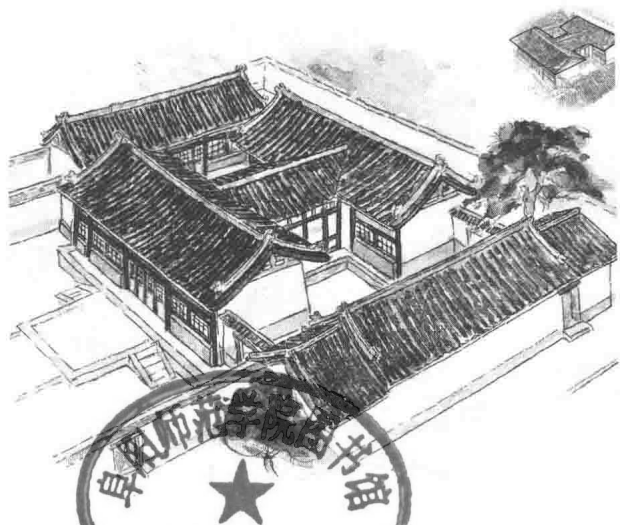
人类科学史上应用数学的“算经之首”



一部与现代科学的主流思想  
完全吻合的中国数学经典  
一部与《几何原本》交相辉映  
的东方数学奥妙之书  
它是中国数学体系的构造蓝本  
更是东方智慧的独特体现

重庆出版集团  重庆出版社

文化伟人代表作图释书系



The Nine  
Chapters on the  
Mathematical Art

邹 涌 / 译解

九章算术

[汉]张 苍 等 / 辑撰

## 图书在版编目(CIP)数据

九章算术 / (汉)张苍等辑撰; 邹涌译解. —重庆:  
重庆出版社, 2015.9

ISBN 978-7-229-10423-8

I. ①九… II. ①张… III. ①数学—中国—古代  
IV. ①0112

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第217611号

## 九章算术

JIUZHANG SUANSHU

[汉]张苍等辑撰 邹涌译解

---


策 划: 刘太亨

责任编辑: 吴向阳 陈 婷

责任校对: 何建云

特约编辑: 何 滢

---

 重庆出版集团  
重庆出版社 出版

重庆市南岸区南滨路162号1幢 邮编: 400061 <http://www.cqph.com>

重庆长虹印务有限公司印刷

(重庆长江一路69号 邮编: 400014)

重庆出版集团图书发行有限公司发行

邮购电话: 023-61520646

全国新华书店经销

---

开本: 720mm×1000mm 1/16 印张: 25.75 字数: 420千

2006年2月第1版 2016年2月第3版 2016年2月第5次印刷

ISBN 978-7-229-10423-8

定价: 45.00元

---

如有印装质量问题, 请向本集团图书发行有限公司调换: 023-61520678

---

版权所有, 侵权必究

作为古代中国乃至东方的第一部自成体系的数学专著，《九章算术》与古希腊欧几里得的《几何原本》并称现代数学的两大源泉。它系统地总结了战国、秦、汉时期的数学成就，标志着以筹算为基础的中国古代数学体系的正式形成。在古希腊数学走向衰落的中世纪，《九章算术》的机械算法体系显示出比欧几里得几何学更大的优势，并被扩展到其他多个领域。隋唐时，它被流传到日本和朝鲜，对其古代的数学发展产生了深远的影响，之后更远传至印度、阿拉伯和欧洲，现已译成日、俄、英、法、德等多种文字版本。

《九章算术》是《算经十书》中最重要的一种，它上承先秦数学发展之源流，入汉以后又经众多学者的整理、删补和修订，约于东汉初年（公元1世纪）成书，是几代学者智慧的结晶。在《九章算术》问世之前，虽然先秦典籍中也记录了不少数学知识，但都没有《九章算术》的系统论述，尤其是它由易到难、由浅入深、从简单到复杂的编排体例。因而后世的数学家大都是从《九章算术》开始学习和研究数学，并有多人为它作过注释，其中著名的有刘徽（公元263年）、李淳风（公元656年）等人。唐宋两代，朝廷将《九章算术》列为数学教科书，并尊其为古代数学群经之首，“九章”二字甚至成为中国数学的代名词。

《九章算术》全书共收集了246个数学问题并提供其解法，主要内容包括分数的四则运算和比例算法、各种面积和体积的计算、关于勾股测量的计算等。其中的许多数学问题是世界上记载最早的。例如，关于比例算法的问题与后来在16世纪西欧出现的三分律的算法一样；关于双设法的问题被欧洲人称为契丹

算法，13世纪以后的欧洲数学著作中也有此称呼，这也是中国古代数学知识向西方传播的一个证据。总的来说，这本汇集历代学者劳动与智慧的著作，可谓当时世界上最简练有效的应用数学，它所确立的算法体系，对世界数学的发展起到深远的影响，至今仍被人们广泛应用。

基于《九章算术》注重实际应用这一显著特点，我们决定将其修订改版，以期向读者呈现它的最佳版本，发挥它在学习、教学及研究功用上的最大作用。但是，在修订过程中，尽管我们本着科学严谨、精益求精的态度来解读本书，也难免有疏忽错漏之处，还敬请有识之士指正。

译解者  
2015.10

## 刘徽《九章算术》序

### 原文

昔在庖牺氏<sup>[1]</sup>始画八卦，以通神明之德，以类万物之情，作九九之术<sup>[2]</sup>以合六爻<sup>[3]</sup>之变。暨于黄帝神而化之，引而伸之，于是建历纪，协律吕<sup>[4]</sup>，用稽道原，然后两仪四象<sup>[5]</sup>精微之气可得而效焉。记称隶首<sup>[6]</sup>作数，其详未之闻也。按周公制礼而有九数，九数<sup>[7]</sup>之流，则《九章》是矣。

往者暴秦焚书，经术散坏。自时厥后，汉北平侯张苍、大司农中丞耿寿昌皆以善算命世。苍等因旧文之遗残，各称删补。故校其目则与古或异，而所论者多近语也。

徽幼习《九章》，长再详览。观阴阳之割裂，总算术之根源，探赜之暇<sup>[8]</sup>，遂悟其意。是以敢竭顽鲁，采其所见，为之作注。事类相推，各有攸归，故枝条虽分而同本干者，知发其一端而已。又所析理以辞，解体用图，庶亦约而能周，通而不黷，览之者思过半<sup>[9]</sup>矣。且算在六艺，古者以宾兴贤能，教习国子；虽曰九数，其能穷纤入微，探测无方；至于以法相传，亦犹规矩度量<sup>[10]</sup>可得而共，非特难为也。当今好之者寡，故世虽多通才达学，而未必能综于此耳。

《周礼·大司徒职》，夏至日中<sup>[11]</sup>立八尺之表，其景尺有五寸，谓之地中<sup>[12]</sup>。说云，南戴日下万五千里<sup>[13]</sup>。夫云尔者，以术推之。按：《九章》立四表望远及因木望山之术，皆端旁互见，无有超邈若斯之类。然则苍等为术犹未足以博尽群数也。徽寻九数有重差<sup>[14]</sup>之名，原其指趣乃所以施于此也。凡望极高、测绝深而兼知其远者必用重差，句股则必以重差为率，故曰重差也。立两表于洛阳之城，令高八尺。南北各尽平地，同日度其正中之景。以景差为法，

表高乘表间为实，实如法而一，所得加表高，即日去地也。以南表之景乘表间为实，实如法而一，即为从南表至南戴日下也。以南戴日下及日去地为句、股，为之求弦，即日去人也<sup>〔15〕</sup>。以径寸之筩南望日，日满筩空，则定筩之长短以为股率，以筩径为句率，日去人之数为大股，大股之句即日径也<sup>〔16〕</sup>。虽天圆穹之象犹曰可度，又况泰山之高与江海之广哉。徽以为今之史籍且略举天地之物，考论厥数，载之于志，以阐世术之美。辄造《重差》，并为注解，以究古人之意，缀于句股之下。度高者重表，测深者累矩<sup>〔17〕</sup>，孤离者三望<sup>〔18〕</sup>，离而又旁求者四望<sup>〔19〕</sup>。触类而长之，则虽幽遐诡伏，靡所不入。博物君子，详而览焉。

## 注释

〔1〕 庖牺氏：即伏羲。

〔2〕 九九之术：指乘法口诀。

〔3〕 六爻：卦中“—”“——”的符号称为“爻”，“—”为阳爻，“——”为阴爻。六十四卦的每一卦由六个“爻”组成，如乾卦“☰”由六个阳爻组成，不同的排列组合会形成不同的卦名，故爻亦表示变化、变动，如《易·系辞》说：“爻者，言乎变者也。”

〔4〕 律吕：律吕是指有一定音高标准和相应名称的中国音律体系。律吕是十二律的别称，语源出于三分损益律的六律、六吕。《伶州鸠论律》中将十二律按次序分为单数、双数排列，单数的六个律即六律，后世又称为六阳律；双数的六个律即六吕，后世又称为六阴律或六同。

〔5〕 两仪四象：两仪，指天地或阴阳二气。四象，是指少阴、少阳、老阴、老阳，在四时则为春夏秋冬。

〔6〕 隶首：隶首，黄帝史官，始作算数。亦借指善算数者。

〔7〕 九数：指“数”学这门功课有九个细目。语出《周礼·大司徒职》，为“六艺”之一，郑玄注谓：“九数：方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方

程、贏不足、旁要。”

〔8〕 蹟(zé)：幽深玄妙；暇：余暇、空闲。

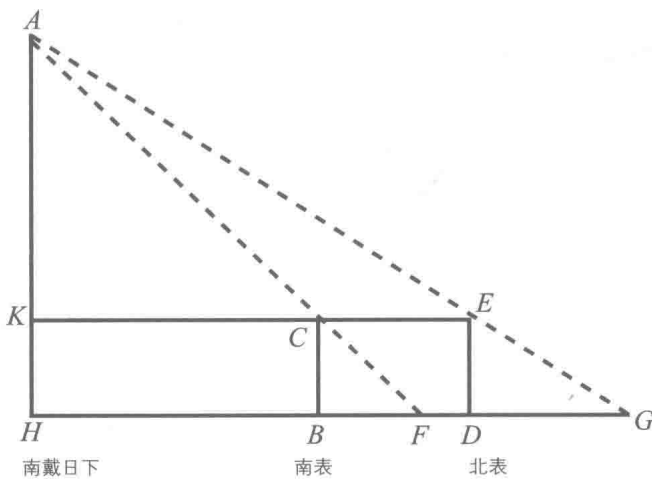
〔9〕 思过半：领悟过半。

〔10〕 规：圆规，校正圆形的工具。矩：曲尺，古代为画方形的工具。度：计算长短的标准，《汉书·律历志上》：“度者，分、寸、尺、丈、引也。”量：计量多少的器具，《汉书·律历志上》：“量者，龠、合、升、斗、斛也，所以量多少也。”

〔11〕 日中：正午。

〔12〕 地中：一国地域的中央。

〔13〕 南戴日下万五千里：参见序图1，《周髀算经》李淳风注曰：“夏至



(序图1)

$$\text{日去地} = \frac{\text{表高} \times \text{表间}}{\text{北表景} - \text{南表景}} + \text{表高}$$

$$\text{南表至南戴日下} = \frac{\text{南表景} \times \text{表间}}{\text{北表景} - \text{南表景}}$$

$$\text{日去人} = \sqrt{\text{日去地}^2 + \text{南戴日下}^2}$$



王城望日(A)，立两表(BC, DE)相去二千里(BD=2 000里)，表高八尺，影去前表一尺五寸(BF=15寸)，去后表一尺七寸(DG=17寸)。旧术：以前后影差二寸(DG-BF=2寸)为法，以前影寸数乘表间(BF×BD)为实。实如法 $\frac{BF \times BD}{DG - BF}$ 得万五千里，为日下去南表里即BH= $\frac{BF \times BD}{DG - BF}$ =1 500里。”

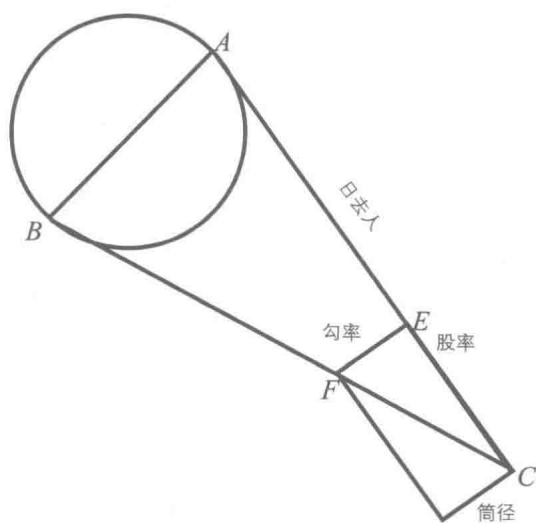
〔14〕重(chóng)差：重测取差，即重复地进行勾股测量，取两次观测对应之差为比率来进行推算。

〔15〕立两表于洛阳之城，……即日去人也：这里讲了具体测量的方法，根据文中叙述，作序图1。

这些测量公式可用相似三角形的比率算得。

〔16〕以径寸之筩南望日，……大股之句即日径也：根据题意作序图2。

这个公式也可用相似三角形勾股比取得，试算如下：



(序图2)

$$\text{日径} = \frac{\text{大股} \times \text{勾率}}{\text{股率}} = \frac{\text{日去人} \times \text{筒径}}{\text{筒长}}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle EFC,$$

$$\text{故 } AB/EF = AC/EC,$$

$$AB = \frac{EF \times AC}{EC} = \frac{\text{筒径} \times \text{日去人}}{\text{筒长}}.$$

〔17〕 度高者重表，测深者累矩：测度高深不可及的目标要用表或矩测望两次。

〔18〕 孤离者三望：若观测目标无所依傍，孤离无着，就必须观测三次，如《海岛算经》第二问，即为三次测望。

〔19〕 离而又旁求者四望：若观测目标不仅孤离无着，又需旁求他处者，则必须测望四次，如《海岛算经》第七问即属此类观测。

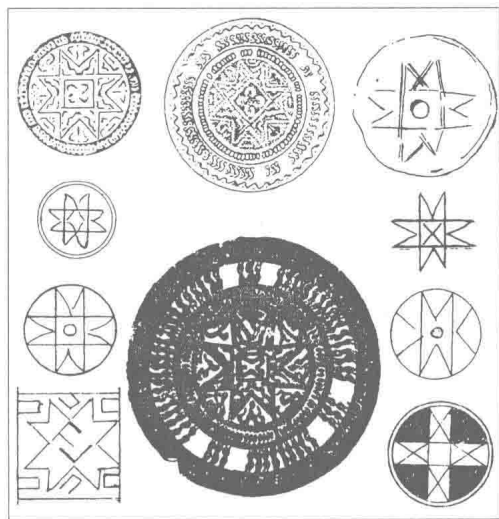
## 译文

上古庖牺氏最早画八卦，以了解神妙莫测的变化结果，以类推万物的情状，创作九九之术，以符合六爻的变化法则。到黄帝时，神化之，引申之，于是创建历法纲纪，协调六吕六律，用以考核道之本原，然后两仪四象精微之气可以得到验证。有记载说隶首创造了数，这方面的详细情况不得而知。考察周公制礼时就有九数，九数的流传，就是今天的《九章》。

过去残暴的秦朝焚烧书籍，致使经学著作散佚损毁。自那时以后，汉北平侯张苍和大司农中丞耿寿昌都以擅长算术名闻于世。张苍等依据残留下来的旧数

### □ 八角星纹图案

在史前社会，人们已普遍通过立杆测影，明确四方四隅，并与星空方位相配合，确定四时八节，八角星纹图案的绘制，便是这种现象的结果。图为八角星纹图案及其拓本。

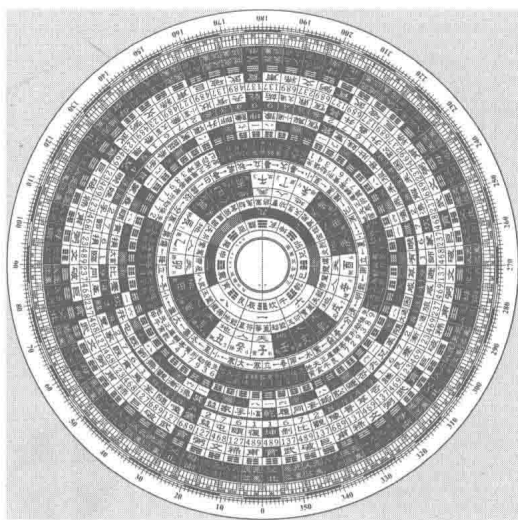


学书籍，对各种数学著作分别作了适当的删补。所以校对其细目与古代著作不尽相同，而所论述的方式多接近当时的习惯用语。

刘徽自幼学习《九章》，年长后又详细阅览。观察阴阳的区别，总论算术的根源，在寻求玄妙的闲暇中，终于领悟了其真意。因此虽然我比较愚钝，也敢竭尽全力搜集所见到的资料，为《九章》作注释。事理按类别来推究，便各有所归，所以枝条虽分而主干相同，可知发生在同一根源。进而用言辞分析原理，用图形解剖结构，希望做到简约而周全，晓畅而不累赘，使阅读者领悟其大半。而且算术作为六艺之一，古代以宾客之礼招揽贤能之人，来教导贵族子弟。虽然称做“九数”，但它却能穷究纤毫细微之处，探测到无穷尽的远方。至于以算法相传，也如同规、矩、度、量可以全部得到一样，并不是很难办到。当今喜好算术的人太少，所以世上虽有许多通达的学者，但也未必能明晰此道啊！

#### □ 罗 盘

罗盘是风水家用来勘测地形的主要工具，它的磁针被放置在具有许多同心环的中心。这些环标示出了时间的分界线以及五行、星宿、五感、二十八星宿及季节等。风水家再根据阴阳理论对所有这些因素进行解释，并作出预言。



《周官·大司徒职》记载：夏至正午立八尺标杆，其影子有一尺五寸，称该地为“地中”。其注说“南戴日下万五千里”。这样说，是用算术推导出来的。考察《九章算术》中立四根标杆望远，及通过树木望山的算法，都是端点和旁点相互可见，没有遥远到像这类情况的。既然如此，则张苍等人提出的算法还没有广博到囊括尽所有算法的程度。刘徽想：“九数”中有“重差”的名目，推究其宗旨是为了应用在这方面。凡望极高、测

绝深而兼求其远者，必用“重差”的算法。勾股必用“重差”作为比率，所以称之为“重差”。在洛阳城内立南北两根标杆，令其高为八尺。假使南北两标杆在同一地平面上，在同一天测量其正午日影，取“景差”作除数，表高乘表间作被除数。除数除被除数所得加表高，即为“日去地”之数。用南表之影长去乘表间距作被除数（除数同上，不变），除数除被除数，所得即为从南表到南戴日下的距离。以“南戴日下”及“日去地”为勾、股，而求其弦长，即“日去人”之数。以直径为一寸的竹筒向南观测太阳，太阳光充满竹筒，则规定筒的长短作为股率，以筒的直径为勾率，以“人去日”之数为大股，而大股对应的勾即为太阳的直径。这样即便是天的圆穹也可以度量，更何况是泰山之高和江海之广呢。刘徽根据流传至今的史籍并略举天地间的实物为例，考证论述其数理，记载在书上，以阐述世上算法的美妙。于是又发明“重差”算法，并为之注解，以探究古人的真意，补充在勾股章之下。度量高度用重表法，测量深度用累矩法，对“孤离”无着的观测物须观察三次，孤离而又旁求者须观测四次。触类旁通，那么即便是幽远隐蔽的目标，都在测算的范围内。博学之士，宜详加审读。

“术数虽若六艺之末，而施之人事，则最为切务，故古之博雅君子马郑之流，未有不精于此者也。其撰著成书者，无虑百家，然皆以‘九章’为祖。”

——元·李冶《益古演段》

《九章算术》文字古奥，历代注释者甚多，其中以刘徽的注本最为有名。刘徽是我国魏晋时期著名数学家，他在曹魏末年撰成《九章算术注》九卷。刘徽注释《九章》时，在继承的基础上，又提出了许多自己的创见和发明：1. 在数系理论方面，他用数的同类与异类阐述了通分、约分、四则运算，以及繁分数化简等运算法则；他在注释开方术时，从开方不尽的意义出发，论述了无理方根的存在，并且引进新数，创造了用十进分数无限逼近无理根的方法；2. 在筹式演算理论方面，他先给出“率”的明确定义，又以遍乘、通约、齐同等三种基本运算为基础，建立起数与式运算的统一理论基础，他还用“率”来定义古代数学中的“方程”，即现代线性方程组的增广矩阵；3. 在勾股理论方面，他逐一论证了关于勾股定理和图解勾股形的计算原理，建立起相似勾股形理论，并发展了勾股测量术，通过对“勾中容横”与“股中容直”这类的典型图形的分析，形成了中国特有的相似理论；4. 在面积与体积理论方面，他用出入相补、以盈补虚的原理，以及“割圆术”的极限方法的刘徽原理，解决了多种几何形、几何体的面积、体积计算问题；5. 割圆术与圆周率，他在《九章算术·圆田术》注中，用割圆术证明了圆面积的精确公式，并给出了计算圆周率的科学方法，他首先从圆内接六边形开始割圆，每次边数倍增，在算到192边形的面积时，得到 $\pi=3.14$ ，在算到3 072边形的面积时，得到 $\pi=3.141 6$ ，称为“徽率”；6. “牟合方盖”说，他在《九章算术·开立圆术》注中，指出了球体积公式 $V=\frac{9D^3}{16}$ （D为球直径）的不

精确性，并引入了“牟合方盖”（指正方体的两个轴互相垂直的内切圆柱体的贯交部分）这一著名的几何模型；7. 方程新术，他在《九章算术·方程术》注中，提出了解线性方程组的新方法，运用了比率算法的思想。并且，刘徽在自撰的《海岛算经》中，还提出了重差术，采用了重表、连索和累矩等测高测远方法。他还运用“类推衍化”的方法，使重差术由两次测望，发展为“三望”“四望”。刘徽的这些方法，对后世的启发非常大，即便是对现今数学也有很多可借鉴之处。

本书在编辑时，为了让读者一窥堂奥，在翻译的同时也对原文作了注释，对原题作了译解，而原书“术曰”所提供的解题法，则以“术解”的形式列出了其解题步骤。在注释解题的过程中，本书除了参考刘徽、李淳风的注释外，还参考了吴文俊主编的《中国数学史大系》第一、二卷和李迪著的《中国数学史简编》，以及白尚恕、李继闵、肖作政等先生的科研成果。

《九章算术》是一部问题集，全书分为9章，共收有246个问题，每题都由问、答、术三部分组成。内容涉及算术、代数、几何等诸多领域，并与实际生活紧密相联，充分体现了中国人的数学观和生活观。全书章与章之间、同章术与术之间、同术所取算题之间都是按照由浅入深、由简至繁的顺序编排的。

卷第一“方田”：主要讲各种形状的田亩的面积计算方法，包括长方形、等腰三角形、直角梯形、等腰梯形、圆形、扇形、弓形、圆环，以及分数的通分、约分、加减乘除四则运算的法则，后者比欧洲早了1400多年。

卷第二“粟米”：主要讲各种谷物粮食的比率和比例算法。

卷第三“衰分”：主要讲比例分配问题。

卷第四“少广”：主要讲已知面积或体积，求一边长和径长等问题。本章也介绍了开平方和开立方的方法，这是世界上最早的多位数和分数的开方法则，它使我国在解高次方程数值方面长期领先世界。

卷第五“商功”：主要讲土石工程的计算和各种立体体积的计算，包括正四棱柱、圆柱、圆台、正圆锥等十种体积。

卷第六“均输”：主要讲合理摊派赋税和合理分配赋役的计算，其中今有术、衰分术，及其应用方法，构成了今天正反比例、比例分配、复比例、连锁

比例等整套比例理论，而西方直到15世纪末才提出类似的理论。

卷第七“盈不足”：主要讲盈亏问题的一种双假设算法，提出了盈不足、盈适足和不足适足、两盈和两不足这三种类型的盈亏问题，以及若干可通过两次假设化为盈不足问题的一般解法。这种解法传到西方后，产生了极大的影响，在当时处于世界领先地位。

卷第八“方程”：主要讲由线性方程组的系数排列而成的长方阵问题，它相当于现在的矩阵。其中解线性方程组时使用的直除法，与现在矩阵的初等变换一致，这是世界上最早的线性方程组解法，西方直到17世纪才由莱布尼茨提出了线性方程的解法。另外，本章中还首次出现了负数的概念，并提出了正负数的加减法则。这是世界数学史上一项重大成就，它首次突破正数的范围，扩展了数系。直至7世纪，印度的婆罗摩笈多才认识到负数。

卷第九“勾股”：主要是讲直角三角形三边互求的问题，本章中提出了勾股数问题的通解公式：若 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 分别是勾股形的勾、股、弦，则 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ， $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ ， $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ 。在西方，毕达哥拉斯、欧几里得等仅求得了这个公式的几种特殊情况；直到3世纪，丢番图才取得相近结果。而勾股章最后一题中给出的一组公式，直到19世纪末，才由美国数论学家迪克森得出。

《九章算术》是东方数学思想之源，也是我国历来各种考试的重要题库。在各级各类考试中，取材于《九章算术》的题目不胜枚举。可以毫不夸张地说，《九章算术》自成书之日起，就对我国数学界产生了巨大影响，它极大地推动了古代数学的发展，直至今日，其影响依然存在。

在本书中，我们还附录了《孙子算经》和《周髀算经》。《孙子算经》约成书于四五世纪，是一部关于乘除运算、求面积和体积、处理分数及开平方和立方的著作，其作者生平和编写年代都不清楚。本书中有个非常出名的“物不知数”问题，具体内容是：“今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？答曰：二十三。”《孙子算经》不但提供了答案，而且还给出了解法。这也是世界上最早提出算法的，被誉为“孙子定理”或“中国剩余定

理”。这个问题在民间广为流传，人们称其为“韩信点兵”，并根据它编了一首“孙子歌”来表示它的解法，即“三人同行七十，五树梅花廿一枝，七子团圆月正半，除百零五便得知”。也就是说，用3除余1，算70；用5除余1，算21；用7除余1，算15；把70，21，15这些数的倍数加起来，连续减去105，最后得出的最小正整数即为答案。后来，南宋大数学家秦九韶在总结“孙子定理”的基础上，创立了“大衍求一术”，将其发表在《数书九章》上，提出了关于一次同余式组问题的完整理论和算法，推广了“物不知数”的问题，取得了杰出成就。我们在选取《孙子算经》时，去掉了一些在现今科学技术环境下，容易造成误导的问题，另外全文是采取直译的方式，在最大限度上保留了《孙子算经》的原貌。

《周髀算经》是我国古代流传深广的天算著作，该书涉及到许多关于数学的内容，包括论述“勾三股四弦五”的勾股定理。它与《九章算术》在很多地方互为表里、互相补充，可以说是相得益彰。《周髀算经》的内容分别完成于西周、春秋战国、秦、汉等不同时期，是中国古代纯粹的数理天文理论著作。它的数据体系是以经验实测为参考，由理论计算所得，然后拿去与已有的数据相比较，同时预言某些数据，指导人们去做实验。因此，李志超先生认为：《周髀算经》是“科学理论的典范”，是“中国科学发展史上的一座丰碑，一座代表一个科学时代总结的里程碑”。《四库全书总目〈周髀算经提要〉》说，《周髀算经》“开西学之源”，这引起人们对《周髀算经》与外来文化的关系的高度关注；《周髀算经》盖天宇宙理论与古印度宇宙理论惊人的相似，其中关于寒暑五带知识，却是古希腊天文学的内容；《周髀算经》所构建的宇宙几何模型，又具有古希腊天文学的一般特征等。因此有学者断言：《周髀算经》隐藏了中西文化交流的大秘密。

本书所附《周髀算经》的注释参考了汉代赵君卿和唐代李淳风的注释，《周髀算经》原文主要采用校勘详实、版本珍贵的钦定《四库全书荟要》本（吉林出版集团2002年影印本）；章节划分采用了曲安京教授的科研成果，另外还参考了钱宝琮、陈遵妫、李志超、江晓原等先生的相关论述。



目 录 CONTENTS

译解者序 / 1

刘徽《九章算术》序 / 1

导 读 / 1

卷第一 方田 / 1

卷第二 粟米 / 33

卷第三 衰分 / 67

卷第四 少广 / 93

卷第五 商功 / 123

卷第六 均输 / 155

卷第七 盈不足 / 195

卷第八 方程 / 219

卷第九 勾股 / 245