个体数据随机准备金评估

模型、理论与方法

仇春涓 黄金龙 吴贤毅 著

清华大学出版社

个体数据随机准备金评估

模型、理论与方法

仇春涓 黄金龙 吴贤毅 著

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书内容为当前个体数据随机准备金评估的前沿热点问题，介绍了准备金评估模型、连续时间模型、离散时间模型，并介绍了离散时间 RBNS 评估的线性方法和非线性方法.

本书适合于大学保险与精算学相关专业高年级本科生、研究生和相关领域的研究人员以及保险行业从业人员阅读使用.

图书在版编目(CIP)数据

个体数据随机准备金评估：模型、理论与方法/仇春涓，黄金龙，吴贤毅著. --北京：清华大学出版社，2015

ISBN 978-7-302-42140-5

Ⅰ. ①个… Ⅱ. ①仇… ②黄… ③吴… Ⅲ. ①准备金–评估 Ⅳ. ①F820.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 271876 号

责任编辑：汪 操
封面设计：常雪影
责任校对：王淑云
责任印制：杨 艳

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦 A 座　　邮 编：100084
社 总 机：010-62770175　　邮 购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市少明印务有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：170mm × 230mm　　**印 张**：10.5　　**字 数**：188 千字
版 次：2015 年 12 月第 1 版　　**印 次**：2015 年 12 月第 1 次印刷
定 价：39.00 元

产品编号：066173-01

前　言

准备金评估是保险公司精算部门的主要职责之一，评估的准确性对保险公司的经营管理和偿付能力监管都有着重要的意义. 传统上，准备金评估是由一些确定性的方法计算而得到的，而随机模型的引入是为了衡量确定性方法准备金评估结果的波动性. 随机准备金模型按照使用数据的类型可以分为聚合数据模型和个体数据模型. 聚合数据模型所使用的数据来自一个或多个三角形的数据，其优点在于计算量小、操作简便，而其缺点在于利用信息不充分. 个体数据模型可以最大限度地利用已知信息，其缺点在于计算量往往会非常大，建模比较复杂. 虽然许多学者通过一些数值方法显示出个体数据模型可能优于聚合数据模型，但这方面的理论结果却很难看到. 本书所提到的准备金，一概指非寿险索赔准备金.

本书的目的在于两个方面：一是对于一定的个体数据，给出准备金评估的方法；二是尽量从理论上论证个体数据模型对聚合数据模型的优越性. 为此，本书分别讨论了基于连续时间的标值 Poisson 点过程和标值 Cox 点过程索赔模型，以及基于离散时间、单次赔付的个体数据索赔模型，在每个模型下比较了由个体数据方法与相应的聚合数据方法得到的理论准备金和准备金评估值的 MSE(均方误差) 以及渐近性质 (asymptotic properties)等，主要内容包括：

1. 对标值点过程（标值 Poisson 过程和标值 Cox 过程）个体索赔模型进行研究，讨论了此类模型下理论准备金的计算方法.

2. 分别讨论了在单次赔付假设下个体理论准备金相对于聚合理论准备金的效率和个体准备金评估值与聚合准备金评估值在有限样本情形下和渐近意义下的统计性质. 在给定的个体数据信息集和聚合数据信息集下，研究了个体理论准备金和聚合理论准备金的解析表达式并讨论了个体理论准备金相对于聚合理论准备金的效率. 然后，根据个体理论准备金的解析表达式得到了个体准备金评估值的解析表达式以及个体准备金评估值与个体理论准备金的差异的渐近性质，对由相同数据下得到的聚合准备金评估值与个体理论准备金的渐近性质的差异进行了研究. 最后，通过数值模拟方法对有限样本下个体方法和聚合方法的优劣进行了比较.

3. 在单次赔付和结案过程独立于报案延迟的基于个体数据的假设下分别研究了在有限样本情形下个体准备金评估值和由聚合方法得到的准备金评估值的 MSE 和两类准备金评估值与个体理论准备金的差的渐近性质. 书中首先给出了

在模型假设下个体理论准备金的解析表达式并给出了计算个体理论准备金的直观展示. 然后, 用估计的参数代替个体理论准备金表达式中的未知参数得到个体准备金评估值的表达式. 接下来对个体准备金评估值与个体理论准备金的差异的渐近性质进行了研究，并将其与聚合准备金评估值的渐近性质进行了比较. 最后, 通过 Monte Carlo 模拟的方法对有限样本下个体准备金评估值与聚合准备金评估值的 MSE 进行了比较. 结果显示, 无论在有限样本还是渐近意义下, 个体方法都要优于聚合方法.

4. 在离散时间个体数据结构下用线性方法来预测 RBNS(已报告未决赔款准备金) 的问题. 该模型不需要对赔付额的矩的具体形式进行假设, 更不需要对数据的分布进行假设, 而只需假设个体索赔增量的前两阶矩存在, 具有适用范围广、简单易操作等特点.

5. 研究了个体数据结构下 RBNS 准备金的评估问题. 书中首先给出了在个体模型假设下 RBNS 理论准备金的解析表达式, 然后用极大似然估计的方法得到的与结案延迟有关的参数和由 Watson-Nadaraya 估计得到的条件期望的估计，代替 RBNS 理论准备金表达式中的未知量得到了个体 RBNS 准备金评估值的解析表达式. 同时, 本书还研究了在由个体数据整理得到的聚合数据下的由链梯法得到的 RBNS 准备金评估值的渐近性质. 最后, 通过 Monte Carlo 模拟的方法在有限样本情形下和 MSE 的标准下对两类准备金评估方法的优劣进行了比较. 结论表明, 个体方法相对于聚合方法可以显著降低准备金评估值的波动性.

本书涉及的内容为当前非寿险准备金评估的前沿热点问题，在所涉及的离散时间和连续时间模型下，研究了个体准备金评估方法以及个体方法与聚合方法的比较问题. 通过比较两类准备金评估方法的 MSE 以及其渐近性质，证明了至少在这些模型下，个体方法要优于聚合方法.

当然, 对于一些理论和应用上都有着重要意义的问题，本书仍未涉及. 特别地，有些问题在理论上还未得到解决, 比如：

1. 对于多次赔付情形下的个体准备金评估值的弱收敛性质, 本书并没有从理论上完全解决, 而仅仅是在单次赔付的情形下讨论了个体准备金评估值的渐近性质. 这主要是因为对于多元 Watson-Nadaraya 估计相关的过程收敛到一个高斯过程缺乏理论上的证明.

2. 离散时间模型仅仅是对现实问题在数学上的近似, 其对保险公司理赔过程的刻画仍存在一定的局限性, 因此, 连续时间模型在理论上要优于离散时间模型, 如何对连续时间模型得到准备金评估值的问题，本书并未涉及.

3. 书中对个体准备金评估值的评估并没有用到一些额外的信息, 如被保险人的年龄、性别，保险标的的性质，行驶区域等, 这些信息的引入相信会使准备金评估的结果更加准确.

在本书的出版过程中，得到了来自“高等学校学科创新引智计划”(简称“111计划”，项目编号：B14019)、上海市哲学社会科学基金 (项目编号：2010BJB004) 以及国家自然科学基金 (项目编号：71371074) 的资助，对此，表示诚挚的谢意!

限于作者学识水平，错误和疏漏在所难免，对于读者任何形式的赐教，作者都表示欢迎并衷心感谢!

作者

2015 年 8 月

主要符号对照

符号	解释
I	最大的事故年或者报告年, 通常被认为是当前时刻
J	最大的进展年, 本书假设 $I=J$
J_1	事故年制结构下的最大的报告延迟
J_2	事故年制结构下的最大的结案延迟
X_{ij}	事故年 (报告年) i 发生的赔案在进展年 j 的增量已决赔款
C_{ij}	事故年 (报告年) i 发生的赔案截止到进展年 j 的累计已决赔款
L_i	事故年 (报告年) i 的未决赔款
L	各事故年 (报告年) 的未决赔款之和
L_i^{RBNS}	事故年 i 的 RBNS 未决赔款
L^{RBNS}	各事故年的 RBNS 未决赔款之和
L_i^{IBNR}	事故年 i 的 IBNR 未决赔款
L^{IBNR}	各事故年的 IBNR 未决赔款之和
$\mathcal{D}$	按事故年排列的个体数据的信息集
$\mathcal{AD}$	按事故年排列的聚合数据的信息集
$\mathcal{F}$	按报告年排列的个体数据的信息集
$\mathcal{AF}$	按报告年排列的聚合数据的信息集
Y_{ikl}	按事故年排列的单次赔付数据中第 (i,k,l) 个赔案的赔付额, 或者按报告年排列的赔付数据中第 (i,k) 个赔案在第 l 个进展年的赔付额
S_{irt}	来自于事故年 i 的报告延迟为 r, 结案延迟为 t 的已结赔案的案件数
$Y_{i:rt}$	来自于事故年 i 的报告延迟为 r, 结案延迟为 t 的已结赔案的赔付额
$\mathbf{1}_i$	元素全为 1 的 $I-i+1$ 维列向量
$X \overset{d}{=} Y$	X 与 Y 同分布，即对任意的 $x \in \mathbb{R}$，$\Pr(X \leqslant x) = \Pr(Y \leqslant x)$
$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$	随机变量序列 $\{X_n\}$ 依分布收敛于 X, 即, 等式 $\lim\limits_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ 在所有 $F_X(x)$ 的连续点 x 上成立, 这里 F_X 表示 X 的分布函数

目　录

第 1 章　引言 1

1.1　非寿险准备金评估简介 1

1.2　本书的主要内容 5

第 2 章　准备金评估模型综述 7

2.1　聚合数据准备金评估 10

2.1.1　单个流量三角形的准备金评估 10

2.1.2　使用多流量三角的准备金评估 20

2.1.3　多业务线的准备金评估 21

2.2　个体数据准备金评估 22

2.2.1　Norberg 离散时间个体数据模型 22

2.2.2　包含赔案件数的准备金评估模型 23

2.2.3　双链梯法 24

2.2.4　半参数模型 25

2.2.5　Jewell 的连续时间模型 26

第 3 章　连续时间模型 28

3.1　索赔数据结构 28

3.2　标值 Poisson 索赔过程 30

3.3　标值 Cox 索赔过程 35

3.3.1　模型定义 36

3.3.2　准备金的预测 38

3.3.3　一个准备金预测的例子 43

3.4　小结 45

第 4 章　离散时间模型 I：单次赔付 46

4.1　数据结构与模型假设 46

4.1.1　数据结构与未决赔款 46

4.1.2　基本统计量 48

4.1.3　模型假设及统计量的性质 49

4.2　个体数据与聚合数据下的理论准备金 51

4.2.1 个体理论准备金与聚合理论准备金的数学表达式 52
4.2.2 个体数据模型与聚合数据模型之间的关系 55
4.2.3 个体数据理论准备金的效率 56
4.3 参数估计及其渐近性质 58
4.3.1 参数估计 58
4.3.2 参数估计的渐近性质 62
4.4 准备金评估值及其渐近性质 64
4.4.1 准备金评估值的渐近分布 64
4.4.2 渐近方差的比较 65
4.5 随机模拟 69
4.5.1 极大似然估计的精确性 71
4.5.2 个体数据准备金评估值相对于聚合数据准备金评估值的改进 71
4.6 小结 75
4.7 定理 4.4.1～ 定理 4.4.3 的证明 75
4.7.1 与复合 Poisson 分布有关的性质 75
4.7.2 定理 4.4.1 的证明 77
4.7.3 定理 4.4.2 的证明 78
4.7.4 定理 4.4.3 的证明 82

第 5 章 离散时间模型 II：单次赔付且结案过程独立于报告延迟 84
5.1 模型假设与基本统计量 85
5.1.1 模型假设 85
5.1.2 参数表示与基本统计量 85
5.2 个体理论准备金与聚合理论准备金 87
5.3 参数估计 88
5.4 准备金评估 92
5.4.1 准备金评估值的渐近性质 93
5.4.2 渐近方差的比较 94
5.5 数值模拟 96
5.6 小结 99
5.7 本章定理证明 100
5.7.1 引理 5.1.1 的证明 100

5.7.2 定理 5.2.1 的证明 101
5.7.3 定理 5.3.1 的证明 102
5.7.4 定理 5.3.2 的证明 102
5.7.5 推论 5.3.1 的证明 103
5.7.6 定理 5.4.1 的证明 103
5.7.7 定理 5.4.2 的证明 104
5.7.8 定理 5.4.3 的证明 108

第 6 章 离散时间 RBNS 评估: 线性方法 109
6.1 引言 109
6.2 数据结构及模型假设 110
6.3 线性预测及其均方误差 111
6.4 均值向量和协方差阵的估计 113
6.5 与链梯法的比较 116
6.5.1 几点说明 116
6.5.2 多元对数正态分布情形 117
6.5.3 Dirichlet 分布情形 119
6.5.4 模拟结果分析 119
6.6 连续过程的线性预测: 用离散方法逼近 123
6.6.1 线性预测及正则方程 123
6.6.2 RBNS 的预测 124

第 7 章 离散时间 RBNS 评估: 非线性方法 126
7.1 数据结构与模型假设 126
7.1.1 数据结构 126
7.1.2 模型假设与 RBNS 理论准备金 127
7.2 个体 RBNS 准备金评估 130
7.2.1 参数的估计 130
7.2.2 条件期望的估计 132
7.3 链梯法准备金评估值及其渐近性质 133
7.4 数值模拟 134
7.4.1 模拟过程中的参数设定 135
7.4.2 模拟过程与结果 137

7.5 小结 139
7.6 本章定理证明 139
7.6.1 定理 7.2.2 的证明 139
7.6.2 定理 7.3.1 的证明 141

索引 143

参考文献 146

第 1 章　引　　言

1.1　非寿险准备金评估简介

非寿险公司的损失准备金评估 (loss reserving) 是指对保险公司未来尚未发生的赔款进行合理的估计, 评估的合理与否不仅关系到保险公司的偿付能力和经营的稳定性, 还会影响保险公司的短期和长期的盈利能力.

保险业具有负债经营的特点, 而且其负债具有不确定性. 保单持有人向保险公司支付一定的费用 (保费) , 签订保险合同, 保险公司在合同所载明的保险期限内对被保险人发生的损失按照保险合同的约定进行赔付. 这种赔付在未来是否发生并不确定, 即便发生, 其额度也不能在现在确定. 从保险公司的角度看, 就是通过收取保费而对保单持有人负有未来的、具有不确定性的债务.

由于保险公司自身运营管理和监管机构监管的需求, 对保险公司已经发生但是未来赔款不确定性的负债作出尽量准确的评估, 并从保费中留下足够的部分. 同时, 保险公司进行赔款准备金评估也是满足现金流动性以及保险监管机构的偿付能力监管的要求. 如果对保险公司的赔款准备金没有进行合理的评估, 可能会导致保险公司未来赔付能力的不足, 甚至会引致和扩大进一步的流动性风险, 最后导致保险公司的经营失败乃至社会的不稳定性. 因此, 世界各国都从保单持有人的立场出发制定了严格的偿付能力监管措施.

直观来说, 准备金是偿付能力的一部分, 是保险人预留下来足以支付未来赔付 (outstanding payments) 的钱. 无论是理论界还是实务界, 目前流行的做法都是将未来的不确定责任当成随机变量来处理. 如果某保险人未来的责任是随机变量 L(英文 liability 的缩写), 其分布用分布函数 $F_L(x)$ 来刻画, 则除了一种最极端的情形外 (存在一个正数 U, 使得 $\Pr(L \leqslant U) = 1$), 无论留下多大数额的钱 R, R 不足支付未来赔付的概率 $\Pr(L > R)$ 总是大于 0. 即便是在上述极端情况, 留下未来责任的上限 U 作为准备金, 会给保险人的经营带来很大的困难, 而且, 这么大预留准备金在现实中证明也是没有必要的. 在最一般的意

义上，准备金是指未来不确定索赔 L(或者其分布函数) 的泛函：

$$\rho = \rho(L)\ (\mathrm{resp}.\rho(F_L)), \tag{1.1}$$

这是风险的一个确定性等价或者说是风险的度量 (risk measure, 见 Dhaene, et al (2008))，用来抵偿 L. ρ 的确定一般基于监管的原则和风险的特点，可以简单到数学期望 $\rho(L) = E[L]$，也可以是其分布函数的很复杂的泛函，比如说失真风险度量 (distortion risk measure, 见 Wu 和 Zhou (2006)).

$$\rho(L) = \int_0^\infty g\left(1 - F_L(x)\right) \mathrm{d}x,$$

其中，g 是某个 $[0,1] \mapsto [0,1]$ 的非降函数, 或者是 Var:

$$\mathrm{Var}_\alpha(L) = \inf\{x : F_L(x) \geqslant 1 - \alpha\}.$$

特别地，如果用 L 表示未来一年的负债，则当 $\alpha = 0.5\%$ 时就得到了用于计算欧盟偿付能力 II (Solvency II) 规定的偿付能力资本 (solvency capital requirement, SCR, 见 European Commission (2010)) 的 $\mathrm{Var}_{0.5\%}$. 如果 $\alpha \approx 15\%$，就得到用于计算 Solvency II 最低资本要求 (minimum capital requirment, MCR, 注意, Solvency II 规定 MCR 不低于 SCR 的 25%~45%).

从狭义上说，准备金指未来负债的数学期望，它是均方误差 $(\cdot)$ 意义下对未来赔付的最优估计或者叫最优预测 (optimal estimate/predict)，因为

$$E(L - EL)^2 = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} E(L - \alpha)^2.$$

传统上的准备金 (reserve) 基本上就是在这个意义下界定的. 本书仅在此狭义的意义下来讨论准备金问题.

由于 L 通常会与历史索赔数据相关 (特别是在非寿险中，下述)，因此，更准确地说，准备金指的是条件期望 $R = E[L|\mathcal{D}]$，其中，$\mathcal{D}$ 表示历史索赔数据，其包含的信息有助于更准确地估计未来的负债. 然而，由于未来负债与历史索赔数据的联合分布通常含有未知的成分，需要通过历史数据进行估计. 一种合理的说法是将 $R = E[L|\mathcal{D}]$ 称为理论准备金，而使用统计方法得到的 R 估计称为准备金评估值或叫经验准备金 (empirical loss reserve)，得到评估准备金值这个过程叫做准备金评估 (也叫 loss reserving 或叫做 reserving).

在非寿险经营中，由于以下两方面的延迟, 保险公司往往不是在赔案发生的时刻对保单持有人作出赔付：

(1) 报告延迟 (reporting delay)：保险事故发生后，被保险人将保险事故报告给保险公司会存在一定的延迟. 这是因为对于某些保险事故，被保险人未必会在第一时间知道保险事故的发生. 另一方面，即使被保险人在第一时间知道赔案的发生, 但因为某些原因不能在第一时间报案，如通信原因、人为因素等. 而且，保险公司基于营销的考虑，为了方便被保险人，也不会规定所有案件必须在发生的时刻告知保险人.

(2) 结案延迟 (settlement delay)：保险赔案报告给保险公司之后，保险公司的理赔和支付过程也会存在一定的延迟. 通常，保险公司在接到报案后会对保险事故进行查勘、立案、核损、核赔等过程，因此保单持有人不会在报告赔案的同时得到赔付. 特别地, 某些复杂的或者引起巨大损失的案子会由于涉及复杂的法律程序而需要相当长的时间才能理赔完毕.

图 1.1 是一个典型的保险赔案理赔过程，从事故发生到报告之间的时间间隔称为报告延迟，从报告时间到结案之间的时间称为结案延迟. 由于报告延迟和结案延迟的存在，使得准备金 $R = E[L|\mathcal{D}]$ 计算更为复杂，同时也使得准备金的评估 (主要是关于 L 分布的估计) 必须在不完全观测下进行，很多情况下必须使用删失数据 (censored data) 和缺失数据 (missing data) 的统计技术，给问题的解决带来了极大的复杂性.

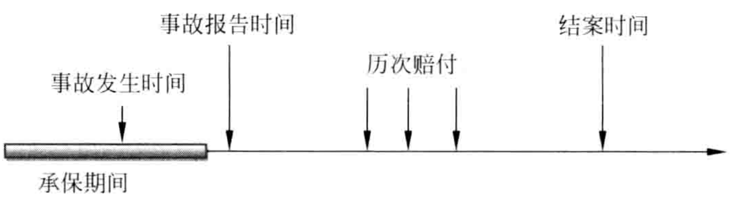

图 1.1　保险赔案的理赔过程

对于保险公司的非寿险准备金，各国有大体相似的分类方式，比如在中国，非寿险准备金可以分为未到期责任准备金、未决赔款准备金和保监会规定的其他责任准备金. 具体分类如下：

(1) 未到期责任准备金 (reserving for nonincurred outstanding liabilities)：未到期责任准备金是指在准备金评估日为尚未终止的保险责任而提取的准备金，包括保险公司为保险期间在一年以内 (含一年) 的保险合同项下尚未到期的保险责任而提取的准备金. 由于保险公司是按照比例法或者风险分布法确定已赚保费的, 因此在保险评估日对于承保保单的未经风险所对应的保费不能算作保险公司的已赚保费计入保险公司的收入之中, 对应这部分收入的保险准备金即为未到期责任准备金. 未到期责任准备金应在会计年度决算时一次计算提

取, 提取的计算方法有年平均估算法、季平均估算法、月平均估算法和日平均估算法.

(2) 未决赔款准备金 (unsettled loss reserving)：未决赔款准备金是指保险公司为尚未结案的赔案而提取的准备金，之所以要提取未决赔款准备金, 是因为赔案的发生、报案、结案之间存在着时间延迟. 根据事故发生、报案与结案赔款之间的时间延迟关系，未决赔款准备金又包括已发生已报案未决赔款准备金、已发生未报案未决赔款准备金和理赔费用准备金.

① 已报告未决赔款准备金 (reported but not settled, RBNS) ：是指保险人为已发生并已向保险人提出索赔、尚未结案的赔案提取的准备金. 已发生已报案未决赔款准备金的基础数据主要来源于理赔部门, 反映理赔部门对于理赔模式、赔付支出变化、零赔案、大赔案等问题的经验和判断.

② 已发生未报案未决赔款准备金 (incurred but not reported, IBNR) ：是指保险人为已发生但尚未向保险人提出索赔的非寿险保险赔案提取的准备金.

③ 理赔费用准备金：是指为尚未结案的赔案可能发生的费用而提取的准备金. 其中有：直接发生于具体赔案的专家费、律师费、损失检验费等而提取的直接理赔费用准备金；为非直接发生于具体赔案的费用而提取的间接理赔费用准备金. 对直接理赔费用准备金，采取逐案预估法提取；对间接理赔费用准备金, 采用比较合理的比率分摊法提取.

(3) 保监会规定的其他责任准备金：除未到期责任准备金和未决赔款准备金之外，监管部门规定应当提取的其他责任准备金，如非寿险长期责任准备金、巨灾风险责任准备金等. 非寿险长期责任准备金是指损益核算期在一年以上 (不含一年) 的各类非寿险业务，如工程保险和中长期出口信用保险，在业务未到结算损益年度时，保险公司在年终按业务到期年份将历年累计的保费收入与赔款支出的差额提取的准备金. 巨灾风险责任准备金是保险公司对未来可能发生的巨灾所提取的总准备金. 这类总准备金属于所有者权益, 从公司利润中提取，保险公司经财政机关或者公司董事会批准而提留的总准备金主要用于巨灾风险的补偿, 只能在当年业务收入和其他准备金不足以支付赔偿时动用, 不得用于分红或者转增资本金. 总准备金事实上属于会计准备金的范畴，并非精算准备，提取总准备金的方法为

$$\text{总准备金} = \text{当年实现的利润} - \text{当年所得税} - \text{调节税} - \text{利润留成}.$$

不过，本书重点研究对象限于 $R = E[L|\mathcal{D}]$ 意义下的已报告未决赔款准备金 (RBNS) 和已发生未报告未决赔款准备金 (IBNR)，略微讨论了未到期责任准备金 (或者也叫做未赚保费准备金，见第 3 章)，不讨论其他责任准备金的评

估方法, 也不涉及理赔费用准备金, 因此, 下文中提到的准备金, 除特别说明外, 都指的是未决赔款准备金.

1.2　本书的主要内容

本书主要研究基于个体数据的准备金评估方法以及个体准备金评估值与聚合准备金评估值在统计性质上的比较. 全书分 7 章, 除了本章引言外，剩下各章主要内容如下：

第 2 章是一个关于准备金评估模型的综述，分为两个部分：一个部分是基于聚合数据的评估模型，既有经典的链梯法、B-F 法等方法，也提到了它们的各种变形和相关的研究进展；另一个部分是基于个体索赔数据的一些模型.

第 3 章介绍理论准备金的连续时间模型, 包括了标值 Poisson 过程和标值 Cox 过程两个模型, 特别是标值 Poisson 过程模型, 可以看作是后续离散时间模型的基础.

第 4 章是一个离散时间模型, 假定每次索赔只需要单次赔付. 首先详细描述了数据结构、模型假设以及在该假设下一些统计量的性质, 然后得到了在该假设下的个体理论准备金和聚合理论准备金的解析表达式, 并对两者的关系进行了研究. 随后, 研究了模型假设中未知参数的估计问题以及参数估计的渐近性质. 接着, 用估计的参数取代个体理论准备金中的相应参数得到了个体准备金评估值的解析表达式并对其渐近性质进行了研究. 这一章还附带给出了由链梯法、B-F 法两种聚合方法得到的备金评估值的渐近性质，并将其与个体准备金评估值的渐近性质进行了比较. 然后更进一步通过数值模拟对三种评估方法进行了比较. 最后对该章进行了总结. 一些定理的证明放在了最后一节.

第 5 章是个体数据准备金的另一个离散时间模型, 讨论结案过程独立于报告延迟的准备金评估方法及其与聚合模型的比较. 首先给出了模型假设并引入了一些常用的参数和统计量, 然后在该模型下得到了个体准备金的解析表达式. 随后, 用矩方法和极大似然法给出了未知参数的估计并研究了其渐近性质. 接着, 对该模型下个体准备金评估值和由链梯法、B-F 法两种聚合方法得到的聚合准备金评估值的渐近性质进行了研究和比较, 并通过 Monte Carlo 模拟的方法对两种模型在有限样本情形下的 MSE 进行了比较. 接着, 对本章的模型、方法和结论进行了总结. 在最后一节给出了本章一些定理的证明.

第 6 章是离散时间个体数据 RBNS准备金评估的线性方法. 首先对 RBNS 的研究现状和线性预测方法的思想进行了介绍, 并给出了本章研究基于的个体数据结构及其模型假设. 然后, 分别对各个层次的准备金的线性预测及其均方

误差以及 EGLS 估计方法估计均值向量和协方差矩阵进行了研究. 随后通过随机模拟对线性预测方法与链梯法进行了对比.

第 7 章是离散时间个体数据 RBNS准备金评估的非线性方法. 首先给出了本章的数据结构、模型假设和在该模型假设下个体 RBNS 理论准备金的解析表达式. 然后, 对个体 RBNS 理论准备金表达式中的未知参数和条件期望分别用极大似然和 Watson-Nadaraya 方法进行了估计，并研究了参数估计的渐近性质. 接着, 讨论了在由个体数据结构衍生的流量三角形下链梯法准备金评估值的渐近性质. 随后, 通过 Monte Carlo 模拟的方法对两种方法的 MSE 进行了比较. 最后两节是对本章的总结和一些定理的证明.