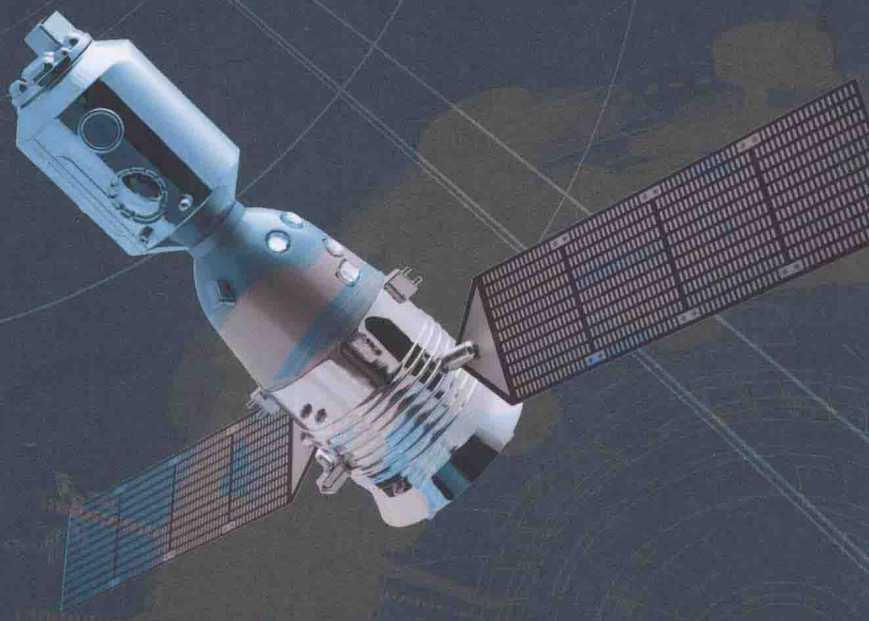


高等刚体动力学

主编 周跃发 张治勇



HEUP 哈尔滨工程大学出版社

高等刚体动力学

主 编 周跃发 张治勇
副主编 刘少刚 周文博
主 审 李宏亮 王超营

 哈尔滨工程大学出版社

内 容 简 介

本书是应用欧拉方程和力学普遍方程研究刚体动力学专题的教材,全书共分三章,第1章详细介绍了刚体运动学,第2章介绍了刚体动力学,第3章重点介绍了多刚体动力学建模的罗伯逊-维滕伯格方法,附录中列有数学补充知识,详细介绍了矢量、张量运算。前两章末附有习题,第3章则通过例题详细介绍了罗伯逊-维滕伯格多体动力学建模方法。

本书可作为工程力学专业的本科生及机械类、近机械类的研究生动力学建模学习的教材或教学参考书,也可供相关专业的科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等刚体动力学/周跃发,张治勇主编.
—哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2016.3
ISBN 978-7-5661-1208-8

I. ①高… II. ①周… ②张… III. ①刚体运动学
IV. ①O311.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 008316 号

选题策划:卢尚坤
责任编辑:张忠远 马广超
封面设计:语墨弘源

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传 真 0451-82519699
经 销 新华书店
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 8.75
字 数 184 千字
版 次 2016 年 3 月第 1 版
印 次 2016 年 3 月第 1 次印刷
定 价 22.00 元

<http://www.hrbeupress.com>
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前 言

本书是哈尔滨工程大学 2015 年教材建设资助项目。全书主要包括了刚体运动学、刚体动力学、多刚体系统动力学等三部分,采取了矩阵化的理论体系,引入了齐次坐标的理论,描述了物体运动的位置和姿态,既便于理解掌握,又便于计算机编程运算。内容设置从动力学应用建模角度出发,面向实际需要,着重介绍了动力学建模所需的全部内容,目的是培养学生应用分析力学方法研究动力学专业课题的能力,使学生系统掌握多刚体系统的动力学建模方法,以便进一步实施系统动力学的实时控制。

本书所依托的课程有理论力学、分析力学、刚体力学等,以牛顿力学理论体系为前提,在此基础上向刚体动力学的应用领域扩展。

本书由周跃发、张治勇主编。第 1 章由张治勇编写,第 2 章由刘少刚编写,第 3 章由周跃发编写,书中例题、课后习题及附录中数学补充知识由周文博编写及演算,并由周跃发完成了全书内容的定稿。

李宏亮、王超营审读了全部文稿,并提出了宝贵的修改意见。

本书的编写内容参考了国内外同行的相关书籍,在此一并致谢!

本书理论推导繁长,错误之处在所难免,敬请见谅!希望读者多提宝贵意见,以便作者修正提高。

编 者

2016 年 3 月

目 录

第 1 章 刚体运动学	1
1.1 刚体运动的描述方法	1
1.2 方向余弦矩阵和坐标变换矩阵	2
1.3 欧拉位移定理	8
1.4 刚体定点运动的几何方法	17
1.5 运动学方程和角速度合成定理	19
1.6 欧拉角及欧拉运动学方程	22
1.7 卡尔丹角及以卡尔丹表达的运动学方程	25
1.8 欧拉参数描述的刚体定点运动	28
1.9 罗德里格参数	33
1.10 刚体自由运动	36
1.11 刚体一般运动的齐次坐标变换矩阵	41
第 2 章 刚体动力学	47
2.1 刚体定点转动的动量矩与动能	47
2.2 惯量张量与惯量矩阵	50
2.3 欧拉动力学方程	65
2.4 刚体自由运动的动力学方程	76
第 3 章 多刚体系统动力学(罗伯逊 - 维滕伯格方法)	83
3.1 概述	83
3.2 图论与多刚体系统的有向图	85
3.3 关联矩阵与通路矩阵	87
3.4 多体刚体系统的速度和加速度	91
3.5 刚体的动量矩定理	105
3.6 树形多刚体系统的动力学普遍方程	108
3.7 增广体的概念	110
3.8 具有转动铰的树形多刚体系统动力学方程	112
附录 A 数学补充知识	124
参考文献	133

第1章 刚体运动学

1.1 刚体运动的描述方法

刚体运动学的研究内容包括刚体定点运动和刚体一般运动。刚体运动中,若刚体或其延拓空间上有一点的位置始终保持不动,这种运动称为刚体绕定点运动,简称刚体定点运动;而刚体的任意运动,称为刚体一般运动。本章主要研究刚体定点运动。

刚体绕定点运动是刚体运动较为复杂的一种运动形式,也是一种主要的运动形式,在工程技术上有着广泛的应用。如图1-1所示的陀螺仪与十字联轴节,都是定点运动。

对于定点运动的刚体,如图1-2所示,可以由定点 O 引取一条与刚体相固连的一直线 L ,线 L 在空间的方位决定于两个参数,若再给出刚体绕线 L 的转角,则刚体在空间的方位即完全确定。可见,刚体的定点运动具有三个自由度。

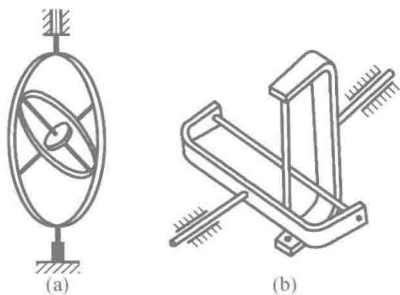


图1-1 陀螺仪与十字联轴节

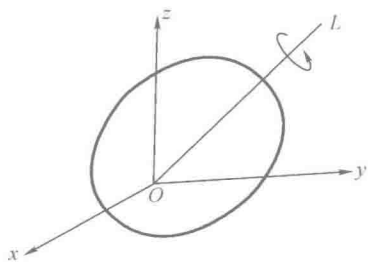


图1-2 刚体运动坐标系

理论力学中主要介绍应用几何方法描述刚体的定点运动,由欧拉位移定理引出瞬时转动轴,从而得到刚体本身的运动和其上各点的速度及加速度公式,可以形象而直观地建立起刚体定点运动的几何图像。但是在解决具体的工程实际问题时,仅依靠几何方法是不够的,这就需要用解析方法描述刚体的运动。解析方法中采用不同的变量描述刚体的定点运动,从而构成不同的解析方法。概括起来有方向余弦矩阵、欧拉角和广义欧拉角、欧拉参数及罗德里格参数,这里每一组变量的



出现都是有其特有工程背景的。

刚体运动学研究内容是在不涉及受力的情况下,建立描述刚体方位的方向余弦矩阵和不同变量与方向余弦矩阵的关系以及角速度的解析表达式和运动学方程。

1.2 方向余弦矩阵和坐标变换矩阵

1.2.1 方向余弦矩阵

1. 方向余弦矩阵的概念

设有一绕定点转动的刚体,在参考系中取固定矢量基 i ,它对应于 $Oxyz$ 静坐标系,同时取固连于刚体上的固连矢量基 e ,对应于固连在刚体上的转动坐标系 $O\xi\eta\zeta$,如图 1-3 所示。显然,若能确定固连坐标 $O\xi\eta\zeta$ 相对于定坐标系 $Oxyz$ 的位置,或者说,若确定了矢量基 e 相对于矢量基 i 的方位,则刚体在空间的方位可完全确定。

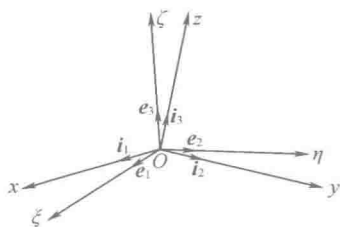


图 1-3 固连在刚体上的转动坐标系

矢量基 e 的基矢量 e_1, e_2, e_3 可分别表示为矢量基 i 的基矢量 i_1, i_2, i_3 的线性组合,即

$$\begin{cases} e_1 = (e_1 \cdot i_1)i_1 + (e_1 \cdot i_2)i_2 + (e_1 \cdot i_3)i_3 \\ e_2 = (e_2 \cdot i_1)i_1 + (e_2 \cdot i_2)i_2 + (e_2 \cdot i_3)i_3 \\ e_3 = (e_3 \cdot i_1)i_1 + (e_3 \cdot i_2)i_2 + (e_3 \cdot i_3)i_3 \end{cases} \quad (1-1)$$

如令 $l_{jk} = e_j \cdot i_k$, $j, k = 1, 2, 3$, 于是有

$$\begin{cases} e_1 = l_{11}i_1 + l_{12}i_2 + l_{13}i_3 \\ e_2 = l_{21}i_1 + l_{22}i_2 + l_{23}i_3 \\ e_3 = l_{31}i_1 + l_{32}i_2 + l_{33}i_3 \end{cases} \quad (1-2)$$

将式(1-2)写成矩阵形式为



$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{i}_3 \end{bmatrix}$$

或

$$\mathbf{e} = \mathbf{L}\mathbf{i} \quad (1-3)$$

式中的 $\mathbf{L}$ 为

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

称 $\mathbf{L}$ 为矢量基 $\mathbf{e}$ 和 $\mathbf{i}$ 之间的方向余弦矩阵, 或称转动矩阵。

$\mathbf{L}$ 中元素的意义: 各行元素分别为 $\mathbf{e}$ 中各矢量在 $\mathbf{i}$ 中的方向余弦, 各列元素分别为 $\mathbf{i}$ 中各矢量在 $\mathbf{e}$ 中的方向余弦。

2. 方向余弦矩阵的性质

方向余弦具有如下性质。

(1) 方向余弦矩阵是正交矩阵, 这是方向余弦矩阵的一个重要性质。现证明: 矢量基 $\mathbf{e}$ 与 $\mathbf{i}$ 之间可以作相反转动, 其方向余弦矩阵为 $\mathbf{L}$ 的转置矩阵为 $\mathbf{L}^T$, 有以下形式

$$\begin{cases} \mathbf{i}_1 = (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{i}_1)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{i}_1)\mathbf{e}_2 + (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{i}_1)\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{i}_2 = (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{i}_2)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{i}_2)\mathbf{e}_2 + (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{i}_2)\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{i}_3 = (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{i}_3)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{i}_3)\mathbf{e}_2 + (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{i}_3)\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \mathbf{i}_1 = l_{11}\mathbf{e}_1 + l_{21}\mathbf{e}_2 + l_{31}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{i}_2 = l_{12}\mathbf{e}_1 + l_{22}\mathbf{e}_2 + l_{32}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{i}_3 = l_{13}\mathbf{e}_1 + l_{23}\mathbf{e}_2 + l_{33}\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

即

$$\mathbf{i} = \mathbf{L}^T \mathbf{e} \quad (1-5)$$

对式(1-3)前乘矩阵 $\mathbf{L}$ 的逆矩阵 $\mathbf{L}^{-1}$, 有

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{e} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{i}$$

由于 $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{L} = \mathbf{E}$ ($\mathbf{E}$ 为单位矩阵), 则上式为

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{e} = \mathbf{i} \quad (1-6)$$

将式(1-5)与式(1-6)做比较, 得到

$$\mathbf{L}^T = \mathbf{L}^{-1}$$

由此证明方向余弦矩阵是正交矩阵。

方向余弦矩阵 $\mathbf{L}$ 应满足与其等价的两组正交关系式:



①因为

$$L^T L = E$$

其中 E 为单位矩阵, 将上式展开后, 有

$$\begin{cases} l_{11}^2 + l_{21}^2 + l_{31}^2 = 1, & l_{11}l_{12} + l_{21}l_{22} + l_{31}l_{32} = 0 \\ l_{12}^2 + l_{22}^2 + l_{32}^2 = 1, & l_{11}l_{13} + l_{21}l_{23} + l_{31}l_{33} = 0 \\ l_{13}^2 + l_{23}^2 + l_{33}^2 = 1, & l_{12}l_{13} + l_{22}l_{23} + l_{32}l_{33} = 0 \end{cases} \quad (1-7)$$

由式(1-7)知, 方向余弦矩阵中的 9 个元素要满足上述 6 个约束方程, 这样, 9 个元素中只有 3 个元素是独立的。

②从基矢量的正交性

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$$

将式(1-2)代入上式, 比较等式两边 $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ 的系数, 可得正交的另一组关系式为

$$\begin{cases} l_{11} = l_{22}l_{33} - l_{23}l_{32}, & l_{21} = l_{13}l_{32} - l_{12}l_{33}, & l_{31} = l_{12}l_{23} - l_{13}l_{22} \\ l_{12} = l_{23}l_{31} - l_{21}l_{33}, & l_{22} = l_{11}l_{33} - l_{13}l_{31}, & l_{32} = l_{13}l_{21} - l_{11}l_{23} \\ l_{13} = l_{21}l_{32} - l_{22}l_{31}, & l_{23} = l_{12}l_{31} - l_{11}l_{32}, & l_{33} = l_{11}l_{22} - l_{21}l_{12} \end{cases} \quad (1-8)$$

(2) 方向余弦矩阵 L 另一重要特性为

$$\det L = \pm 1$$

注意到只有当两个矢量基 $\mathbf{e}$ 和 $\mathbf{i}$ 中, 一个为右手系而另一个为左手系才会出现等于 -1 的情形, 由于这里已规定矢量基形成右手系, 所以

$$\det L = 1 \quad (1-9)$$

1.2.2 坐标变换矩阵

1. 由静系到动系的坐标变换

设矢量 $\mathbf{r}$ 在矢量基 $\mathbf{i}$ 中可以表示为

$$\mathbf{r} = r_1 \mathbf{i}_1 + r_2 \mathbf{i}_2 + r_3 \mathbf{i}_3 \quad (1-10)$$

式中, r_1, r_2, r_3 是矢量 $\mathbf{r}$ 在矢量基 $\mathbf{i}$ 中的坐标, 将 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 分别与式(1-10)作标积, 则

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_1 = r_1 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{i}_1 + r_2 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{i}_2 + r_3 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{i}_3 \\ \bar{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_2 = r_1 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{i}_1 + r_2 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{i}_2 + r_3 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{i}_3 \\ \bar{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_3 = r_1 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{i}_1 + r_2 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{i}_2 + r_3 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{i}_3 \end{cases} \quad (1-11)$$

式中, $\bar{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_1, \bar{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_2, \bar{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_3$ 是矢量 $\bar{\mathbf{r}}$ 在矢量基 $\mathbf{e}$ 的坐标, 以 r'_1, r'_2, r'_3 表示, 于是式(1-11)可写为

$$\begin{cases} r'_1 = l_{11}r_1 + l_{12}r_2 + l_{13}r_3 \\ r'_2 = l_{21}r_1 + l_{22}r_2 + l_{23}r_3 \\ r'_3 = l_{31}r_1 + l_{32}r_2 + l_{33}r_3 \end{cases}$$



写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}'_1 \\ \mathbf{r}'_2 \\ \mathbf{r}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix}$$

或

$$\mathbf{r}' = \mathbf{L}\mathbf{r} \quad (1-12)$$

式中, $\mathbf{r}' = [\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \mathbf{r}'_3]^T$, $\mathbf{r} = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3]^T$, 这里 $\mathbf{L}$ 称为由静系到动系的坐标变换矩阵。显然变换矩阵与方向余弦矩阵的含义不同, 但其中九个元素及其排列相同, 今后将不再给以区分。

2. 反变换(由动系到静系的坐标变换)

若矢量 $\mathbf{r}'$ 在固连矢量基 $\mathbf{e}$ 的坐标列阵为 $\mathbf{r}'$, 则在矢量基 $\mathbf{i}$ 的坐标列阵 $\mathbf{r}$ 为

$$\mathbf{r} = \mathbf{L}^T \mathbf{r}' \quad (1-13)$$

式中, $\mathbf{L}^T$ 是 $\mathbf{e}$ 与 $\mathbf{i}$ 的相反转换, 式(1-13)相当于 $\mathbf{e}$ 不动而坐标 $\mathbf{i}$ 作反转的结果。

1.2.3 连续转动的合成

我们经常会处理刚体的几个连续转动的问题, 而且需要进行连续转动的合成。合成的方法是将刚体的每次转动看成坐标系(矢量基)的变换。

设有矢量 $\mathbf{r}$ (定系定矢量)在固定矢量基 $\mathbf{i}$ 的坐标列阵为 $\mathbf{r}'$ 。当刚体第一次转动至方位 I 时, 矢量 $\mathbf{r}$ 在固连矢量基 $\mathbf{e}$ 的坐标列阵为 $\mathbf{r}'_1$, 变换矩阵为 $\mathbf{L}_1$, 则

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{L}_1 \mathbf{r}$$

当刚体第二次转动, 由位置 I 至位置 II 时, 矢量 $\mathbf{r}$ 在矢量基 $\mathbf{e}$ 中坐标列阵为 $\mathbf{r}'_2$, 变换矩阵为 $\mathbf{L}_2$, 则

$$\mathbf{r}'_2 = \mathbf{L}_2 \mathbf{r}'_1 = \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_1 \mathbf{r}$$

而 $\mathbf{r}$ 相对于刚体在位置 II 的 $\mathbf{e}$ 与 $\mathbf{i}$ 变换矩阵为 $\mathbf{L}$, 则

$$\mathbf{r}'_2 = \mathbf{L} \mathbf{r}$$

将上面两式作比较, 并考虑到这两式对任意矢量 $\mathbf{r}$ 都成立, 则得到

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_1 \quad (1-14)$$

式(1-14)表明, 当刚体作连续两次转动时, 其合成转动的方向余弦矩阵为两次分转动的方向余弦矩阵的乘积, 乘积的顺序与分转动的顺序相反, 即第一次转动的 $\mathbf{L}_1$ 被第二次转动的 $\mathbf{L}_2$ 前乘(左乘)。若连续转动多次, 将依此类推。

作为刚体绕定点转动的特殊情况是刚体对固连其上的 ξ 轴, η 轴及 ζ 轴的转动, 或者说是对体轴的转动。若对 ξ, η, ζ 轴的转角分别为 α, β, γ , 则它们的方向余弦矩阵为



$$L_{\xi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$L_{\eta} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$L_{\zeta} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

若刚体连续绕体轴 ξ, η, ζ 转动, 由于绕体轴转动的方向余弦矩阵已知, 则刚体转动的合成将较易由式(1-14)表示出来, 即

$$L = L_{\zeta} L_{\eta} L_{\xi}$$

矩阵的乘法不存在交换律, 因此刚体连续转动的顺序不可交换。或者说, 刚体转动的有限角位移不是矢量。矢量是有严格定义的, 矢量必须满足三个条件: 此量有大小、方向, 遵守平行四边形的规则及其加法交换律, 它所表达的公式对坐标变换具有不变性。有限角位移虽然有大小和方向, 但它不遵守平行四边形规则及其加法的交换律。我们将在 1.6 节对角位移作进一步的讨论。

例 1-1 一长方形薄板置于固定坐标系 $Oxyz$ 的 xOz 平面内, 固连于长方形板的坐标系 $O\xi\eta\zeta$ 在初始时与 $Oxyz$ 重合。若先对 ξ 轴、再对 η 轴、后对 ζ 轴各转动 $\frac{\pi}{2}$, 试求其方向余弦矩阵。

解: 初始时, 长方形板的位置如图 1-4 所示。设三次连续转动均为右旋, 则三次转动的方向余弦矩阵分别为

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

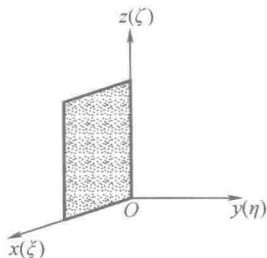


图 1-4 例 1-1 图



三次连续转动的合成,其方向余弦矩阵 L 为 $L = L_3 L_2 L_1$, 于是有

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

此矩阵可通过每一行所代表的矢量积的物理意义得到验证。

例 1-2 万向联轴节由主动轴 B_1 、从动轴 B_2 及十字连杆 B_3 组成。设主动轴 B_1 与从动轴 B_2 的夹角为 θ 。若主动轴 B_1 的角速度为 ω_1 , 试求从动轴 B_2 的角速度 ω_2 。

解: 图 1-5 为万向联轴节在某一瞬时 t 的方位。取定坐标系 $Oxyz$, x 轴方向沿主动轴线, y 轴在主动轴与从动轴所组成的平面内; 另取固连于主动轴及框架上的坐标系 $O\xi\eta\zeta$, ξ 轴与 x 轴重合, η 轴沿十字连杆 B_3 相对于主动轴框架的转轴方向; 再取固连于从动轴及框架上的坐标系 $O\xi'\eta'\zeta'$, ξ' 轴方向沿从动轴线, ζ' 轴方向沿 B_3 相对于 B_2 的转轴方向。设主动轴与从动轴夹角为 θ , 主动轴的转角为 φ_1 , 从动轴转角为 φ_2 。

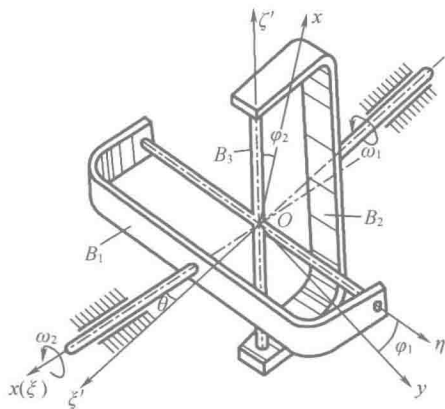


图 1-5 例 1-2 图

现在写出 $O\xi\eta\zeta$ 与 $O\xi'\eta'\zeta'$ 相对于 $Oxyz$ 的方向余弦矩阵为

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 \\ 0 & -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 \\ 0 & -\sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \varphi_2 & \cos \theta \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 \\ \sin \theta \sin \varphi_2 & -\cos \theta \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{bmatrix}$$

由于十字连杆是正交的二连杆, η 轴与 ζ' 轴垂直, 由正交条件

$$[0, \cos \varphi_1, \sin \varphi_1] [\sin \theta \sin \varphi_2, -\cos \theta \sin \varphi_2, \cos \varphi_2]^T = 0$$

展开后得到

$$\cot \varphi_2 = \cos \theta \cot \varphi_1$$

或者

$$\tan \varphi_2 = \frac{\sin \varphi_1}{\cos \theta \cos \varphi_1}$$

求导后有

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi_1}$$

1.3 欧拉位移定理

1.3.1 欧拉位移定理的内容

欧拉对于刚体绕定点有限转动定理可以表述为, 定点转动的刚体从一个方位到达另一个方位的任何有限位移, 刚体可绕着通过固定点的某个轴作一次转动而实现。这里将采用几何方法证明。

设刚体有固定点 O , 刚体的方位可以由定点 O 及刚体内不与 O 点共线的任意两点位置来确定。设在刚体内取 A 点与 B 点使 OAB 构成一个不变形的三角形, 此三角形决定刚体的位置。 $\triangle OAB$ 作一有限角位移, 到达另一方位 $OA'B'$, 如图 1-6(a) 所示。先研究 A 的运动, 由于 O 为定点, $\triangle OAA'$ 是等腰三角, 因此可以作一个通过 O 点垂直平分 AA' 的平面, 如图 1-6(b) 所示。 A 点可以绕通过 O 点并在此平面的任一直线为轴旋转至 A' 点。这种关系同样适用于 B 点旋转至 B' 点, 只不过 B 点所绕的轴线在垂直并平分 BB' 的平面上, 若 A 点旋转至 A' 点, B 点旋转至 B' 点是绕同一轴线, 则该轴线必位于两平面的交线 OD 上, 而此 OD 线在 A 点至 A' 点, B 点至 B' 点的过程中是静止不动的。若在直线 OD 上任取一点 C , 则四面体 $OABC$ 与四面体 $OA'B'C$ 全等, 则 A 点与 B 点绕 OD 为轴转过角度 σ 到达 A' 点与 B' 点时, 四面体 $OABC$ 与四面体 $OA'B'C$ 重合, 这说明刚体的方位变化可以通过绕 OD 转过 σ 角来实现, 于是欧拉定理得证。这种以通过定点 O 某轴的一个有限转动等价于刚体方



位的变化,称作欧拉转动。设此转动量的单位矢量为 $\bar{\lambda}$,转角为 σ ,则欧拉转动可用参量 $\bar{\lambda}$ 和 σ 来表示,即可用 $\bar{\lambda}$ 和 σ 描述刚体的方位。

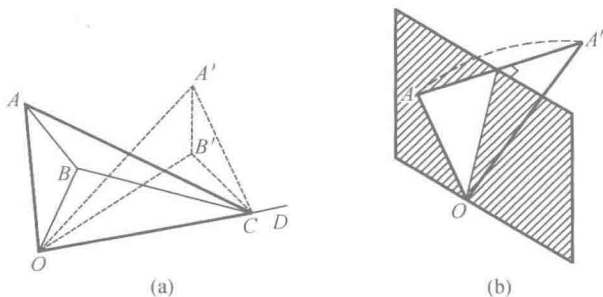


图 1-6 刚体绕固定点 O 旋转示意图

1.3.2 方向余弦矩阵与欧拉转动

如前文所述,方向余弦矩阵 L 与欧拉转动的参量 $(\bar{\lambda}, \sigma)$ 均可表示刚体的方位,现建立二者的关系式。

如图 1-7 所示,设有可作定点转动的刚体,取定坐标系 $Oxyz$,即定矢量基 $\mathbf{i}$ 与固连于刚体的动坐标系 $O\xi\eta\zeta$,即动矢量基 $\mathbf{e}$ 。设 $\mathbf{i}$ 与 $\mathbf{e}$ 于转动初瞬时重合。再另取定坐标系 $Ox'y'z'$ 与固连于刚体的动坐标系 $O\xi'\eta'\zeta'$,令 x' 轴与 ξ' 轴方向沿欧拉转动轴 $\bar{\lambda}$,这样,它们的矢量基为 $\bar{\lambda}\mathbf{i}'_2\mathbf{i}'_3$ 与 $\bar{\lambda}\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ 。刚体的任一欧拉转动可看作连续三个坐标变换的合成,即 $Oxyz \rightarrow Ox'y'z', Ox'y'z' \rightarrow O\xi'\eta'\zeta', O\xi'\eta'\zeta' \rightarrow O\xi\eta\zeta$ 。注意到, $\bar{\lambda}$ 是转动轴的单位矢量,它对定坐标系与动坐标系中的方向余弦均为 a_1, a_2, a_3 ,写成列阵形式为 $[a_1, a_2, a_3]^T$ 。

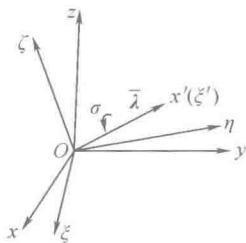


图 1-7 定点转动刚体坐标系

若刚体方位的方向余弦矩阵以 L 表示, $Ox'y'z'$ 系与 $Oxyz$ 系的方向余弦矩阵以 L_1 表示, $O\xi'\eta'\zeta'$ 系与 $Ox'y'z'$ 系的方向余弦矩阵以 L_2 表示。 L_1 中的元素 $\beta_{jk} = \mathbf{i}'_j \cdot \mathbf{i}_k$ ($\mathbf{i}'_j, \mathbf{i}_k = 1, 2, 3$), 且 $\mathbf{i}'_1 = \bar{\lambda}$, 即 $\beta_{11} = a_1, \beta_{12} = a_2, \beta_{13} = a_3$, 则

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}, L_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \sigma & \sin \sigma \\ 0 & -\sin \sigma & \cos \sigma \end{bmatrix}, L_3 = L_1^T$$

于是有

$$L = L_1^T L_2 L_1 \quad (1-15)$$

将式(1-15)展开,则矩阵 L 中各元素为



$$\begin{aligned}
l_{11} &= \alpha_1^2 + (\beta_{21}^2 + \beta_{31}^2) \cos \sigma \\
l_{12} &= \alpha_1 \alpha_2 + (\beta_{21} \beta_{22} + \beta_{31} \beta_{32}) \cos \sigma + (\beta_{21} \beta_{32} - \beta_{31} \beta_{22}) \sin \sigma \\
l_{13} &= \alpha_1 \alpha_3 + (\beta_{21} \beta_{23} + \beta_{31} \beta_{33}) \cos \sigma + (\beta_{21} \beta_{33} - \beta_{31} \beta_{23}) \sin \sigma \\
l_{21} &= \alpha_1 \alpha_2 + (\beta_{22} \beta_{21} + \beta_{31} \beta_{32}) \cos \sigma + (\beta_{22} \beta_{31} - \beta_{32} \beta_{21}) \sin \sigma \\
l_{22} &= \alpha_2^2 + (\beta_{22}^2 + \beta_{32}^2) \cos \sigma \\
l_{23} &= \alpha_2 \alpha_3 + (\beta_{22} \beta_{23} + \beta_{32} \beta_{33}) \cos \sigma + (\beta_{22} \beta_{33} - \beta_{32} \beta_{23}) \sin \sigma \\
l_{31} &= \alpha_1 \alpha_3 + (\beta_{23} \beta_{21} + \beta_{31} \beta_{33}) \cos \sigma + (\beta_{23} \beta_{31} - \beta_{21} \beta_{33}) \sin \sigma \\
l_{32} &= \alpha_2 \alpha_3 + (\beta_{22} \beta_{23} + \beta_{32} \beta_{33}) \cos \sigma + (\beta_{32} \beta_{23} - \beta_{22} \beta_{33}) \sin \sigma \\
l_{33} &= \alpha_3^2 + (\beta_{23}^2 + \beta_{33}^2) \cos \sigma
\end{aligned}$$

由方向余弦矩阵的两组正交关系式(1-7)和式(1-8)与上式表示出的各元素共同可表示成 $\sigma, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的函数,即

$$\begin{aligned}
l_{11} &= \alpha_1^2 + (1 - \alpha_1^2) \cos \sigma \\
l_{12} &= \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2 \cos \sigma + \alpha_3 \sin \sigma \\
l_{13} &= \alpha_1 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_3 \cos \sigma - \alpha_2 \sin \sigma \\
l_{21} &= \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2 \cos \sigma - \alpha_3 \sin \sigma \\
l_{22} &= \alpha_2^2 + (1 - \alpha_2^2) \cos \sigma \\
l_{23} &= \alpha_2 \alpha_3 - \alpha_2 \alpha_3 \cos \sigma + \alpha_1 \sin \sigma \\
l_{31} &= \alpha_1 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_3 \cos \sigma + \alpha_2 \sin \sigma \\
l_{32} &= \alpha_2 \alpha_3 - \alpha_2 \alpha_3 \cos \sigma - \alpha_1 \sin \sigma \\
l_{33} &= \alpha_3^2 + (1 - \alpha_3^2) \cos \sigma
\end{aligned}$$

这样,方向余弦矩阵 L 为三个矩阵之和,即

$$\begin{aligned}
L &= \cos \sigma \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (1 - \cos \sigma) \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_1 \alpha_2 & \alpha_1 \alpha_3 \\ \alpha_1 \alpha_2 & \alpha_2^2 & \alpha_2 \alpha_3 \\ \alpha_1 \alpha_3 & \alpha_2 \alpha_3 & \alpha_3^2 \end{bmatrix} - \\
&\quad \sin \sigma \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1-16}$$

式(1-16)可表示为

$$L = \cos \sigma E + (1 - \cos \sigma) \alpha \alpha - \sin \sigma \tilde{\alpha} \tag{1-17}$$

式中, $\tilde{\alpha}$ 为反对称矩阵。

如写成张量式,则为

$$\bar{L} = \cos \sigma \bar{E} + (1 - \cos \sigma) \bar{\alpha} \bar{\alpha} - \sin \sigma \bar{\alpha} \times \bar{E} \tag{1-18}$$



式中, $\bar{L}$ 为刚体的有限转动张量; $\bar{E}$ 为单位张量。

式(1-18)是将式(1-17)中的各项左乘 e 右乘 e 经简单运算而成, 即

$$\begin{aligned}\bar{L} &= eLe, \quad \bar{E} = eEe, \quad \bar{\lambda}\bar{\lambda} = e\alpha\alpha e \\ \bar{\lambda} \times \bar{E} &= e\tilde{\alpha}e = -\alpha\tilde{e}e = -\alpha(-e \times e)e = \alpha e \times eEe\end{aligned}$$

式(1-16)和式(1-17)建立了描述刚体方位的方向余弦矩阵 L 与欧拉转动轴 $\bar{\lambda}$ 的方向余弦 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和转角 σ 间的关系式。由式(1-16)可以写出

$$l_{11} + l_{22} + l_{33} = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 3\cos\sigma - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)\cos\sigma$$

由于 $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$, 所以

$$\cos\sigma = \frac{1}{2}[(l_{11} + l_{22} + l_{33}) - 1], \quad 0 < \sigma \leq \pi \quad (1-19)$$

或者写成

$$\cos\sigma = \frac{1}{2}(\text{tr}L - 1), \quad 0 < \sigma \leq \pi \quad (1-20)$$

式中, $\text{tr}L = l_{11} + l_{22} + l_{33}$, 读作“迹”, 同样可以由式(1-16)考虑对称项, 得到

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2\sin\sigma}(l_{23} - l_{32}) \\ \alpha_2 = \frac{1}{2\sin\sigma}(l_{31} - l_{13}), & \sigma \neq \pi \\ \alpha_3 = \frac{1}{2\sin\sigma}(l_{12} - l_{21}) \end{cases} \quad (1-21)$$

当 $\sigma = \pi$ 时, 式(1-21)已不能表示出 $\bar{\lambda}$, 而方向余弦矩阵 L 为对称矩阵。 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可由式(1-16)中的对角线元素 l_{11}, l_{22}, l_{33} 分别确定

$$\alpha_1 = \pm\sqrt{\frac{1+l_{11}}{2}}, \quad \alpha_2 = \pm\sqrt{\frac{1+l_{22}}{2}}, \quad \alpha_3 = \pm\sqrt{\frac{1+l_{33}}{2}} \quad (1-22)$$

例 1-3 如图 1-8 所示的正六面体代表宇宙飞行器天线结构的一部分, 如六面体绕其表面的对角线 OD 转动 30° , 试求另一表面上的对角线 EF 最终位置与初始位置所成的角度。

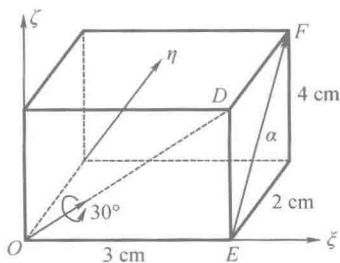


图 1-8 例 1-3 图



解:建立与六面体相固连的坐标系 $O\xi\eta\zeta$, 则欧拉转动轴的方向余弦为: $\alpha_1 = 0.6, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0.8$ 。由式(1-16)可知, 对于 $\sigma = 30^\circ$ 可求得六面体转动间的方位余弦矩阵 L 为

$$L = \begin{bmatrix} 0.914 & 0.400 & 0.064 \\ -0.400 & 0.866 & 0.300 \\ 0.064 & -0.300 & 0.952 \end{bmatrix}$$

固连于六面体的矢量 $\bar{\alpha}$ 的坐标列阵(投影)为

$$\bar{\alpha} = [0, 2, 4]^T$$

转动后的坐标列阵(由动系变换到静系)为 α' , 则

$$\alpha' = L^T \alpha$$

于是有

$$\alpha' = [-0.543, 0.532, 4.407]^T$$

六面体与转动前后线 EF 所成的角度可由矢量标积的公式给出, 即

$$\cos \varphi = \frac{\bar{\alpha} \cdot \bar{\alpha}'}{|\bar{\alpha}| \cdot |\bar{\alpha}'|} = 0.935$$

$$\varphi = 20.8^\circ$$

例 1-4 欲在工件上钻两个孔, 在钻完第一个孔之后, 第二个孔的位置需绕固连在工件上的 ξ 轴转过 45° , 再绕 η 轴转动 30° 才能到达被加工的位置, 如图 1-9 所示。试求作一次转动以调整加工第二孔的转轴方位和应转过的角度。

解: 依次绕 ξ 轴和 η 轴分别转动 45° 和 30° (右旋), 工件与最初方位的转轴方位的方向余弦矩阵为

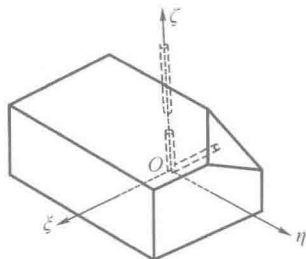


图 1-9 例 1-4 图

$$L = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & 0 & -\sin 30^\circ \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin 30^\circ & 0 & \cos 30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 45^\circ & \sin 45^\circ \\ 0 & -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$