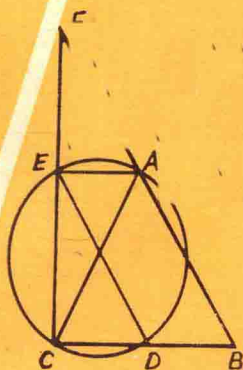
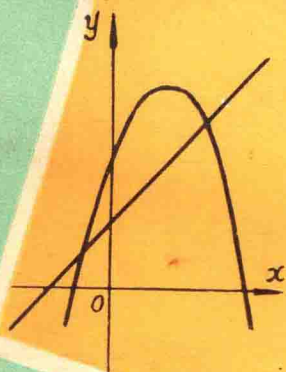


● 怎样解数学题丛书 ●

中学数学解题的一般方法

主 编 刘兆明

副主编 罗廷金 赵振威 何履端 殷樵工



学苑出版社

《怎样解数学题》丛书

中学数学解题的一般方法

主 编 刘 兆 明
副主编 罗 廷 金 赵 振 威
何 履 端 殷 堰 工

学 苑 出 版 社

怎样解数学题丛书

中学数学解题的一般方法 **刘兆明 主编**

学苑出版社出版

社址：北京西四颁赏胡同四号

新华书店首都发行所发行

沈阳新华印刷厂印刷

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{32}$ 印张 $8\frac{3}{16}$ 字数179千字

印数 1—10400

1989.8第1版 1989.8第1次印刷

ISBN 7-80060-182-x/G·112 定价：3.20元

《怎样解数学题》丛书

编委会

总 编 刘 兆 明

副总编 薛喜元 张振环

何履端 罗廷金

编 委 (以姓氏笔画为序)

文晓宇 王立伟

任樟辉 季文哲

邱卫平 苏学祖

张浪平 张少军

杨德平 郑寿昌

周世东 袁中学

梁衍章 熊增润

潘志歧 滕复春

《中学数学解题的一般方法》

主 编 刘 兆 明

副主编 罗廷金 赵振威

何履端 殷堰工

出版说明

为建设我国《数学教育学》的《课程论》，迎接一九八九年“全国高师数学教育研究会”年会召开，由“全国中学数学教学法研究协作组”在全国组织在解题方面有建树的数学教育研究工作者和数学教学教师，组建“全国《怎样解数学题》丛书协作组”，编著《怎样解数学题》丛书。

该丛书，分为《中学数学解题的一般方法》、《高中数学解题的具体方法》、《高中数学解题的特殊技巧》、《初中数学解题的具体方法》、《初中数学解题的特殊技巧》，共计五册。

该丛书，力求从我国数学教育的实际情况出发，研究和探讨中国式的《怎样解题？》。编著者纵观中学教学解题，提出思维规律，给出解题方法。其理论指导性强，实际应用性广，克服“题海战”，加强“教”与“学”指导。

该丛书，可作为高师院校本科生的选修教材，可作为中学教师的教学参考书，可作为中学生的课外读物。

由于作者水平有限，怕是难于实现重愿，希广大读者提出宝贵意见。

编著者

一九八九年六月

绪 论

中国古代的数学著作，如《九章算术》、《周髀算经》，都是以数学题的形式分类安排。这就导致数学教学活动要采取解题方式进行，反映了解数学题是学习数学的主要方式，是培养学生运用数学知识解决实际问题的过程。

数学教育发展到今天，在中学数学教学改革中，出现了一股“新的潮流”。一九七七年美国全美数学教学管理理事会明确指出，学习数学的主要目的乃是学会解题。一九八〇年前全美数学教师协会又发表了权威性的文件，强调八十年代数学课的重点应放在解题教学上〔1〕。

之所以把解数学题放在如此重要的地位，而且容易被人们接受，易于形成“一股新的潮流”，是因为解数学题一直是中学数学教学活动中的一个重要组成部分和重要形式，是学习数学课程的一个“实践性”环节，通过解数学题可以使学习者独立地、积极地进行认知活动，深入地理解数学概念，全面地掌握系统的数学基础知识，实际地学习数学的精神、思想和方法，切实地掌握解数学题的基本技能和技巧，从而有效地培养运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力，以形成运用数学知识来分析和解决社会生活、经济建设和科学技术中的实际问题的能力。以便将来适应现代化生产的多样性和变化性，从事创造性劳动。

正因为此，就把解数学题置于一个重要地位；也是为什么在传统数学教学中，把解数学题作为测验和评价学生实际数学知识、技能和技巧的主要手段，升学和就业处决于考试能否获得高分等的理论基础。但是，在中学数学教学中，存

在着教师在模拟考题与讲解这类考题上下功夫，学生在这类题海中奋斗、挣扎的现象是不正常的。诚然，目前考试不能取消，还要让它科学化、考前的适应性的解题训练也是必要的。但是为了应付考试而解数学题决不是根本目的，它的根本目的应在于通过解题学习知识、发展智力、培养能力。

著名数学教育家波利亚说：“掌握数学意味着什么呢？这就是说善于解题，不仅善于解一些标准题、而且善于解一些要求独立思考、思路合理、见解独到和有发明创造的题”。因此，中学数学首要也是最主要的职责是强调解题过程中的方法性训练。

此外，还需要通过解数学题培养学生善于运用某种方法、手段改变数学问题的情况；善于构想新的解题手段和解题思路；善于区分和积累可能有益的资料，善于在原有题目和解法的基础上，联想、构造出新的题目和解题方法；善于自我测验以及对解题进行讨论。等等〔2〕。这是因为，数学问题中存在着大量需要进行创造性思维的因素。通过上述行为，可以获得创造性思维力，这正是人们从事创造劳动所必须的。

从上面的叙述中，已经涉及到了通过数学题可以进行学习、教学、思想教育、测验、发展思维和智力、培养既能进行局部分析又能进行宏观控制的实际能力，等等。尽管未作专门的论述，但实践能让大多数人所接受，承认数学题具这些功能。

什么是“题”？长期以来，人们对它进行大量地探讨和研究，但至今也没有得到一致的结论。但大部分研究者认为最有实际价值的是研究人解题的过程，以及研究提高人（或机器）解题效果的途径。这里，我们介绍用“系统”描述什么是“题”〔3〕。

先明确“系统”。系统是指“……以相互联系具有某种性质的要素所组成的集合，而这些要素又按着由具有完全确定的性质的关系排列着。该集合的特点是，它在整体性质和集合功能上的一致性”。元素(对象)、性质、联系、关系、状态、功能的状态等都可被认为是“系统”的要素。任一系统都可视为更大的系统的要素或子系统；一个系统的要素也可视为新的层次上的系统。把系统的本质性质的意义的总和称之为某时刻的“系统状态”，把全部可能影响系统状态变化因素叫做“系统的周围环境”。

再描述“题”。以M表示主体（即“人”），以W表示某个构成抽象（或具体）系统（称之为“题”系统）。那么(M,W)又是一个更大的系统。当M接触W后，知道W中的全部元素，元素的性质以及关系，（或M并不与W发生关系），就称W是相对M的稳定系统。否则，称W相对于M的问题系统，并记为 W_x 。这样，某系统R是稳定系统还是问题系统，是由M决定的，取决M的知识、经验等。

一般来说，对某个M的关系而言，一个题的系统可能是问题系统，但它能独立于主体存在。明显地，稳定系统能独立于任一具体的主体而存在。

在人与集合保持确定的接触的情况下，常用“稳定情境”和“问题情境”是合理的。

当要求（不管这要求是用什么方式表示的）某个人要从R中确定他不了解的元素、性质、和关系时（而R的问题性已经确定），集合W对于该主体就变成了“题”。可见，问题情境就是“题”。

在问题情境中区分出的四个基本成分，作为“题”的基本结构：

1. 初始状态(P)——系统 R 的问题性特征;
2. 最终状态(S)——系统 R 的稳定性特征;
3. 解(R)——由 A 至 B 的转化
4. 解题的基础(Q)——P 的理论和实践的基础

这四个成分构成的总体用“PQRS”表示。

如果某题中由 P 转化为 S 靠的是数学手段,即成分 Q 与 R 具有数学特点,那么就称这种题为数学题。

对于数学题来说, P、S、R、Q 分别是条件、结论、为找出结论变换题的条件,和解的理论根据。

如果一个题的四个要素 (P、Q、R、S) 都是数学对象,那么该题是纯数学题;如果仅在 Q、R 出现数学内容,那么它就是数学应用题。

一个题系统的问题性,取决于主体 S 对它的四个基本要素,哪些是已知的,哪些是不知道的。一道题,对于 M 来说,若 P 明确, R、Q 已知, S 明确(或不明确),则称它是标准性题;若 P、Q、R、S 中有一个是不知道的,则称它是训练性题;若 P、Q、R、S 中有二个是不知道的,则称它是探索性题;若 P、Q、R、S 中有三个是不知道的,则称它是问题性题。

在中学数学课本里,大多数是标准性题,常被人们称作习题。而非标准题多见于补充题集合考题(竞赛题)中。上述的题型是相对主体 M 划分的,事实上,同一个数学题,对于不同的 M 可能是不同的题型。对于张三是问题性题,而对于李四解答它却并不成问题。

关于“什么是解题”,对这个术语还有种种不同的解释:有人认为它是指解常规练习题(即标准题),有人可能用它来指逻辑问题,另一些人认为它应指解决日常生活情景

问题，还有些人认为它指应用微机进行模拟，又有人认为它指的是数学模式，或者是使用更为一般的情景来处理现实问题，等等。

如果从上述“题”的意义出发，那么把问题情境转化为稳定情境就是“解题”。如果主体M断定 W_x 具有问题性并要求排除，M能实现这一要求时，那么就产生一道在此条件下可解的题，否则就是一道在此条件下不能解的题。在这种意义下解题与解题过程需加以区别，解题过程是指人寻求解的活动。

解题与思维能力和解题的经验关系密切。思维能力和解题经验反映了解题能力。

解题能力是一个复杂的综合过程，它包括知识、经验和思维所具有的一定数量和质量性质的性质。它对解题起显著的作用。有时它也被称为解题过程中表现的“思维能力”。

就解题者而言，解答非标准题最基本的成分是：

1. 根据解题需要，进行分析已知情境和所求的能力；
2. 揭示条件或结论的隐含性质，建立已知元素或未知元素之间的联系，以及与做过的题目（或某几类题）作比较，从而找出解题所需要的重要因素；
3. 转换题目的条件或结论；并能连续化简的能力；〔4〕
4. 构造题目的最简单的数学模型（如图示等）；将题目的元素和模型的元素视为同一事物；并把它们中的最重要的性质和关系建立模型和所给题目的情境的一一对应；
5. 揭示题目的整体结构，并能将整体结构进行分解，改造局部结构，使之符合整体结构的需要，达到最优化的目标；
6. 通过直觉的、逻辑的、合理的思考，采取试验的方

法，猜测其中间结果和最后结果，或用归纳法进行探索，用演绎法检查所提出的假设（猜想），举反例进行反驳，仔细进行相应的计算；

7. 对题目的模式进行研究运算，并对得到的结果作出解释；将题目的语言和模型术语，根据解题需要相互转译的能力；

8. 简明地（用符号、文字、图形）表达所求出的解；直观的说出主要思路；

9. 从各个方面（如解答的正确性，解法是否简明、巧妙、重要等）用批评的态度审评解题的结果；将解题的结果一般化（或特殊化）；研究各种局部的和特殊的情况；

10. 从题的内容、解答过程或结果中，有效地选择有价值的规律性的知识；将这些知识和已有的知识、经验相联系，形成系统的知识，等等。

上述解题思维能力同科学认识方法有机地结合起来，就组成完整的解题的一般方法。这种方法的表现形式就是探索，利用它可以提高解题的效率、缩短思维过程的长度，达到解题的最优化。

在中学数学教学中，解答数学题一般分为理解题意；设计解题方案；实现解题方案；研究所得的结果；四个阶段进行。

1. 明确题的条件和要求，深入了解和分析条件或结论中的各个元素，在复杂的记忆系统中选择必要的信息（知识），在题的条件和结论同已有的知识和经验建立相关联系，等等。

2. 有目的地把已知和未知进行各种组合试验，或者有目的地把条件或结论进行转换，使之转化为已知的类型，在

已经学过的解法中选择在已知条件下最佳的解题方法，选择解题的途径，设计解题方案，并在初步检验之后修正方案，将方案同题目的条件与直观想象的条件建立联系，最后确定解题的方案，等等。

3. 实现解题方案的所有细节，同时通过已知条件和选择的根据作对比，对方案进行修正；选择叙述解答过程的方法并且书写解答，写出结果，等等。

4. 求出解答的最后结果，对结果进行检查分析（估算、复核），探讨实现解题的各种方法，研究特殊情况 and 局部情况，找出最重要的知识，将新知识和经验加以整理使之系统化，等等。

解题过程中，解题者首先遇到的困难是理解题意和寻求解题途径，而且解答某题感到很难，往往或是缺少有关知识；或是缺少供解题参考的经验和题型；或是缺少解题方法等。解决上述问题，有助于顺利解题。若解题采取“病急乱投医”，一味乱闯，则收获必定是不大的。

本书就是针对上述困难、结合实例，帮助建立解题前的分析方法，拓广解题思路，建立运用解题经验的参考题型，而从各个方面提供各种解题的一般方法。由于依数学题的解是否具有客观性，因而它可分为客观题和论述题；本书虽以论述性题为例，但所提供的方法适应于各种题型的解答。对于给出的某种解法对同类型的题力求具有通用性。尽管面对的数学题较多的是标准性题和训练性题（相对解题者来说），它的解法仍然适合于其它非标准性题。所以我们亦称本书的解题方法为“一般方法”。

显然，解数学题需要运用解题的一般方法，以指导有效地探索解题途径，实现获得正确的解答。因此，必须首先学

习和掌握解题的一般方法，以便在解题中经常地参考，合理地选择，熟练地运用。

本书提供的中学数学题的一般解法，都是一些有关专家和内行们的研究成果，是解题行之有效的经验结晶，它充分注意了其全面性、深刻性和实际应用的价值性。通过对本书的阅读，可以增长数学知识；可以学到许多重要的解题方法；可以从各个例题得到示范和深刻体会这些解题方法的运用，还可以大开眼界，广拓思路，有效地增强解题的能力。

学习解题方法，是为了掌握解题方法顺力地解题，以适应人类创造性劳动。学会解题方法要靠解题的实践，就象游泳需要游泳方法，而游泳方法的掌握需要通过游泳来实现一样。事实上，解题方法的获得过程，是一个“学习——分析——思考——总结——实践”的过程。所以，在学习和运用本书方法的同时，重视时践，重视思考和分析，才能达到炉火纯青的境地。

〔1〕〔美〕J.P 贝克《解题教学—美国当前数学教学的新动向》《数学教学》1988年第2期华东师大。

〔2〕〔3〕〔苏〕B.A奥加涅相等，《中小学数学教学法》

〔4〕唐以荣《中学数学综题解题规律》重庆师院数学系

注：邱卫平、罗廷金文

目 录

绪论

第一章 数学题

§1-1 数学的标准化考试.....	(1)
§1-2 数学选择题的设计.....	(14)
§1-3 数学题的结构与功能.....	(20)
§1-4 习题的地位与作用.....	(27)

第二章 解题的一般思考方法

§2-1 客观题的基本解法.....	(31)
§2-2 主观题的思考程序.....	(47)

第三章 解数学题的一般方法

§3-1 模仿法.....	(56)
§3-2 模式法.....	(64)
§3-3 变换法.....	(70)
§3-4 联想法.....	(79)
§3-5 分域法.....	(85)
§3-6 递推法.....	(97)
§3-7 构造法.....	(105)
§3-8 参数法.....	(116)
§3-9 关系——反演——映射法.....	(124)
§3-10 想象法.....	(134)
§3-11 逆向思维法.....	(140)
§3-12 整体结构法.....	(145)
§3-13 它科法.....	(158)

第四章 解数学题的完善

§4-1 解题结论的检验	(173)
§4-2 多种解法的发现	(185)
§4-3 数学题的最佳解法	(201)
§4-4 数学题的引伸	(219)

第五章 解题能力的培养

§5-1 掌握科学程序	(234)
§5-2 掌握解题三想法	(235)
§5-3 表述规范	(248)
§5-4 完善解题	(249)

第一章 数学题

§1-1 数学的标准化考试

教育活动的开始，便有考核教育活动成效的方法。我国就是世界上实行考试制度最早的国家。目前，我国广泛使用的考试方法，相传早在1400年前的隋朝就开始运用了。随着科学技术的发展，传统考试越来越暴露出方法的不科学，标准不明确，结果不可靠的弊端。

1. 方法不科学。传统考试没有具体的考试大纲和目标；试题没有做过考前施测，不加分析和筛选，有很大的主观性；试题的形式基本上都是论述、问答、综合运算、推理论证等论文式的题，取样窄、复盖面小，阅卷和处理考试结果等都是手工操作，原始方法。评分主观，质量无法控制，误差较大。

2. 标准不明确。传统考试的试题，是由几个人组或的命题组，依照个人的经验命题，所命的试题大都是论文式的题目，因此评分标准不明确，主观随意性很强，难于克服评分中的差错，且不同学科的考试、不同次考试的分数的零点（即参照点）是相对的，它们的分数是不等值的，所以这种分数无法相加，缺乏可比性。

3. 结果不可靠。传统考试的试题量小，可测面狭窄，得分的机遇性大，无法较全面的测出考生的真实水平；加上试题没有唯一的答案，牵涉面广，而且评分标准受阅卷者的情

绪、感情的变化而变化，主观随意较大，计分不科学，误差较大，所以，考试的结果难于达到准确可靠。

不难看出 传统考试不客观、不科学，大大地影响了考试任务的完成，更无法真实地测量出考生的水平，实践中又是费钱、费时、费人力，远远不能适应时代发展的需要了，非改革不可。为了探索考试改革的的路子，我们在对一种新的考试方法——标准化考试作一些简要介绍，供老师们在教学工作中研究参考。

一、什么是标准化考试

标准化考试是十九世纪末，在西方首先是美国兴起教育测验时开始出现的一种考试形式。这是一种大规模进行的客观性考试，它必须按照系统的科学程序组织，具有客观性很强的标准，并对从命题到考试、阅卷、评分等各个环节可能产生的误差作出严格控制。作出标准化考试，应具备下列条件：

1. 制订考试大纲和编写考试指导书。考试大纲可以使教学大纲具体化，它的作用在于明确地告诉考生考试的要求、内容和方法。考生可按照大纲要求全面备考，不需花功夫去猜测题型，以减少临场考试的心理压力。考试大纲或考试指导书的主要内容是：考试的性质是什么（成绩考试、水平考试、学能考试、诊断性考试）；考试的范围、内容和要求如何；各部内容的比重怎样；考试采用哪种形式（开卷、闭卷或实际操作等）；采用哪些题型；怎样计分，考试时间多长。等等。在考试大纲或考试指导书的最后，一般还附上一份模拟试题。模拟试题是考试大纲的具体体现，通过考生动手做一遍，可以从中揣摩正式考试试题的难度，了解正式考试的实际要求。