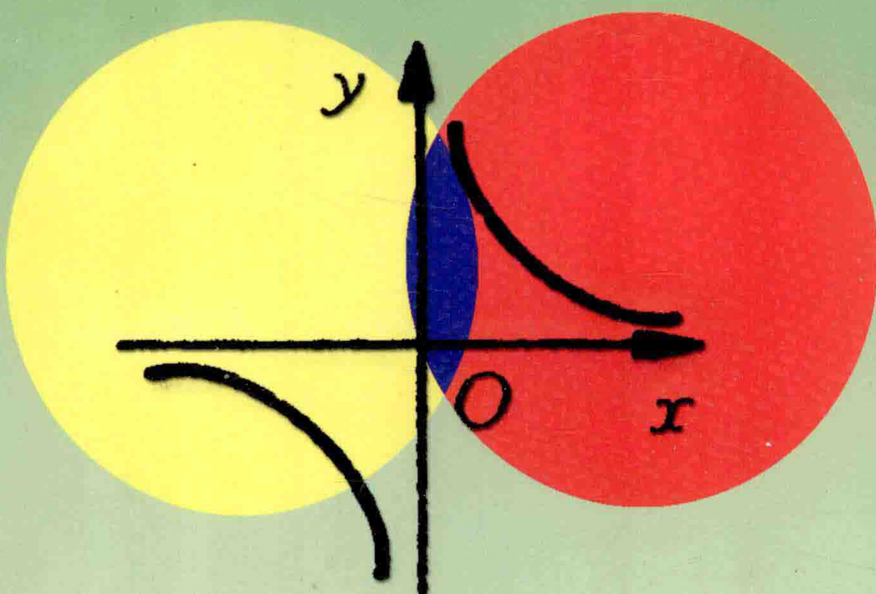
数　学

SHU XUE

周俊杰　主编



中国环境科学出版社

数　　学

主　编　周俊杰
副主编　张　伟　赵　航
　　　　于增波　徐秀华

中国环境科学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学/周俊杰主编. -北京:中国环境科学出版社.2001
ISBN 7-80135-875-9

Ⅰ.数… Ⅱ.周… Ⅲ.数学-专业学校-教材
Ⅳ.X19

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第44006号

中国环境科学出版社出版
(100036 北京海淀区普惠南里14号)
北京巨山印刷厂印刷
新华书店总店北京发行所发行 各地新华书店经销
*
2001年10月第一版 开本 787×960 1/16
2001年10月第一次印刷 印张 24.5
印数 1-4000 字数 466千字
定价:29.80元

前　言

本书内容包括集合与对应、幂函数、指数函数和对数函数、三角函数、空间图形、数列、复数、曲线和方程、极限与导数、不定积分、定积分、排列与组合、统计。

考虑到知识的完整性和教学的具体情况，我们把“不等式”作为附加内容列出，供学习参考。

本书在编写过程中，充分注意了数学教学的特点，力求做到既适合普通班学习，又适合成人班使用，所以内容上都是从实例引入，理论联系实践，又不失知识的科学性、连贯性和系统性。为了便于学员学习，每章后都有小结，有一定数量的练习题，在书后亦附有参考答案，以便学生自学。对于某些需要熟练掌握的基础知识、基本技能和基本方法，在部分章节后备有思考题及思考题答案，以供不同专业的学生根据不同需要进行练习。

书中带有“*”号的内容，根据不同专业的需要，可作为选学内容。

本书在编写过程中，编者参阅了人民教育出版社出版的数学教科书，在此谨致谢意。

为了便于教师授课，提供下列课时计划，供作参考。

章	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
课时	8	13	18	15	8	10	12	18	12	8	14	8

本书由周俊杰主编，张伟、赵航、于增波、徐秀华等担任副主编。

由于编写时间仓促，编者水平有限，书中难免存在错误和疏漏之处，欢迎广大师生和读者不吝批评指正，以便不断修订完善。

编　者

2001 年 10 月

目　录

第一章　集合与对应

集合是近代数学的重要基本概念之一. 集合论是研究集合的一般性质的理论，它既是现代数学的基础，又是一门纯数学，同时还是逻辑学的一个重要领域. 集合论思想已经渗透到许多重要的近现代科学中，在计算机、人工智能和日常生活中都有着广泛的应用.

集合论是19世纪末20世纪初才开始发展起来的，它的创始人是德国数学家康托尔（*Georg Cantor*，1845年 ~ 1918年，出生于俄国彼得堡）.

在小学数学中开始渗透集合的思想，初中数学中已经遇到关于集合的名词. 这里，我们将较系统地学习集合的初步知识. 主要内容有集合的概念，集合与集合的关系，两集合间元素与无素的关系.

§1－1　集合及其表示法

一、集合

为了理解这个概念，先看如下的例子：

(1)　1，2，3，4，5；

图 1－1

(2) 与一个角的两边距离相等的所有的点；

(3)　x^2, $3x+2$，　$5y^2-x$，　x^2+y^2

图 1－2

(4) 所有的等腰三角形；

(5) 某农场的所有拖拉机；

(6)　$\frac{2}{x}$　$\frac{ab}{a+b}$　……

图 1－3

它们分别是由一些数、一些点、一些整式、一些分式、一些图形、一些物体组成的. 虽说它们是6个完全不同的问题,但是它们有一个共同的特点,就是每个问题所讨论的事物都具有某种属性.

像这样把具有某种属性的一些对象,看作一个整体,便形成一个集合. 集合里各个对象叫做这个集合的元素.

含有有限个元素的集合叫做有限集合. 上面(1),(3),(5)这三个集合都是有限集合;含有无限个元素的集合叫做无限集合,上面(2),(4),(6)这三个集合都是无限集合. 集合有时也简称集.

下面我们再举一些集合的例子:

例如,小于10的正奇数的集合是由数1,3,5,7,9组成,其中的对象1,3,5,7,9都是这个集合的元素.

太阳系的九大行星的集合由水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王星、海王星和冥王星组成,其中水星、金星、地球……都是这个集合的元素.

到线段A、B两端点距离相等的点的集合是线段AB的垂直平分线,所以这条垂直平分线即直线就是到A、B两点距离相等的点的集合.

组成集合的元素如果是数,这个集合就叫做**数集**. 例如,由全体自然数所组成的集合叫自然数集;由全体质数所组成的集合叫质数集. 组成集合的元素如果是点,这个集合就叫点集. 几何图形都可以看成是点集.

我们通常用大写拉丁字母:A、B、C、……来表示集合;用小写拉丁字母:a、b、c、……来表示集合的元素.

如果a是集合A的元素,我们也可以说:a"属于"集合A,记作

$$a \in A,$$

读作"a属于A".

如果a不是集合A的元素,我们也可以说:a"不属于"集合A,记作

$$a \notin A \text{ 或 } a \overline{\in} A,$$

读作"a不属于A".

对于一些常用的数集,我们约定用以下符号表示:

自然数集:N	整数集:Z
有理数集:Q	实数集:R

例 试说明$3, -5, \dfrac{2}{3}, \sqrt{2}, \pi$各是什么数集的元素.

解 我们知道,3是一个自然数,所以3是自然数的集合N的元素. 记作$3 \in N$. 类似地,有$-5 \in Z, \dfrac{2}{3} \in Q, \sqrt{2} \in R, \pi \in R$,当然这五个数都是实数,也可表示为"$\in R$",但按本例解中的表示更明确.

为了研究问题方便,我们还要介绍一个"空集"的概念. 不含任何元素的集合叫做**空集**,用符合$\varnothing$表示. 例如,{小于零的正整数},$\{x \mid x^2+1=0 \text{ 且 } x \in R\}$

都是空集.

二、集合的表示法

集合的表示方法,常用的有列举法、描述法、韦恩①图法.

(一) 列举法

把集合中的元素一一列举出来,写在大括号内表示集合的方法,叫做**列举法**.

例如:

(1)12 的约数的集合,可记作$\{1,2,3,4,6,,12\}$;

(2) 方程 $x^2-x-2=0$ 的解的集合,可记作$\{-1,2\}$;

(3) 方程组$\begin{cases}x+y=3,\\x-y=-1\end{cases}$的解的集合,可记作$\{(1,2)\}$.

当集合中的元素很多时,如果要列出全部元素很繁,甚至不可能,我们可以按照某种规律,列举出其中一些有代表性的元素,省略其余的元素.

例如:

(1) 比 100 小的自然数的集合,可记作

$$\{1,2,3,\cdots,99\}.$$

(2) 自然数集可记作

$$\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}.$$

(3) 全体偶数的集合可记作

$$\{\cdots-4,-2,0,2,4,\cdots\}.$$

在用列举法表示集合时,不必考虑元素之间的顺序. 例如,由三个元素 a,b,c 组成的集合,可以表示为$\{a,b,c\}$,也可以表示为$\{a,c,b\}$,$\{b,a,c\}$,$\{b,c,a\}$,等等.

应该注意 a 与$\{a\}$是不同的,a 表示一个元素;$\{a\}$表示一个集合,这个集合只有一个元素 a;a 与$\{a\}$的关系为 $a\in\{a\}$. 还应注意:0,$\{0\}$,$\varnothing$三个记号是有区别的. 0 表示数零,$\{0\}$表示仅含有一个数 0 的集合;$\varnothing$表示不含任何元素的空集. 空集不能写成$\{\varnothing\}$,$\{\varnothing\}$表示由$\varnothing$所组成的集合.

(二) 描述法

把集合中元素都具有的"某种属性",用语言或数学表达式描述出来,写在一个大括号内,以表示一个集合的方法叫**描述法**. 例如:

(1) 所有自然数组成的集合可表示为

$$\{x\mid x\in N\}.$$

(2) 不大于 10 的自然数的集合 A,可表示为

① 韦恩(John Venn,1834—1923 年),英国逻辑学家.

$$A = \{\text{不大于 10 的自然数}\},$$

或
$$A = \{x \mid x \leqslant 10, x \in N\}.$$

（也可以写成 $A = \{x : x \leqslant 10, x \in N\}$）

这里，大括号内竖线（或冒号）左边的 x 表示集合的元素，右边表示这个集合中元素 x 所应具有的属性或应必须满足的条件.

例 1 用描述法表示下列集合：

(1) $A = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$；

(2) $B = \{11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97\}$.

解 (1) $A = \{\text{不大于 20 的正偶数}\}$

或
$$A = \{x \mid x = 2n, n \leqslant 10 \ \text{且} \ n \in N\};$$

(2) $B = \{\text{10 到 100 之间的质数}\}$

或
$$B = \{x \mid 10 < x < 100, x \text{ 为质数}\}.$$

表示一个集合，用哪一种方法比较好，要根据具体情况来决定.

例 2 用适当的方法表示下列集合：

(1) 6 和 8 的所有公约数的集合 C；

(2) 比 10 小的正数的集合 D.

解 (1) 集合 C 用列举法表示，可以明显地表示出集合的全部元素，即：$C = \{1,2\}$；

(2) 比 10 小的正数，既含有比 10 小的正整数，又含有比 10 小的正小数，无法把集合的元素一一列举出来，这时用描述法表示较合适，即：

$$D = \{x \mid 0 < x < 10\}.$$

（三）韦恩图表示法

用一个平面封闭图形来象征性地表示各种集合，用含于其中的点来表示这个集合的元素，可以帮助我们直观地理解元素、集合之间的关系. 例如图 1.4 表示 $a \in A$ 而 $b \notin A$. 这种表示图叫**韦恩图**. 这种用平面封闭图形表示集合的方法叫做**韦恩图表示法**.

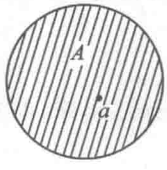


图 1－4

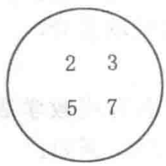


图 1－5

图 1－6

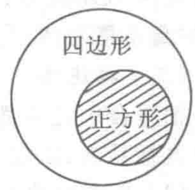


图 1－7

图 1－5 表示小于 10 的质数的集合；图 1－6 表示所有自然数组成的集合；图 1－7 表示全体正方形组成的集合是全体四边形组成的集合的一部分.

用韦恩图表示集合比较直观，也便于看出集合之间的关系. 我们在低幼读物

中可以看到，几只猫、几个生梨、几本书 …… 分别用一个圆圈圈起来，这些图实际上是用来表示几只猫组成的集合、几个生梨组成的集合、几本书组成的集合.

关于集合的概念，要注意以下几点：

(1) 对于一个给定的集合，它的元素是确定的. 这就是说，任何一个对象或者是这个集合的元素，或者不是它的元素，二者必居其一.

例如，给定所有自然数组成的集合 N，我们便可以判断3属于 N，而 -5 不属于 N.

又如，“相当大的数的全体”、“美丽的图形”等，由于所指的对象是不确定的，因而它们不能形成集合.

(2) 对于一个给定的集合，集合中的元素是互异的. 这就是说，集合中的任何两个元素都是不同的对象；相同的对象归入任何一个集合时，只能算作这个集合的一个元素. 因此，集合中的元素是没有重复现象的.

例如，由数3,5,6,4,3,5组成的集合，应写成由数3,4,5,6组成的集合即可.

(3) 对于一个给定的集合，集合中的元素是无序的，也就是说我们不考虑元素的顺序. 例如集合 $\{1,3,5\}$ 和集合 $\{3,5,1\}$ 是同一个集合.

练习题　1－1

1. 举出三个集合的实例.

2. (口答) 说出下面集合里的元素：

(1) {大于3小于11的奇数}；

(2) {12的正约数}；

(3) {平方等于1的数}；

(4) {15以内的质数}.

3. (口答) 说出下面集合里的元素：

(1) {一年中有31天的月份}；

(2) {京广铁路起始和终点的火车站}；

(3) {中国古代四大发明}；

(4) {世界各大洋}.

4. 下列各题中，分别指出了一个集合的所有元素，用适当的方法把这些集合表示出来：

(1) 60的所有质因数；

(2) 方程 $x^2-7x+12=0$ 的解；

(3) 长江、黄河、珠江、黑龙江；

(4) 一年四个季节即春、夏、秋、冬.

5. 在下表的空格处填上符号 $\in$ 或 $\notin$：

数集 \ 实数	1	0	-3	0.5	$\sqrt{2}$
N					
Z					
Q					
R					

6. 用列举法表示下列各题中的事物所组成的集合：

(1) 18 和 24 的公约数；

(2) 比 4 大 1 的数.

7. 用描述法表示下列集合：

(1) $A=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$；

(2) 全体大于 3 的偶数组成的集合 B；

(3) 全体小于 4 的正数组成的集合 C；

(4) 集合 $A=\{6,8,10,12,14,16,18\}$.

§1－2　集合的包含与相等

一、两个集合间的包含关系

对于两个集合 A 与 B，如果 A 中任何一个元素都是 B 的元素，我们就说集合 B 包含集合 A（或说 A 含于 B 内）. 这时，我们把集合 A 叫做集合 B 的**子集**. 记作

$$A \subseteq B \text{ （或 } B \supseteq A\text{）}.$$

读作"A 包含于 B"或"B 包含 A".

集合 A、B 间的这种关系叫做包含关系. 例如，自然数集 N 与整数集 Z 之间就有 $N \subseteq Z$ 的包含关系.

对于任何一个集合 A，因为它的每一个元素都属于集合 A 本身，所以，任何一个集合都可以看成它本身的一个子集，记作

$$A \subseteq A.$$

如果集合 A 是集合 B 的子集，并且在集合 B 中至少有一个元素不属于集合 A，那末集合 A 就叫做集合 B 的**真子集**. 记作

$$A \subset B \text{ （或 } B \supset A\text{）}.$$

例如，全体中国人组成一个集合 A，全体亚洲人组成一个集合 B. 如用韦恩图表示这两个集合的关系（图 1－8），可以看出 A 是 B 的真子集.

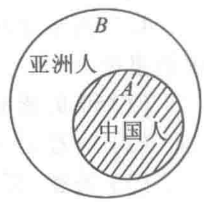


图 1－8

我们规定，空集是任何非空集合的真子集，也就是对于任何一个非空集合 A，都有 $\varnothing \subset A$.

例 1　说明下列各组中两个集合间的关系：

(1) {正方形}，{长方形}；

(2) $A = \{6$ 的约数$\}$，$B = \{1,2,3,6\}$；

(3) $C = \{$三中十班的全体同学$\}$，$D = \{$三中十班的女同学$\}$；

(4) $E = \{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\}$，$F = \{x \mid 1 < x < 4\}$.

解　(1) 因为正方形是长方形的特例，即{正方形}的元素一定是{长方形}的元素，所以{正方形}是{长方形}的子集.

又因为长方形不一定是正方形，即{长方形}中元素有不属于{正方形}的，所以{正方形}是{长方形}的真子集. 即{正方形} $\subset$ {长方形}；

(2) 集合 A 中每一个元素都是集合 B 的元素，所以集合 A 是集合 B 的子集. 同时集合 B 的每一个元素也都是集合 A 的元素，所以集合 B 也是集合 A 的子集.

(3) 集合 D 中每一个元素都是集合 C 的元素，但集合 C 中的元素却有不属于集合 D 的，所以，集合 D 是集合 C 的真子集.

(4) 因为集合 E 中每一个元素都是集合 F 的元素，但集合 F 中的元素却有不属于集合 E 的. 所以 $E \subset F$.

在数轴上表示这一包含关系就更明显了(图 1－9).

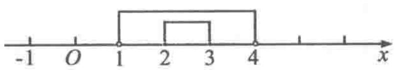


图 1－9

例 2　$\{a,b\}$ 的子集有哪几个？真子集有哪几个？

解　$\{a,b\}$ 的子集有：$\varnothing$、$\{a\}$、$\{b\}$ 和 $\{a,b\}$；真子集有：$\varnothing$、$\{a\}$ 和 $\{b\}$.

二、两个集合间的相等关系

对于两个集合 A、B，如果 $A \subseteq B$，同时 $B \subseteq A$，我们就说集合 A 和集合 B **相等**. 记作 $A = B$，读作“A 等于 B”.

显然，如果 $A = B$，A、B 两个集合的元素就是完全相同的. 例如，$A = \{x \mid x^2 + 3x + 2 = 0\}$，$B = \{-1, -2\}$，则 $A = B$.

例 1　已知 $A = \{$既是长方形又是菱形的四边形$\}$，

$B = \{$正方形$\}$.

求证：$A = B$.

证明　先证 $A \subseteq B$，就是要证 A 中元素都是 B 的元素. 因为“既是长方形又是菱形的四边形”具有与正方形相同的特点——四条边相等、四个角都是直角. 所以，A 中的元素都是 B 的元素. 所以 $A \subseteq B$；

再证 $B \subseteq A$,就是 B 中元素也都是 A 的元素. 因为正方形同时具有长方形和菱形的特点,所以 B 中元素也都是 A 的元素. 所以 $B \subseteq A$.

由集合相等的条件可知 $A = B$.

集合间的包含与相等关系,都具有传递性,就是

如果 $A \subset B, B \subset C$,那末 $A \subset C$;

如果 $A = B, B = C$,那末 $A = C$.

例如{正方形} ⊂ {长方形},而{长方形} ⊂ {平行四边形},

所以,{正方形} ⊂ {平行四边形};

又如 $\{x \mid 32x - 43 = 26x + 23\} = \{x \mid 6x = 66\}$,

而 $\{x \mid 6x = 66\} = \{11\}$,

所以 $\{x \mid 32x - 43 = 26x + 23\} = \{11\}$.

例 2 写出方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的解集.

解 方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的解集是

$$\{x \mid x^2 - 2x - 3 = 0\} = \{x \mid x = -1, x = 3\}$$
$$= \{-1, 3\}.$$

练习题 1-2

1. 在下面各题中的______处填上适当的符号($\in$、$\notin$、$=$、$\supset$、$\subset$):

(1) a ______ $\{a\}$;

(2) a ______ $\{a,b,c\}$;

(3) d ______ $\{a,b,c\}$;

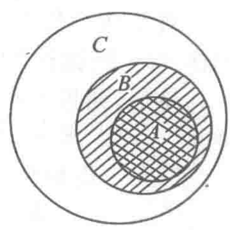
(4) $\{a,b\}$ ______ $\{b,a\}$;

(5) $\{2,4,6,8\}$ ______ $\{6,8\}$;

(6) $\varnothing$ ______ $\{0\}$.

2. 图中三个圆分别表示三个集合 A、B、C,这三个集合有什么关系?试用符号表示.

3. 写出{11、12、13}的所有子集,再指出它的真子集.



第 2 题图

4. 下列各组集合是否相等?

(1) {1,3,5,15} 和{15 的约数};

(2) $A = \{x \mid 15 < x < 20, x \in R\}$ 和 $B = \{16,17,18,19\}$.

5. 写出方程 $3x^2 - 6x + 2 = 0$ 的解集.

6. 指出下列两个集合的关系:

(1) A = {等腰三角形}, B = {等边三角形};

(2) A = {正偶数}, Z = {整数}.

7. 在下列各题中,指出关系式 $A \subseteq B, A \supseteq B, A = B$ 哪些成立:

(1) $A = \{1,3,5,7\}, B = \{3,5,7\}$

(2) $A = \{1,2,4,8\}, B = \{x \mid x$ 是 8 的约数$\}$.

8. 判断下列各式是否成立,并说明理由:

(1) $2 \subseteq \{x \mid x \leqslant 10\}$;

(2) $2 \in \{x \mid x \leqslant 10\}$;

(3) $\{2\} \subset \{x \mid x \leqslant 10\}$.

§1－3　交　　集

我们来看下面两个集合

$$A = \{1,2,3,6\}, B = \{1,2,5,10\}.$$

容易看出,集合$\{1,2\}$是由同时属于 A 和 B 的所有元素组成的.像这样,对于给定的集合 A, B,由于同时属于 A 与 B 的所有的元素组成的集合,叫做集合 A 与 B 的**交集**,记作 $A \cap B$,读作"A 交 B".

图 1－10 的阴影部分,表示集合 A 与 B 的交集 $A \cap B$.

由交集的定义容易推出,对于任何集合 A, B,

$A \cap A = A, A \cap \varnothing = \varnothing, A \cap B = B \cap A$.

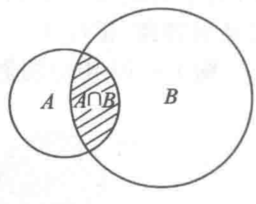


图 1－10

例 1　已知 $A = \{2,4,6,8,10,12\}, B = \{3,6,9,12\}$,求 $A \cap B$,并用韦恩图表示出来.

解　$A \cap B = \{2,4,6,8,10,12\} \cap \{3,6,9,12\} = \{6,12\}$.

用韦恩图表示,如图 1－11 所示.

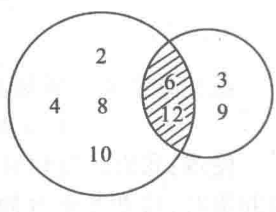


图 1－11

例 2　设 $A = \{x \mid x$ 为 12 的约数$\}, B = \{x \mid x$ 为 15 的约数$\}$,求 $A \cap B$.

解　$A = \{x \mid x$ 为 12 的约数$\}$

$= \{1,2,3,4,6,12\}$,

$B = \{x \mid x$ 为 15 的约数$\}$

$= \{1,3,5,15\}$,

$A \cap B = \{1,2,3,4,6,12\} \cap \{1,3,5,15\} = \{1,3\}$.

注意:$A \cap B$ 中的元素就是 12 与 15 的公约数.

例 3　设 $A = \{$矩形$\}, B = \{$菱形$\}, C = \{$三角形$\}$

求 $A \cap B$ 和 $A \cap C$.

解　$A \cap B = \{$矩形$\} \cap \{$菱形$\} = \{$既是矩形又是菱形$\} = \{$正方形$\}$

$A \cap C = \{$矩形$\} \cap \{$三角形$\} = \{$既是矩形又是三角形$\} = \varnothing$

例 4 设 $A=\{x \mid x>-2\}, B=\{x \mid x<3\}$，求 $A \cap B$.

解 $A \cap B=\{x \mid x>-2\} \cap\{x \mid x<3\}$

$=\{x \mid x>-2$ 且 $x<3\}$

$=\{x \mid-2<x<3\}$.

在数轴上这个交集表示为，如图 1－12 所示：

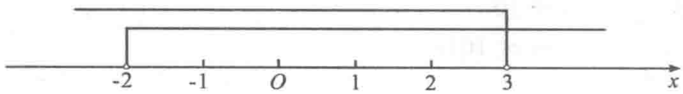


图 1－12

§1－4 并 集

我们看集合

$$A=\{1,2,-2\}, B=\{1,-1,-2\}.$$

容易看出，集合$\{1,-1,2,-2\}$是由所有属于 A 或属于 B 的元素组成的. 像这样，对于给定的集合 A, B，由所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合，叫做集合 A 与 B 的**并集**，记作 $A \cup B$，读作“A 并 B”.

图 1－13 中的阴影部分，表示集合 A, B 的并集 $A \cup B$.

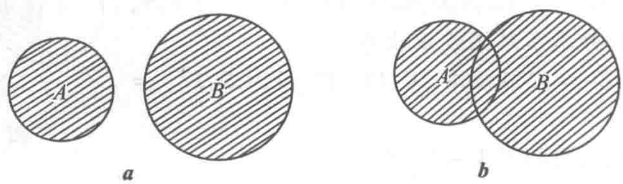


图 1－13

由并集定义容易知道，对于任何集合 A, B，有

$$A \cup A=A, A \cup \varnothing=A, A \cup B=B \cup A.$$

注意：我们已经知道，集合中的元素是没有重复现象的. 因此，在求两个集合的并集时，这两个集合的公共元素在并集中只能出现一次. 例如，$A=\{3,5,6,8\}$. $B=\{4,5,6,8\}$ 则 $A \cup B=\{3,4,5,6,8\}$，而不是$\{3,5,6,8,4,5,6,8\}$.

例 1 已知 $A=\{2,4,6,8,10,12\}, B=\{3,6,9,12\}$，求 $A \cup B$，并用韦恩图表示出来.

解 $A \cup B=\{2,4,6,8,10,12\} \cup\{3,6,9,12\}$

$=\{2,3,4,6,8,9,10,12\}$.

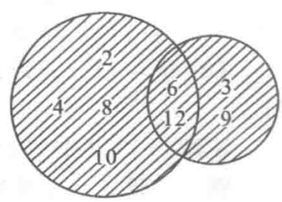


图 1－14

用韦恩图表示如图 1－14 所示.

例 2 已知 Q 为有理数集，Z 为整数集，求 $Q \cup Z, Q \cap Z$.