·河南省高等院校公共数学统编教材·

高等数学简明教程

郭运瑞　汪　叶　主编

$(\sin x)' = \cos x$

$d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$

$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$

河南大学出版社
HENAN UNIVERSITY PRESS

河南省高等院校公共数学统编教材

GAODENG SHUXUE JIANMING JIAOCHENG

高等数学简明教程

主　编　郭运瑞　汪　叶
副主编　王军涛　王　强　李晓慧

河南大学出版社
HENAN UNIVERSITY PRESS
·郑州·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学简明教程/郭运瑞,汪叶主编. —郑州:河南大学出版社,2015.5

ISBN 978-7-5649-1972-6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①郭…②汪… Ⅲ.①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 104740 号

责任编辑 张雪彩
责任校对 李 蕾
封面设计 郭 灿

出 版	河南大学出版社		
	地址:郑州市郑东新区商务外环中华大厦 2401 号		邮编:450046
	电话:0371-86059701(营销部)		网址:www.hupress.com
排 版	郑州市今日文教印制有限公司		
印 刷	郑州市富田印务有限公司		
版 次	2015 年 8 月第 1 版	**印 次**	2015 年 8 月第 1 次印刷
开 本	787mm×1092mm 1/16	**印 张**	19.25
字 数	456 千字	**定 价**	36.00 元

前　言

随着我国高等教育“大众化”阶段的到来，尤其是2004年高中施行新课改以来，高等教育在培养目标和教学要求等方面已呈现出多层次、多元化的新情况，高中数学教学改革对大学数学教学也产生了一定的影响，地方普通高校招收的生源特点和学生层次发生了很大的变化，现阶段大学数学教育正面临着生源录取分数下降、教学课时减少、教学内容增加、对数学实践能力的培养要求提高等一系列似乎矛盾的问题. 针对这些问题，30年来一直奋斗在教学改革第一线的河南省第五届教学名师奖获得者、河南省精品资源共享课程和河南省精品视频公开课程的主持人郭运瑞教授，将教学改革研究成果“大学数学分层次教学的研究与改革实践”和“高中新课改后大学数学教学改革的研究与实践”运用到这本《高等数学简明教程》教材中. 该教材定位准确，选材得当，体系新颖，在深度和广度上完全符合地方一般普通高校的本科专业对数学基础课程的基本要求，而且该教材力求突出以下主要特点：

1. 在教学的层次安排上采取夹叙夹议的形式，将初等数学的内容融汇在高等数学的教学之中，使其能更好地与中学数学相衔接，更有利于教师针对教学对象结合本课程教学大纲和教学基本要求因材施教、因人施教.

2. 精选内容，科学编排，使教材深入浅出、通俗易懂，并适当反映近年来大学数学在教学和科研实践中的最新成果.

3. 淡化某些繁杂形式，摆脱纯数学圈子的束缚，注重核心内容，但简而不略；采用直观形象、逐步介绍各种方法和技巧的方式；增加了经济类学科应用中的有关内容，增强了教材的适用性.

4. 注意理论联系实际，选材适当，体系新颖，充分考虑了地方一般高等院校对高等数学课程分层次教学的需要.

本教材共分9章，内容包括：函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、多元函数的微分法、重积分、微分方程、无穷级数. 各章后面配有习题，书末附有部分习题答案及几种常见的曲线、积分表. 各章后面的数学欣赏属于数学文化的内容，不但可以激发和提升读者对数学的学习热情和兴趣，而且可以让读者在学习之余感知数学的美丽和神奇，提升数学素养和品位.

本书由河南科技学院郭运瑞、河南大学汪叶担任主编，由河南科技学院王军涛、北京联合大学王强和河南大学李晓慧担任副主编，具体编写分工如下：第1章由郭运瑞编写，第2章由汪叶编写，第4章和第5章由王军涛编写，第3章由王强编写，第6章和第7章

由李晓慧编写，第 8 章和附录由郑州师范学院赵远编写，第 9 章和习题答案由郑州财经学院张二丽编写. 全书最后由郭运瑞统稿.

本书可作为地方一般普通高校对高等数学课程要求较低、学时较少的本科专业教材和参考书.

由于编者水平所限，书中难免有错误和不妥之处，敬请同行专家和读者不吝指教.

编　者

2015 年 5 月

目 录

第 1 章　函数与极限

数学是研究现实世界中的空间形式和数量关系的科学. 初等数学的研究对象基本上是不变的量,而高等数学则是以变量为研究对象的一门学科. 所谓函数关系就是变量之间的依赖关系,而极限方法则是研究变量的一种基本方法. 本章将系统地介绍变量、函数、极限和连续等基本概念以及它们的性质.

§1.1　函数的概念

一、常量与变量

当我们研究或观察某种自然现象或技术过程时,常常会遇到各种不同的量. 其中有些量在整个现象或过程中,始终保持一定的数值而不起变化,这种量叫作**常量**;而另外有些量可取各种不同的数值,即有变化,这种量叫作**变量**.

例如,物体做自由落体运动时,物体的质量保持不变,是常量;但物体下落的速度和距离都在变化,是变量.

需要注意的是,一个量是常量或变量,都是指在某一确定的现象或过程中来说的,同一个量在不同情况下可能是不同的量.

例如,对圆的面积 S 来说,若圆的半径给定,则 S 就是定值,是常量;若圆的半径可以取各种不同的值,即取变量时,则 S 又是变量了.

通常用字母 a,b,c 等来表示常量,用字母 x,y,z 等表示变量.

二、区间与邻域

区间是本书最常用的一类数集. 设 a 和 b 都是实数,且 $a<b$,则称数集 $\{x|a<x<b\}$ 为**开区间**,记作 (a,b);数集 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**,记作 $[a,b]$;数集 $\{x|a\leqslant x<b\}$ 和 $\{x|a<x\leqslant b\}$ 都称为**半开区间或半闭区间**,分别记作 $[a,b)$ 和 $(a,b]$. a 和 b 称为上述区间的端点.

以上这些区间都称为**有限区间**,数 $b-a$ 称为这些**区间的长度**.

根据实数集与数轴上点的一一对应关系,这些有限区间在数轴上的几何表示为有限

线段.

除以上谈到的有限区间外,还有无限区间,引进符号$+\infty$(读作正无穷大)及$-\infty$(读作负无穷大),则可类似地表示无限区间.

例如,满足关系式$x\geqslant a$的全体实数,用区间$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$表示;满足关系式$x<a$的全体实数,用区间$(-\infty,a)=\{x|x<a\}$表示.读者可类似地定义区间$(a,+\infty)$和$(-\infty,a]$.全体实数的集合也可写成区间形式,即

$$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}.$$

有了区间的概念,我们进一步介绍邻域的概念.设a与δ是两个实数,且$\delta>0$,则称数集$\{x||x-a|<\delta\}$为点a的δ **邻域**,记作$U(a,\delta)$.点a叫作该**邻域的中心**,δ叫作该**邻域的半径**.

因为$|x-a|<\delta$相当于$-\delta<x-a<\delta$,即$a-\delta<x<a+\delta$,所以邻域$U(a,\delta)$也就是开区间$(a-\delta,a+\delta)$,该区间以点a为中心,长度为2δ(见图1.1).有时用到的邻域需要把邻域中心去掉,点a的邻域去掉中心a后,称为点a的**去心**δ **邻域**,记作$U(\hat{a},\delta)$,即

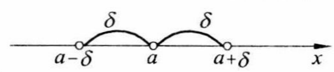

图 1.1

$$U(\hat{a},\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}.$$

三、函数的概念

先考虑几个例子.

例 1 自由落体运动的路程s与时间t由

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

联系着,t的值确定了,s的值就随之确定.设落体着地的时刻为T,则当t取0到T之间的任何值时,由上式就可以确定s的相应值.

例 2 在气象观测站百叶箱内的气温自动记录仪把某一天的气温变化描绘在记录纸上,如图1.2所示的曲线.根据这个图,我们就能知道这一天内时间t从0点到24点气温T的变化情形.

上面的例子都反映了在同一过程中有两个有联系的起着变化的量,当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时,按照一定的法则,另一个变量就有确定的值与之对应,这两个变量之间的对应关系就是函数概念的实质.

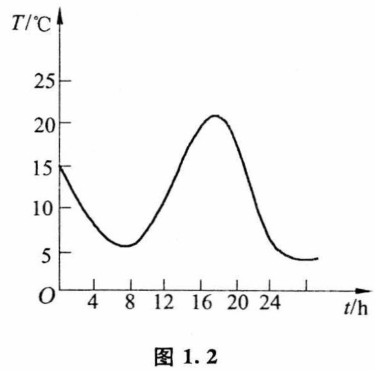

图 1.2

定义 1.1 给定两个非空实数集D,M,如果对于每个数$x\in D$,按照一定的法则f总有唯一的$y\in M$与它对应,那么称对应法则f是确定在数集D上的函数,简称y是x的函数,记作$y=f(x)$.其中数集D称为函数的定义域,x称为函数的自变量,y称为函数的因变量.

当x取数值$x_0\in D$时,与x_0对应的y的数值称为函数$y=f(x)$在点x_0的**函数值**,

记作 $f(x_0)$. 全体函数值的集合

$$f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}\subset M$$

称为**函数的值域**.

由上述定义可知,决定一个函数必须知道定义域 D,对应法则 f 和函数值所在集合 M. 函数值是由 $x\in D$ 通过 f 而唯一确定的实数,通常总是把 M 取为全体实数的集合 $\mathbf{R}$,于是定义域 D 和对应法则 f 就成为确定函数的两个要素,从而记号

$$y=f(x),\quad x\in D$$

也就表达了一个实值函数. 如果一个函数的对应法则可以用数学式子来表达,那么其定义域就是使这一式子有意义的一切实数值. 例如,式子 $y=\sqrt{\lg x}$ 所表示的函数,其定义域是 $D=\{x\mid x\geqslant 1\}$.

关于函数概念,有以下两点值得注意:

(1) 两个函数相同,是指它们的定义域和对应法则分别相同.

(2) 在函数的定义中,对每一个 x,只能有唯一的一个 y 与它对应,这种函数称为**单值函数**. 若允许同一 x 值可以和不止一个 y 值相对应,则称它为**多值函数**. 以后没有特别说明时,函数都是指单值函数.

四、函数的表示法

表示函数的方法主要有以下三种.

1. 解析法

当函数的对应法则借助于数学式子给出时,称这种表示函数的方法为**解析法**.

例如,上述例 1 以及

(1) $y=x^2-2x+3$;

(2) $y=\ln x+x$

都是用解析法表示的函数.

值得注意的是,一个函数可以在其定义域的不同部分用不同的解析式来表示. 例如,

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in(0,+\infty);\\ \dfrac{1}{2}, & x=0;\\ -x+1, & x\in(-\infty,0).\end{cases}$$

这种形式的函数,通常称为**分段函数**.

2. 列表法

若函数可用一张含有自变量 x 的值与函数的对应值的表格来表示,则称为**列表法**. 通常所用的三角函数表、对数表等,都是用列表法表示的函数.

3. 图像法

如例 2 那样,气温自动记录仪把一天 24 小时的气温变化在坐标纸上描绘出来,则对于一天内的每一时刻 t,都能从图上找到相应的气温 T 的数值. 这种由图像给出函数对应法则的方法称为**图像法**.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，对于任意取定的 $x\in D$，对应的函数值为 $y=f(x)$. 于是函数可看作是一个有序数对的集合：

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}.$$

该集合的每一元素在坐标平面上表示一个点，这个点集 C 称为**函数 $y=f(x)$ 的图形**.

§ 1.2 函数的几种特性

一、函数的有界性

如果存在正的常数 M，使得对一切 $x\in X$，函数 $f(x)$ 满足不等式

$$|f(x)|\leqslant M,$$

那么称**函数 $f(x)$ 在 X 上有界**；如果这样的 M 不存在，即对于任何正数 M，总存在 $x_1\in X$，使得 $|f(x_1)|>M$，那么就称**函数 $f(x)$ 在 X 上无界**.

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为无论 x 取任何实数，$|\sin x|\leqslant 1$ 都成立；函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内是无界的，因为不存在这样的正数 M，使得 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 对于 $(0,1)$ 内的一切 x 都成立.

函数的有界性是一个局部性质. 如果函数在区间 (a,b) 内有界，那么在此区间内函数的图形必落在平行于 x 轴的两直线 $y=\pm M$ 之间.

二、函数的单调性

若在区间 (a,b) 内，对于任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是**单调增加**的（见图 1.3(a)）；若对于任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是**单调减少**的（见图 1.3(b)）. 单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

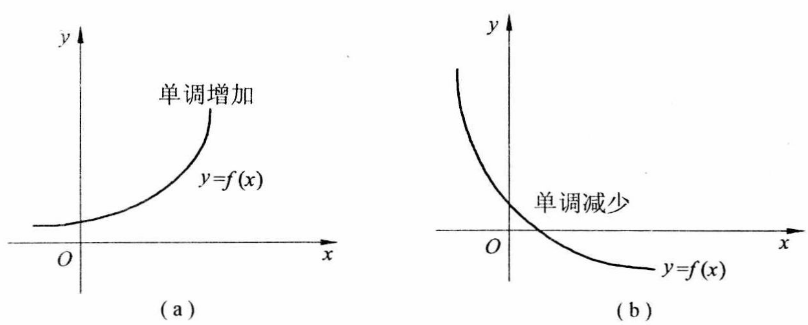

图 1.3

函数的单调性也是一个局部性质.

例如,函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的,在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的,在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调函数.

又如,函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调增加的.

三、函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$,则必有 $-x\in D$). 如果对于任意 $x\in D$,有 $f(-x)=f(x)$ 恒成立,那么称 $f(x)$ 为**偶函数**(见图 1.4);如果对于任意 $x\in D$,有 $f(-x)=-f(x)$ 恒成立,那么称 $f(x)$ 为**奇函数**(见图 1.5).

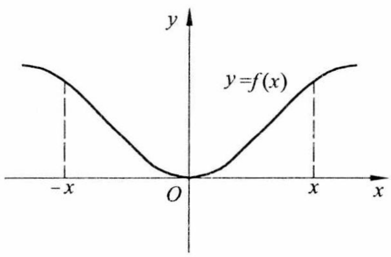

图 1.4

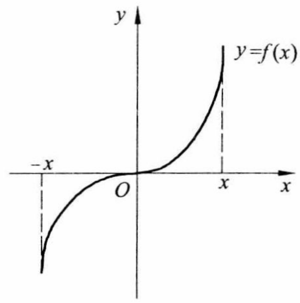

图 1.5

可以证明:偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

例如,函数 $y=\sin x$ 是奇函数,函数 $y=\cos x$ 是偶函数,函数 $y=\sin x+\cos x$ 既非奇函数也非偶函数.

四、函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在一个不为零的常数 l,使得对于任意 $x\in D$ 有 $(x+l)\in D$,且

$$f(x+l)=f(x)$$

恒成立,那么称 $f(x)$ 为**周期函数**,l 称为 $f(x)$ 的**周期**. 通常我们所说的周期函数的周期是指最小正周期.

例如,函数 $y=\sin x$ 是以 2π 为周期的函数.

§1.3 初等函数

一、反函数

自变量与因变量的关系往往是相对的.我们不仅要研究变量 y 随变量 x 的变化而变化的状况,有时也要研究变量 x 随变量 y 的变化而变化的状况.

例如,由静止状态自由下落的物体,其运动由函数

$$s=\frac{1}{2}gt^2,\quad t\in[0,T] \tag{1-1}$$

表示,知道 t 就可算出 s.但是,若要由物体下落的距离 s 来确定所需的时间 t,则由式(1-1)可解出 t 表示为 s 的函数:

$$t=\sqrt{\frac{2s}{g}},\quad s\in[0,H], \tag{1-2}$$

其中 H 是物体在开始下落时与地面的距离.由式(1-1)与式(1-2)这对函数,我们给出反函数的概念.

设已知函数

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其值域为 $f(D)$.若对于每一个 $y\in f(D)$,有唯一的 $x\in D$ 使得

$$f(x)=y$$

与之相对应,则便可在 $f(D)$上确定一个函数,这个函数称为 $y=f(x)$的**反函数**,记作

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in f(D).$$

而把 $y=f(x)$叫作**直接函数**.

习惯上,我们用 x 表示自变量,用 y 表示函数,因此往往把 $y=f(x)$的反函数 $x=f^{-1}(y)$记为 $y=f^{-1}(x)$.应当注意,函数 $y=f^{-1}(x)$,$x\in f(D)$与 $x=f^{-1}(y)$,$y\in f(D)$是同一个函数,因为在这里对应法则 f^{-1}和定义域 $f(D)$是分别相同的.

例 1 求函数 $f(x)=2x-1$ 的反函数.

解 由 $y=2x-1$ 解得 $x=\frac{1}{2}(y+1)$,因此所求反函数为 $y=\frac{1}{2}(x+1)$.

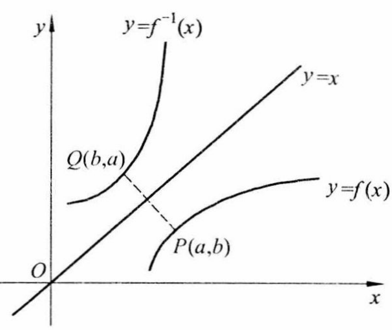

图 1.6

可以证明:单值单调函数 $y=f(x)$的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形是关于直线 $y=x$ 对称的(见图 1.6).

例如,指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$与其反函数对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$,它们的图形对称于直线 $y=x$.

二、复合函数

在同一变化过程中，两个变量的联系有时不是直接的，而是通过另一个变量联系起来的. 例如，y 是 u 的函数 $y=\sin u$，而 u 是 x 的函数 $u=e^x$. 这样，通过中间变量 u 就使 y 与 x 之间建立了函数关系 $y=\sin(e^x)$，这种形式的函数称为复合函数.

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 U，而函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 X，值域为 U^*，并且 $U\cap U^*$ 非空，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 是由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，x 为**自变量**，y 为**因变量**，u 称为**中间变量**.

值得注意的是，不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的.

例如，$y=\arcsin u$ 与 $u=x^2+2$ 就不能复合成一个复合函数. 因为对于 $u=x^2+2$ 的定义域$(-\infty,+\infty)$内任何 x 值所对应的 u 值，都不能使 $y=\arcsin u$ 有意义.

所以，定义中 $U\cap U^*$ 非空这一假设必不可少.

复合函数也可以由两个以上的函数多次复合而成.

例 2 设 $y=u^3$，$u=\sin v$，$v=2x+1$，则得复合函数 $y=\sin^3(2x+1)$，这里 u 与 v 都是中间变量.

利用复合函数的定义，我们也可以将一个较复杂的函数看成是由几个简单函数复合而成的.

例 3 函数 $y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$ 可以看成是由简单函数 $y=\sqrt{u}$，$u=\cot v$，$v=\frac{x}{2}$ 复合而成的.

三、初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**. 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成，并可用一个式子表示的函数，称为**初等函数**.

例如，

$$y=\sin^2 x,\quad y=x\ln(1+x),\quad y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$$

都是初等函数.

§1.4 经济学中的常用函数

经济学中用到的函数很多，这里我们只介绍几种基本类型的函数.

一、需求函数

设 P 为某产品的单价,Q 为该产品的市场需求量. 大家知道,在正常情况下,价格越低需求量越大,价格越高需求量越小. 当然在特殊情况下,如通货膨胀引起抢购时,就不服从这一规律. 我们这里只考虑价格的变化对需求量的影响,在这种情况下,常用函数来模拟 Q 与 P 的关系,常用的函数有

(1) 线性函数 $Q=b-aP(a,b>0)$;

(2) 反比例函数 $Q=\dfrac{a}{P+c}-b(a,b>0)$;

(3) 幂函数 $Q=\dfrac{K}{P^a}(K,a>0)$;

(4) 指数函数 $Q=a\mathrm{e}^{-bP}(a,b>0)$;

(5) 根式函数 $Q=\sqrt{\dfrac{a-P}{b}}(a,b>0)$;

(6) 抛物函数 $Q=\dfrac{a-P^2}{b}(a,b>0)$.

在实际经济工作中,经常根据有限个点处的函数值,即有限个价格下的需求量,通过计算或观察,找出比较贴切的函数类型来拟合. 尽管上述各函数类型不同,但它们有一个共同的特点就是都为单调减函数.

二、供给函数

供给函数是站在产品生产厂家的立场上,在其他情况不变的条件下,只考虑销售价格 P 与供给量 Q 之间的关系. 一般情况下,价格越低,厂家愿意供给的数量越少;价格越高,厂家愿意供给的数量越多. 常用于模拟供给现象的函数有

(1) 线性函数 $Q=aP-b(a,b>0)$;

(2) 幂函数 $Q=KP^a(K,a>0)$;

(3) 指数函数 $Q=a\mathrm{e}^{bP}(a,b>0)$.

这些函数的共同特点是它们都为单调增函数.

需求量、供给量与销售价格之间有密切联系. 当价格偏低时,市场需求量大,而厂方不愿提供那么多产品,就会出现供不应求的现象,这种现象的出现,依市场规律必将使价格上升;当价格上升到一定程度时,厂方愿提供的供给量大,但购买力变小,出现供过于求的现象,结果将导致价格下降. 经济学中,称需求量与供给量相等时的价格为**均衡价格**. 几何上,均衡价格为需求函数与供给函数所表示的曲线交点处的 P 值. 如图 1.7 所示,图中 S 为供给曲线,D 为需求曲线,交点 E 处的横坐标值即为均衡价格.

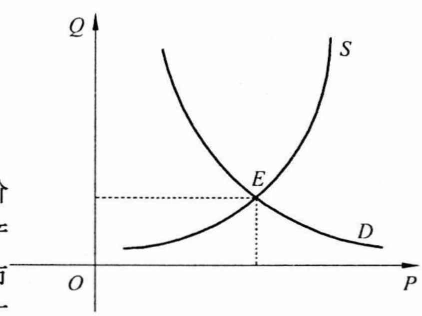

图 1.7

三、生产函数

企业的最大生产能力 Q 受多种因素的影响，但最主要与劳动力 K 和固定资产 L 有关，常用的模拟函数有

(1) 线性函数 $Q=a+bK+cL(a,b,c\geqslant 0)$；

(2) Cobb-Douglus 函数 $Q=aK^{\alpha}L^{\beta}(a,\alpha,\beta\geqslant 0)$.

这两个函数实际上是二元函数，今后还要专门讨论.

四、成本函数

从生产厂家的角度出发，生产一批数量为 Q 的产品所需要投入的价格称为**总成本**，其中包括不变成本 C_1 和可变成本 $C_2(Q)$ 两部分. 不变成本主要指厂房、设备等，可变成本指劳动力、原料等. 所以，总成本函数可写作

$$C(Q)=C_1+C_2(Q).$$

一般情况下，总成本函数是一个单调递增函数.

实际工作中，常常要考虑单位产品的成本，称 $\overline{C}(Q)=\dfrac{C(Q)}{Q}$ 为**平均成本**，它反映了单位产品所需成本的大小.

批量生产越多，平均成本应越低，因此平均成本函数是一个单调递减函数.

五、收益函数

收益是厂家出售一定数量 Q 的产品所获得的全部收入，即

$$R(Q)=Q\cdot P(Q),$$

其中 $P(Q)$ 为需求函数，即市场上的销售价格，为前面所述需求函数的反函数.

六、利润函数

总收益与总成本之差称为利润，是销售量 Q 的函数. 利润函数可写作

$$L(Q)=R(Q)-C(Q).$$

利润是生产厂家追求的最终目标. 生产的产品太少，不能获得高利润；生产的产品太多，容易造成供过于求，价格下降，也不能获得高利润. 怎样才能获得最大利润，我们将在微分学中进行讨论.