

Digital Puzzle, Number Array and Chessboard Cover

数字谜、数阵图

与棋盘覆盖

◎ 王向东 张彩霞 著



twice; once summed over the set $T_{N_i \times N_j}$ and once summed over the set $T_{N_i \times N_j}$ in a billetter from X_i .

By (8), expression (9) is equal to

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n (1-t)^n \sum_{i \geq a_1 > a_2 > \dots > a_n \geq 0} \sum_{j \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n > 0} \dots$$

which, by Lemma 1, each term is a sum of the form $\sum_{i \geq a_1 > a_2 > \dots > a_n \geq 0} \sum_{j \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n > 0} \dots$

为了激励人们向前迈进，应使所给的数学问题具有一定的难度，但也不可难到高不可攀，因为望而生畏的难题必将挫伤人们继续前进的积极性。总之，适当难度的数学问题，应该成为人们揭示真理奥秘之征途中的路标，同时又是人们在问题获解后的喜悦感中的珍贵的纪念品。——大卫·希尔伯特

Summarizing, we have established that

$$\sum_{(v) \in T_{N_i \times N_j}} (-1)^{l(v)} (1-t)^{l(v)} W(v) = J_0^{(i,j)}(z(1-t); q, p).$$

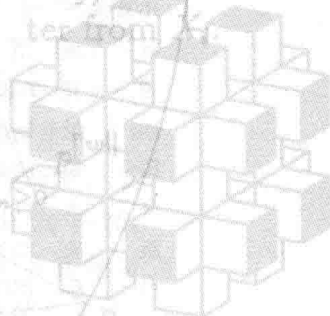
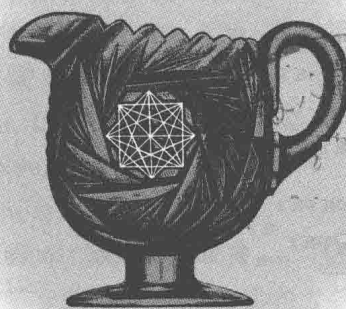


哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

Digital Puzzle, Number Array and Chessboard Cover

数字谜、数阵图 与棋盘覆盖

© 王向东 张彩霞 著



数学主要地是一项青年人的游戏。它是智力运动的练习，只有具有青春与力量才能做得满意。——诺伯特·维纳

为了激励人们向前迈进，应使所给的数学问题具有一定的难度，但也不可难到高不可攀，因为望而生畏的难题必将挫伤人们继续前进的积极性。总之，适当难度的数学问题，应该成为人们揭示真理奥秘之征途中的路标，同时又是人们在问题获解后的喜悦感中的珍贵的纪念品。——大卫·希尔伯特



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 提 要

本书向读者介绍了数学中常见的谜题并予以解答,把国内外各种智力测试、各种智力竞赛,尤其是国内外各种层次的数学竞赛中屡屡出现的填运符号、找规律填数、火柴棒游戏、数字谜、数阵图及棋盘覆盖等各种游戏或趣题进行归纳、梳理、分类。

本书适合中小学生、奥赛选手及教练员使用。

图书在版编目(CIP)数据

数字谜、数阵图与棋盘覆盖/王向东,张彩霞著. —哈尔滨:
哈尔滨工业大学出版社,2016.1

ISBN 978-7-5603-5508-5

I. ①数… II. ①王… ②张… III. ①数学—普及读物
IV. ①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 161686 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 张永文

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂

开 本 787mm×960mm 1/16 印张 27.5 字数 465 千字

版 次 2016 年 1 月第 1 版 2016 年 1 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-5508-5

定 价 58.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎ 王向东简介

王向东,教授.教育部数学专业教学指导委员会委员,广东省工业与应用数学学会副理事长,广东省数学学会理事,佛山市数学学会理事长,华南理工大学硕士生导师,美国《Mathematical Reviewer》评论员、华南师范大学硕士生导师.长期从事非线性泛函分析与非线性偏微分方程理论及应用、数学教育等领域的教学与研究工作.主持、参与国家自然科学基金、广东省自然科学基金等各种科研课题 20 余项.在《Appl. Mach. Mech》《Ann. Diff. Equ》《Sys. Sci. Math. Sci》《International Journal of Nonlinear Mechnaics》《J. Math Anal. Appl.》《Nonlinear Dynamics》《Physical Review E》《Journal of Sound and Vibration》《数学学报》《物理学报》《力学学报》《数学物理学报》《系统科学与数学》《应用数学和力学》等国内外重要学术刊物上发表论文 180 余篇,被《SCI》《EI》《ISTP》美国《数学评论》《德国数学文摘》等摘引 90 余次.在科学出版社、高等教育出版社、上海科学技术出版社等出版学术专著、译著、教材 20 余部,另外还在浙江大学出版社、北京出版社、湖南教育出版社等出版数学竞赛教材读物和其他著作 60 余种,获各种教学成果奖、科技成果奖 20 余项.

◎ 张彩霞简介

张彩霞,博士.从事智能控制与计算理论及应用研究工作,主持、参与广东省自然科学基金等各种科研课题十余项.在《Journal of Computational Information Systems》《Ann. Diff. Equ》《计算机科学》等杂志上发表论文 20 余篇.出版教材 3 部,多次获得教学成果奖、科技奖励等.

前言

数学的博大精深和它的极端重要性是不言而喻的。Proclus 说过,数学就是这样一种东西:它提醒你有无形的灵魂,它赋予它所发现的真理以生命;它唤起心神,澄清智慧;它给我们的内心思想增添光辉;它涤尽我们有生以来的蒙昧与无知。日本著名数学家米山国藏在《数学的精神、思想和方法》(四川教育出版社,1986年)一书中指出:许多在学校所学的数学知识,若毕业后进入社会没什么机会去使用的话,不到一两年,很快就忘掉了。然而,不管他们从事什么业务工作,唯有深深铭刻在灵魂深处的数学精神、数学思想方法、研究方法、推理方法和着眼点等,却随时随地发生作用,使他(她)受益终生。由此可以看出,在数学教育、数学学习的过程中,学会数学的思维方式、思想方法,从而学会用数学的眼光看问题、解决问题,必然成为学习数学最重要的目标之一。

在数学教学、数学学习的各个环节中,如何激发学生的学习兴趣、如何培养学生的数学思维品质是国内外数学教育界共同关注的课题,尤其是在中小学阶段,其重要性更为凸显。

本书的编写正是编者在这方面所做的一些尝试和探索. 我们把国内外各种智力测试、智力竞赛, 尤其是国内外各种层次的数学竞赛中屡屡出现的填运算符号、找规律填数、火柴棒游戏、数字谜(数码还原)、数阵图及棋盘覆盖等各种游戏或趣题进行归纳、梳理、分类, 精心汇编成册. 全书共分八章和三个附录: 第一章为填运算符号, 第二章为火柴棒游戏, 第三章为找规律填数, 从解决问题的思想方法上看, 前三章基本上属于同一类型的问题; 第四章、第五章为数字谜(数码还原), 第六章、第七章为数阵图; 第八章为简单的棋盘覆盖; 附录 I 介绍了与数阵图密切相关的幻方的有关初步知识, 可以说数阵图是幻方的变形或某种推广; 附录 II 介绍了我国古代著名的有关数阵图; 附录 III 介绍了英国剑桥大学思维训练专家乔·卡梅伦(Joe Cameron)的一种填数游戏, 可视为本书第三章找规律填数及第六章、第七章数阵图的某种拓展. 各章内容体现了娱乐性、游戏性, 各种问题的解决不需要繁杂的运算和高深的数学知识, 更关注诸如试验、探索、归纳、猜想、分类、倒推、转换、逻辑推理等数学思想方法, 从而提升分析问题、解决问题的能力.

值得说明的是, 本书各章内容并没有严格的逻辑次序, 均独立成章, 每章重在通过实例分析, 介绍相关的思维途径和方法. 每章后附有练习和水平测试, 并给出解答. 全书共 1 000 多个问题, 许多问题的答案并不唯一, 有的问题我们只给出了其中一种或几种解答, 也许存在其他更为巧妙的方法, 留给读者去探索.

在本书的编写过程中, 我们参考了国内外大量书籍、报刊、杂志和资料, 这里不一一注明, 谨深表感谢. 同时, 何夏明、曲军恒、金梦韩、熊彦博士为本书的编写提供了部分资料, 另外, 本书的出版得到了广东省自然科学基金(S2013010014485, 2014A030313619)、广东省高校省级重大项目(2014KZDXM063)、广东省高校特色创新项目(2014KTSCX150)、佛山科学技术学院学术出版基金、佛山科学技术学院重点学科的资助, 在此一并表示感谢. 由于时间仓促, 又局限于编者水平, 疏漏、片面在所难免, 恳请同仁及读者多提宝贵意见.

编者

2014. 8. 1 于广州

第一章 巧填运算符号 // 1

练习一 // 13

练习一答案 // 14

水平测试(一) // 17

第二章 火柴棒游戏 // 29

练习二 // 50

练习二答案 // 51

水平测试(二) // 53

第三章 找规律填数 // 67

练习三 // 96

练习三答案 // 99

水平测试(三) // 100

第四章 横式数字谜 // 125

练习四 // 134

练习四答案 // 135

水平测试(四) // 136

第五章 竖式数字谜 // 144

练习五 // 196

练习五答案 // 200

水平测试(五) // 206

第六章 数阵图(一) // 232

练习六 // 244

练习六答案 // 247

水平测试(六) // 250

第七章 数阵图(二) // 273

练习七 // 302

练习七答案 // 304

水平测试(七) // 307

第八章 棋盘覆盖问题 // 337

练习八 // 358

练习八答案 // 359

水平测试(八) // 363

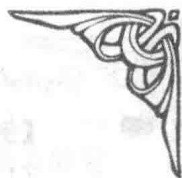
附录 I 幻方 // 377

附录 II 我国古代数阵图欣赏 // 386

附录 III JOE CAMERON 填数游戏 // 396

参考答案 // 411

参考文献 // 415



巧填运算符号

第

一

章

根据题目给定的一些数字和一定的要求,添上各种运算符号或括号,使等式成立,这类问题通常被称为填运算符号问题.这种练习不仅能加深对四则运算意义的理解,提高计算能力,而且能够培养思维的灵活性和敏捷性.

添运算符号问题,通常采用尝试探索法.主要尝试方法有两种:

1. 如果题目中的数字比较简单,可以从等式的结果入手,推想哪些算式能得到这个结果,然后拼凑出所求的式子;
2. 如果题目中的数字多,结果也较大,可以考虑先用几个数字凑出比较接近于等式结果的数,然后再进行调整,使等式成立.

通常情况下,要根据题目的特点,选择方法,有时将以上两种方法组合起来使用,更有助于问题的解决.

【例 1】 在下面算式适当的位置添上加号,使算式成立

$$8 \ 8 \ 8 \ 8 \ 8 \ 8 \ 8 \ 8 = 1\ 000$$

【思维途径】 要在八个 8 之间只添加加号,使和为 1 000,可先考虑在加数中凑出一个较接近 1 000 的数,它可以是 888,而 $888 + 88 = 976$,此时,用去了五个 8,剩下的三个 8 应凑成 $1\ 000 - 976 = 24$,这只要三个 8 相加就行了.

【解】 本题的答案是

$$888 + 88 + 8 + 8 + 8 = 1\ 000$$



【例2】 在下列算式中合适的位置添上“+，-，×”，使等式成立：

(1) $9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1 = 1\ 993$;

(2) $1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 = 1\ 993$.

【思维途径】 本题的特点是所给的数字比较多，而得数比较大，这种题目一般用凑数法来做，在本题中应注意可使用的运算符号只有“+，-，×”。

(1) 中， $654 \times 3 = 1\ 962$ ，与结果 $1\ 993$ 比较接近，而 $1\ 993 - 1\ 962 = 31$ ，所以，如果能用 $9\ 8\ 7\ 2\ 1$ 凑出 31 即可，而最后两个数合在一起是 21 ，那么只需用 $9\ 8\ 7$ 凑出 10 ，显然， $9 + 8 - 7 = 10$ ，就有： $9 + 8 - 7 + 654 \times 3 + 21 = 1\ 993$ 。

(2) 中，与 $1\ 993$ 比较接近的是 $345 \times 6 = 2\ 070$ 。它比 $1\ 993$ 大 77 ，现在，剩下的数是 $1\ 2\ 7\ 8\ 9$ ，如果把 $7, 8$ 写在一起，成为 78 ，则无论怎样，前面的 $1, 2$ 和最后的 9 都不能凑成 1 。注意到 $8 \times 9 = 72$ ，而 $7 + 8 \times 9 = 79$ ， $1 \times 2 = 2$ ， $79 - 2 = 77$ 。所以这个问题可以如下解决： $1 \times 2 + 345 \times 6 - 7 - 8 \times 9 = 1\ 993$ 。

【解】 本题的答案是：

(1) $9 + 8 - 7 + 654 \times 3 + 21 = 1\ 993$;

(2) $1 \times 2 + 345 \times 6 - 7 - 8 \times 9 = 1\ 993$ 。

例3 在下面算式合适的位置添上“+，-，×”号，使等式成立

$$3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3 = 1\ 992$$

【思维途径】 本题等号左边数字比较多，右边得数比较大，仍考虑凑数法，由于数字比较多，在凑数时，应多用去一些数，注意到 $333 \times 3 = 999$ ，所以 $333 \times 3 + 333 \times 3 = 1\ 998$ ，它比 $1\ 992$ 大 6 ，所以只要用剩下的八个 3 凑出 6 就可以了，事实上， $3 + 3 + 3 - 3 + 3 - 3 + 3 - 3 + 3 - 3 = 6$ ，由于要减去 6 ，则可以这样添

$$333 \times 3 + 333 \times 3 - 3 - 3 + 3 - 3 + 3 - 3 + 3 - 3 = 1\ 992$$

【解】 本题的一个答案是

$$333 \times 3 + 333 \times 3 - 3 - 3 + 3 - 3 + 3 - 3 + 3 - 3 = 1\ 992$$

【评注】 前面例1至例3中，它们的特点是等号左边的数比较多，而等号右边的数比较大，这种问题一般用凑数法解决比较容易。

【例4】 在下面算式合适的位置添上“+，-，×”，使等式成立

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8 = 1$$

【思维途径】 这道题的特点是等号左边的数字比较多，而等号右边的得数是最小的自然数 1 ，可以考虑在等号左边最后一个数字 8 的前面添“-”号。

这时，算式变为： $1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 - 8 = 1$ 。

只需让 $1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 = 9$ 就可以了，考虑在 7 的前面添“+”号，则算式变为



$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6+7=9$,只需让 $1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6=2$ 就可以了,同开始时的想法,在6的前面添“-”号,算式变为 $1\ 2\ 3\ 4\ 5-6=2$,这时只要 $1\ 2\ 3\ 4\ 5=8$ 即可.同样,在5前面添“+”号,则只需 $1\ 2\ 3\ 4=3$ 即可.观察发现,只要这样添: $1+2\times 3-4=3$ 就得到本题的一个解为 $1+2\times 3-4+5-6+7-8=1$.

【解】 本题的一个答案是

$$1+2\times 3-4+5-6+7-8=1$$

【评注】 一般逆推法常限于数字不太多(如果太多,推的步骤也会太多),得数也比较小的题目,如例4.在解决这类问题时,常把逆推法和凑数法结合起来使用,我们称之为综合法.所以在解决这类问题时,把逆推法和凑数法综合考虑更有助于问题的解决.

例5 在下面算式中合适的位置,只添两个加号和两个减号使等式成立

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9=100$$

【思维途径】 在本题条件中,不仅限制了所使用运算符号的种类,而且还限制了每种运算符号的个数.

由于题目中,一共可以添四个运算符号,所以应把 $1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$ 分为五个数,又考虑最后的结果是100,所以应在这五个数中凑出一个较接近100的,这个数可以是123或89.

如果有一个数是123,就要使剩下的后六个数凑出23,且把它们分为四个数,应该是两个两位数,两个一位数.观察发现,45与67相差22,8与9相差1,加起来正巧是23,所以本题的一个答案是

$$123+45-67+8-9=100$$

如果这个数是89,则它的前面一定是加号,等式变为 $1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7+89=100$,为满足要求, $1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7=11$,在中间要添一个加号和两个减号,且把它变成四个数,观察发现,无论怎样都不能满足这三个要求.

【解】 本题的一个答案是

$$123+45-67+8-9=100$$

【评注】 一般在解题时,如果没有特别说明,只要得到一个正确的解答就可以了.

在例5这类限制比较多的题目的解决过程中,要时时注意按照题目的要求去做,由于题目的要求比较高,所以解决的方法比较少.

例6 在5,10,15,20,25,30这6个数之间做或是加,或是减的运算,使计算结果等于15,请列出相应的算式.



【思维途径】 这六个数的和为 $5+10+15+20+25+30=105$, 要使这六个数的加、减运算结果为 15, 而 $105-15=90, 90 \div 2=45$. 也就是说, 将这六个数分成两组, 使一组为 60, 另一组为 45, 在可组成 60 的数前添加号, 45 的前面添减号, 就组成符合题目条件的等式.

【解】 满足条件的等式可列出五个:

$$(1) 5+10-15+20+25-30=15;$$

$$(2) 15+20+25-5-10-30=15;$$

$$(3) 5+10+15+30-20-25=15;$$

$$(4) 10+20+30-5-15-25=15;$$

$$(5) 5+25+30-10-15-20=15.$$

【评注】 事实上, 在这六个数中能组成 45 的数的方法个数, 就是满足条件的等式个数. 即

$$45 = 15 + 30 = 5 + 10 + 30 = 20 + 25 = 5 + 15 + 25 = 10 + 15 + 20$$

例 7 请在下面的 11 个数字 8 之间添上一些四则运算符号, 使计算式子能够成立

$$8 \ 8 \ 8 \ 8 \ 8 \ 8 \ 8 \ 8 \ 8 \ 8 \ 8 = 1991$$

【思维途径】 先用算式前面的一些 8 凑出一个与 1991 比较接近的数.

如 $8888 \div 8 = 1111$, 1111 比 1991 少 880, 只需用后面的 6 个 8 组成 880. 而 $888-8=880$, 只需将最后两个 8 变成 $8-8=0$, 问题就能解决.

$$\text{【解】} \quad 8888 \div 8 + 888 - 8 + 8 - 8 = 1991$$

例 8 适当选择“+,-,×,÷”中的符号, 使等式成立(不能使用括号)

$$8 \ 8 \ 8 \ 8 = 1$$

【思维途径】 等式左边给出四个相同的数, 等号右边是 1, 可根据 $a \div a = 1$ 来进行思考.

$$\text{【解法一】} \quad 8 \times 8 \div 8 \div 8 = 1$$

$$\text{【解法二】} \quad 8 - 8 + 8 \div 8 = 1$$

$$\text{【解法三】} \quad 8 \div 8 \times 8 \div 8 = 1$$

例 9 填上合适的符号, 使等式成立

$$4 \ 4 \ 4 \ 4 = 1$$

$$4 \ 4 \ 4 \ 4 = 2$$

$$4 \ 4 \ 4 \ 4 = 3$$

$$4 \ 4 \ 4 \ 4 = 4$$

【解】

$$(4+4) \div (4+4) = 1$$

$$4 \times 4 \div (4+4) = 2$$

$$(4+4+4) \div 4 = 3$$

$$(4 \times 4 + 4) \div 4 = 5$$

例 10 在下面的“□”中填上合适的运算符号,使等式成立

$$(1 \square 9 \square 9 \square 2) \times (1 \square 9 \square 9 \square 2) \times (19 \square 9 \square 2) = 1992$$

【思维途径】 由题目横式可知:三个数相乘的积等于1992,这三个数各是多少? 可把1992分解素因数: $1992 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 83$, 乘积是1992的数有多种组合,故填法有多种.

【解法一】

$$(1 \times 9 \times 9 + 2) \times (1 + 9 - 9 + 2) \times (19 - 9 - 2) =$$

$$83 \times 3 \times 8 = 1992$$

【解法二】

$$(1 \times 9 \times 9 + 2) \times (1 \times 9 \div 9 \times 2) \times (19 - 9 + 2) =$$

$$83 \times 2 \times 12 = 1992$$

例 11 你能在下面的“□”中填入“+”或“-”号,使等式成立吗? 若能,请给出例子;若不能,请说明理由

$$15 \square 13 \square 11 \square 9 \square 7 \square 5 \square 3 \square 1 = 40$$

【解】 $15 + 13 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 64$, 而 $64 - 40 = 24$, 若将 $+a$ 变为 $-a$ 则相差 $2a$, 所以, 相差的 $a = 12$, 所以只有 $-11 - 1$, $-9 - 3$, $-7 - 5$ 这3种方式.

如

$$15 + 13 - 11 + 9 + 7 + 5 + 3 - 1 = 40$$

$$15 + 13 + 11 + 9 - 7 - 5 + 3 + 1 = 40$$

$$15 + 13 + 11 - 9 + 7 + 5 - 3 + 1 = 40$$

例 12 在下面五个5之间,添上适当的运算符号“+,-,×,÷”和“()”,使得算式成立

$$5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 = 10$$

你能想出多种方法吗?

【解】 (共有七种方法)

方法一: $(5 - 5) \div 5 + 5 + 5 = 10$;

方法二: $(5 - 5) \times 5 + 5 + 5 = 10$;

方法三: $(5 \times 5 + 5 \times 5) \div 5 = 10$;

方法四: $5 \times 5 - 5 - 5 - 5 = 10$;



Digital Puzzle, Number Array and Chessboard Cover

方法五: $5 \times (5 \div 5 + 5 \div 5) = 10$;

方法六: $5 \times (5 - 5) + 5 + 5 = 10$;

方法七: $55 \div 5 - 5 \div 5 = 10$.

例 13 在下面的算式中填入“+,-,×,÷,(),[],{ }”等符号,使等式成立.

(1) $1 \ 2 \ 3 = 1$;

(2) $1 \ 2 \ 3 \ 4 = 1$;

(3) $1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 = 1$;

(4) $1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 = 1$;

(5) $1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 = 1$;

(6) $1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 = 1$;

(7) $1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 = 1$.

【解】 (1) $(1+2) \div 3 = 1$;

(2) $1 \times 2 + 3 - 4 = 1$;

(3) $[(1+2) \div 3 + 4] \div 5 = 1$;

(4) $1 \times 2 \times 3 - 4 + 5 - 6 = 1$;

(5) $\{[(1+2) \div 3 + 4] \div 5 + 6\} \div 7 = 1$;

(6) $(1 \times 2 \times 3 - 4 + 5 - 6 + 7) \div 8 = 1$;

(7) $\{[(1+2) \div 3 + 4] \div 5 + 6\} - (7+8-9) = 1$.

例 14 在下面的算式中,增添运算符号(+,-,×,÷)和括号,使等式成立(要求填出五种)

$$9 \quad 9 \quad 9 \quad 9 \quad 9 = 0$$

【思维途径】 两个9的差是0,而0乘以(除以)任何数为0,抓住这两点,问题就迎刃而解.

【解】 (1) $(9-9) \times 9 + 9 - 9 = 0$;

(2) $(9-9) \div 9 + 9 - 9 = 0$;

(3) $9 \times (9-9) + 9 - 9 = 0$;

(4) $(9+9+9) \times (9-9) = 0$;

(5) $(9 \times 9 + 9) \times (9-9) = 0$.

例 15 在下面五个5之间,添上适当的运算符号“+,-,×,÷”和“()”,使下面的等式成立

$$5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 = 10$$



【思维途径】 上述问题我们可以用硬凑的方法来做,不过这样做一般来说比较困难,而且难以找到解题的规律.下面我们一起来想办法解决这一问题.

我们从式子的左边倒推分析,最后一个5的前面如果要添运算符号的话,只可能是+, -, ×, ÷ 四种之一.

如果添的是“+”号,那么式子变成下面的式子

$$5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 + 5 = 10 \quad (1)$$

这样就要求式子中加号前面的四个5添上适当的运算符号或括号后得到5,即 $5 \ 5 \ 5 \ 5 = 5$. 再重复上面的想法,如果式子左边最后一个5的前面又添上“+”号,那么式(1)就变成下面的式子: $5 \ 5 \ 5 + 5 = 5$. 要这样的式子成立,必须要加号前面的三个5添上适当运算符号或括号后变成0,即 $5 \ 5 \ 5 = 0$. 因为任何一个数与0的乘积结果都是0,因此不难得到有如下三种填法: $(5 - 5) \times 5 = 0$; $(5 - 5) \div 5 = 0$; $5 \times (5 - 5) = 0$. 这样我们已找到了三种添法.

如果式子左边倒数第二个5前添的是“-”号,即

$$5 \quad 5 \quad 5 - 5 = 5 \quad (2)$$

这要求式(2)的前面三个5之间添上适当运算符号或括号,使它们的运算结果是10,即 $5 \quad 5 \quad 5 = 10$. 经过试算可以发现,无论添上什么运算符号或括号,这个等式都不可能成立. 也就是说,这个等式没有解.

同样,如果式子左边倒数第二个5的前面添的是“×”或“÷”,也都没有解.

以上我们分析的是式子左边最后一个5的前面添的是“+”的一些情况,有下面三种添法

$$(5 - 5) \times 5 + 5 + 5 = 10$$

$$(5 - 5) \div 5 + 5 + 5 = 10$$

$$5 \times (5 - 5) + 5 + 5 = 10$$

下面我们来分析式子左边最后一个5的前面添的是“-”的情况,即

$$5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 - 5 = 10 \quad (3)$$

因为 $15 - 5 = 10$,这就要求式(3)“-”号前面的四个5组成15,即

$$5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 = 15 \quad (4)$$

如果式(4)的左边最后一个5的前面添上“+”号,即

$$5 \quad 5 \quad 5 + 5 = 15 \quad (5)$$

因为 $10 + 5 = 15$,这就要求式(5)“+”号前面三个5组成10,根据前面的分析不可能实现. 同样可以分析式子左边倒数第二个5的前面如果添上“×”或“÷”号,无法使该等式成立,因此式子左边倒数第二个5的前面只能添上“-”



Digital Puzzle, Number Array and Chessboard Cover

号,即 $5 \ 5 \ 5 - 5 = 15$. 因为 $20 - 5 = 15$,这就要求上面式子中左边“-”号前三个 5 组成 20,即 $5 \ 5 \ 5 = 20$. 不难看出: $5 \times 5 - 5 = 20$. 这样我们又找到了一种添法.

如果式子左边最后一个 5 前面添上“ $\times$ ”号或“ $\div$ ”号,同学们采用前面的倒推分析法,完全可以找到正确的添法.

【解】 $(5 - 5) \times 5 + 5 + 5 = 10$;

$(5 - 5) \div 5 + 5 + 5 = 10$; $5 \times (5 - 5) + 5 + 5 = 10$;

$5 \times 5 - 5 - 5 - 5 = 10$; $(5 \div 5 + 5 \div 5) \times 5 = 10$;

$(5 \times 5 + 5 \times 5) \div 5 = 10$; $55 \div 5 - 5 \div 5 = 10$.

【评注】 从上面的最后一个答案中我们可以看到,添运算符不仅可以在两个数字之间添,也可以在相邻几个数字之间添,如最后一个等式.

本例采用的方法,是从算式的最后一个数字开始逐步向前推想的,也就是逆推法. 当题目给定的数字不多时,用这种方法是很容易奏效的. 不过使用倒推法时,一定要考虑全面、周到.

例 16 用尽量少的“1”,以及若干个+, -, $\times$, $\div$, () 符号,组成一个等于 1 999 的算式.

【解】 $(1 \ 111 - 111) \times (1 + 1) - 1 = 1 \ 999$

例 17 在下列算式中合适的位置,添上括号或中括号,使等式成立.

(1) $1 + 2 \times 3 + 4 \times 5 + 6 \times 7 + 8 \times 9 = 303$;

(2) $1 + 2 \times 3 + 4 \times 5 + 6 \times 7 + 8 \times 9 = 1 \ 395$;

(3) $1 + 2 \times 3 + 4 \times 5 + 6 \times 7 + 8 \times 9 = 4 \ 455$.

【思维途径】 本题要求在算式中添括号,注意到括号的作用是改变运算的顺序,使括号中的部分先做,而在四则运算中规定“先乘除,后加减”,要改变这一顺序,往往把括号加在有加、减运算的部分.

题目中三个问题的等号左边完全相同,而右边的得数一个比一个大. 要想使得数增大,可以让加数增大或因数增大,这是考虑本题的基本思想.

(1) 题中,由凑数的思想,通过加括号,应凑出较接近 303 的数,注意到 $1 + 2 \times 3 + 4 \times 5 + 6 = 33$,而 $33 \times 7 = 231$. 较接近 303,而 $231 + 8 \times 9 = 303$,就可得到一个解为

$(1 + 2 \times 3 + 4 \times 5 + 6) \times 7 + 8 \times 9 = 303$

(2) 题中,得数比(1)题大得多,要使得数增大,只要把乘法中的因数增大. 如果考虑把括号加在 $7 + 8$ 上,则有 $6 \times (7 + 8) \times 9 = 810$,此时,前面 $1 + 2 \times 3 +$