胡金德 谭泽光 考研数学系列

2016考研数学重点突破220题

（数学二）

清华大学 胡金德
清华大学 谭泽光
主编

超值附赠

- 考研数学**公式小宝典**数学（二）
- 考研数学重点、难点、易混淆点在线**微课**讲解

（登录北航出版社网站 www.buaapress.com.cn）

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

胡金德 谭泽光 考研数学系列

2016

考研数学重点突破220题

（数学二）

清华大学 胡金德
清华大学 谭泽光
主编

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书可供报考2016年研究生入学考试(数学二)的同学在冲刺阶段使用。根据考研数学二真题的题型和题量分布情况,本书最终确定题目:高等数学题140道;线性代数题80道,共220道题。所有题目及解答均由名师编写和审定,所选题目在题型和难度上紧扣大纲要求。旨在让考生对考研数学二中的重要考点有更加清楚和深刻的认识。

图书在版编目(CIP)数据

2016考研数学重点突破220题. 数学二/胡金德,谭泽光主编. --北京:北京航空航天大学出版社,2015.6

ISBN 978-7-5124-1811-0

Ⅰ. ①2… Ⅱ. ①胡… ②谭… Ⅲ. ①高等数学一研究生一入学考试一题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第144492号

版权所有,侵权必究。

2016考研数学重点突破220题(数学二)

胡金德 谭泽光 主编

责任编辑 刘晓明

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路37号(邮编100191) http://www.buaapress.com.cn

发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

读者信箱:bhpress@263.net 邮购电话:(010)82316936

北京宏伟双华印刷有限公司印刷 各地书店经销

*

开本:787×1 092 1/16 印张:13.125 字数:362千字

2015年7月第1版 2015年7月第1次印刷

ISBN 978-7-5124-1811-0 定价:28.80元

若本书有倒页、脱页、缺页等印装质量问题,请与本社发行部联系调换。联系电话:(010)82317024

前　　言

本书专为报考2016年研究生入学考试(数学二)的考生在最后冲刺段使用。为了使考生能在短时间内对考研数学二所有考点有更加清楚的认识,对考研数学二在试题的难度和做题的速度方面有更加精确的把握,我们通过深入分析考研数学考试大纲的要求和精神以及近年来考研数学二命题的特点和动向,编写了本书.

针对冲刺阶段的特点,本书共设题目220道,内容包括高等数学、线性代数两大部分,每一部分试题又分选择题、填空题、解答题三个类型.

本书有如下特点:

一、布局精巧,重点突出

考研数学二真题的题量分布情况:高等教学占78%;线性代数占22%。本书最终确定题目:高等数学题140道;线性代数题80道,共220道题。

每一部分在选择题、填空题、解答题三种题目类型的设置上同样参考了真题比例,旨在让考生对考研真题的试题比例有一个清晰的认识。

同时在试题所涵盖的知识点上有所侧重,例如:数学二真题中的线性代数部分的选择题多为初等变换、向量组的相关性、线性方程组的解等,而极少出现行列的题目。为此,我们在题目的设置上对重点考查的知识点出题较多,而对于极少考到的知识点则出题较少,旨在让考生抓住重点,了解考研试题的动向。

二、题目精良,名师讲解

主编胡金德和谭泽光均为在清华大学从事了几十年数学教学以及十几年考研辅导的名师。两位老师均参与过考研大纲的制定、考研数学的命题及阅卷,对考研数学的命题规律和趋势有细致的把握,对试题的讲解细致,抓住考生的心理特点。

本套书,从全书体例的设定到具体题目的选取均由胡金德和谭泽光亲自主持,多人参与,并最终由两位主编写稿。所选题目在题型、难度上紧扣大纲要求。

题目讲解部分均出自两位名师之手,讲解精细,步骤精细,步骤严密。另外,在重点的题型和题目后,结合自身多年的从教经验,给出独到的总结。

本书附赠《考研数学公式小宝典(数学二)》,以帮助考生熟知公式及其适用范围与条件。

由于时间有限,书中难免有疏漏之处,诚望广大考生读者批评指正。

祝愿每位考生复习顺利,梦圆考场!

编　者

2015年6月

目录

CONTENTS

习题精选

习题精选答案与解析

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

习题精选

第一部分　高等数学

一、选择题

【1】把 $x \to 0^+$ 时的无穷小 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 \, dt, \beta = \int_0^{x^2} \tan\sqrt{t} \, dt, \gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 \, dt$ 排列起来，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是 (　　)

(A) α, β, γ.　(B) α, γ, β.　(C) β, α, γ.　(D) β, γ, α.

【2】若当 $x \to 0$ 时，$F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f''(t) \, dt$ 的导数与 x^2 是等价无穷小（其中 f 有二阶连续导数），则必有 (　　)

(A) $f''(0) = 1$.　(B) $f''(0) = 0.5$.

(C) $f''(0) = 0$.　(D) $f''(0)$ 不存在.

【3】下列函数中在 $[1, +\infty)$ 无界的是 (　　)

(A) $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$.　(B) $f(x) = \sin x^2 + \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}$.

(C) $f(x) = x\cos\sqrt{x} + x^2 e^{-x}$.　(D) $f(x) = \frac{\arctan \frac{1}{x}}{x^2}$.

【4】设函数 $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1 + x}{1 + x^{2n}}$，则下列结论成立的是 (　　)

(A) $f(x)$ 无间断点.　(B) $f(x)$ 有间断点 $x = 1$.

(C) $f(x)$ 有间断点 $x = 0$.　(D) $f(x)$ 有间断点 $x = -1$.

【5】已知 $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} (n = 1, 2, \cdots), x_1 = a > 0, y_1 = b > 0 (a < b)$，则数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ (　　)

(A) 都收敛于同一值 .　(B) 都收敛，但不一定收敛于同一值.

(C) 都发散.　(D) 无法判断敛散性.

【6】设 $f(x)$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = \sin 2x + 2e^x$ 的满足初始条件 $f(0) = f'(0) = 0$ 的特解，则当 $x \to 0$ 时，$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln[1 + f(x)]}{x^2}$ (　　)

(A) 不存在. (B) 等于 0. (C) 等于 1. (D) 等于 2.

【7】设$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^4}=-2$,则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处 ( )

(A) 不可导. (B) 可导且 $f'(a)\neq 0$.

(C) 有极大值. (D) 有极小值.

【8】已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,且 $f(0)=0$,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$ ( )

(A) $-2f'(0)$. (B) $-f'(0)$.

(C) $f'(0)$. (D) 0.

【9】函数 $f(x)=(x^2-2x-3)|x^2-3x|\sin|x|$ 不可导点的个数是 ( )

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

【10】设 $f(x)$ 是二阶可导的奇函数,$y(x)=f(\cos x)\cdot\cos[f(x)]$,且当 $x_0=\dfrac{\pi}{2}$ 时,$f(x_0)=x_0$,$f'(0)=f'(x_0)=1$,则 $y''(x_0)=$ ( )

(A) 1. (B) 2. (C) -1. (D) -2.

【11】设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 存在二阶导数,且 $f(x)=f(-x)$,当 $x<0$ 时有 $f'(x)<0$,$f''(x)>0$,则当 $x>0$ 时,有 ( )

(A) $f'(x)<0,f''(x)>0$. (B) $f'(x)>0,f''(x)<0$.

(C) $f'(x)>0,f''(x)>0$. (D) $f'(x)<0,f''(x)<0$.

【12】设 $f(x)$ 具有二阶连续导数,且 $f'(1)=0$,$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f''(x)}{(x-1)^2}=\dfrac{1}{2}$,则 ( )

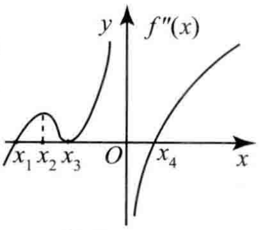
(A) $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(B) $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) $(1,f(1))$ 是曲线 $f(x)$ 的拐点坐标.

(D) $f(1)$ 不是 $f(x)$ 的极值,$(1,f(1))$ 也不是曲线 $f(x)$ 的拐点坐标.

【13】函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,其二阶导函数的图形如右图所示,则 $y=f(x)$ 的拐点的个数是 ( )



(A) 1. (B) 2.

(C) 3. (D) 4.

【14】设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处满足 $f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=0$,$f^{(n+1)}(0)>0$,则 ( )

(A) 当 n 为偶数时,$x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

(B) 当 n 为偶数时,$x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

(C) 当 n 为奇数时,$x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

(D) 当 n 为奇数时,$x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

【15】设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数,且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln[f'(x)+e^x]}{1-\sqrt{1+2x}}=0$,则点 $x=0$ ( )

(A) 不是 $f(x)$ 的驻点. (B) 是 $f(x)$ 的驻点但不是极值点.

(C) 是 $f(x)$ 的驻点且是极大值点. (D) 是 $f(x)$ 的驻点且是极小值点.

【16】设两函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 都在 $x=a$ 处取得极大值,则 $F(x)=f(x)g(x)$ 在 $x=a$ 处 ( )

(A) 必取极大值. (B) 必取极小值.

(C) 不可能取极值. (D) 是否取得极值不能确定.

【17】设函数 $f(x)$ 有连续导数,且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f'(x)}{1-e^{-x}}=1$,则当 $f(0)=0$ 时 ( )

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值. (B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值. (D) 不能判定 $f(0)$ 是否为极值.

【18】若 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上二阶可导,且 $f(a)=A>0, f'(a)<0, f''(x)<0$ $(x>a)$,则方程 $f(x)=0$ 在 $(a,+\infty)$ 内 ( ).

(A) 没有实根. (B) 有两个实根.

(C) 有无穷多个实根. (D) 有且仅有一个实根.

【19】设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)>0, f'(x)<0, f''(x)>0$,令 $S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, $S_2=f(b)(b-a), S_3=\dfrac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$,则 ( )

(A) $S_1<S_2<S_3$. (B) $S_2<S_1<S_3$.

(C) $S_3<S_1<S_2$. (D) $S_2<S_3<S_1$.

【20】设 $D_t=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x^2+y^2\leqslant t^2, t>0\}$,$f(x)$ 为满足 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$ 的连续函数, $F(t)=\iint\limits_{D_t} f(t-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,则 $F'(1)=$ ( )

(A) π. (B) 2π. (C) -2π. (D) $-\pi$.

【21】设 $I_1=\iint\limits_D \dfrac{x+y}{4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, I_2=\iint\limits_D\sqrt{\dfrac{x+y}{4}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, I_3=\iint\limits_D\sqrt[3]{\dfrac{x+y}{4}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 由不等式 $(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2$ 所确定,则 ( )

(A) $I_2<I_3<I_1$. (B) $I_1<I_2<I_3$.

(C) $I_3<I_1<I_2$. (D) $I_3<I_2<I_1$.

【22】假设区域 D 由曲线 $y=px^3(x>0,p>0)$ 及其过点 $(1,p)$ 的切线与 x 轴围成，设此区域的形心为 $(\bar{x},\bar{y})$，则 $\bar{x}$ 的值为 ( )

(A) $\frac{28}{45}$. (B) $\frac{64}{135}$. (C) $\frac{4}{45}$. (D) $\frac{82}{135}$.

【23】若 $f(1)=g(1)=0, f(2)=g(2)=m>0$，且 $f''(x)>0, g''(x)<0$，则 $I_1=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x, I_2=\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x, I_3=\int_1^2(mx-m)\mathrm{d}x$ 的大小关系为 ( )

(A) $I_1 \geqslant I_2 \geqslant I_3$. (B) $I_3 \geqslant I_2 \geqslant I_1$.

(C) $I_2 \geqslant I_3 \geqslant I_1$. (D) $I_2 \geqslant I_1 \geqslant I_3$.

【24】函数 $F(x)=\int_x^{x+2\pi} e^{\cos t}\cos t\mathrm{d}t$ ( ).

(A) 为正数. (B) 为负数. (C) 恒为零. (D) 不是常数.

【25】设非负可微函数 $f(x)$ 满足条件 $f'(x)\leqslant 0, \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 ( )

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0, \lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$.

(B) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0, \lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=A\neq 0$.

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a\neq 0, \lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=A\neq 0$.

(D) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a\neq 0, \lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=+\infty$.

【26】已知 $f(\pi)=2, \int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x\mathrm{d}x=5$，则 $f(0)$ 等于 ( )

(A)2. (B)3. (C)5. (D)不确定.

【27】下列广义积分发散的是 ( )

(A) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$. (B) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

(C) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$. (D) $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}$.

【28】下列关于反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的命题：

① 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内连续的奇函数，则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 必收敛，且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=0$.

② 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内连续的奇函数，且 $\lim\limits_{k\to+\infty}\int_{-k}^{k} f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 必收敛，且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{k\to+\infty}\int_{-k}^{k} f(x)\mathrm{d}x$.

③ 若 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 都发散，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$ 未必发散.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

④ 若$\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ 与$\int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 都发散,则$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 未必发散.

其中真命题的个数是 ( )

(A)1 个. (B)2 个. (C)3 个. (D)4 个.

【29】设 $f(x)$ 一阶可导,$f(x)>0$,$f'(x)>0$,则当 $\Delta x>0$ 时 ( )

(A)$\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t > f(x)\Delta x > 0$.

(B) $\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t < f(x)\Delta x < 0$.

(C)$f(x)\Delta x > \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t > 0$.

(D) $f(x)\Delta x < \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t < 0$.

【30】旋轮线的一支 $x=a(t-\sin t)$,$y=a(1-\cos t)$$(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的质心是 ( )

(A)$\left(\pi a,\dfrac{4}{3}a\right)$.

(B)$\left(\pi a,\dfrac{2}{3}a\right)$.

(C)$\left(\pi a,\dfrac{5}{4}a\right)$.

(D)$\left(\pi a,\dfrac{7}{4}a\right)$.

【31】设 k 为常数,则极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2\sin ky}{x^2+y^4}$ ( )

(A) 等于 0.

(B) 等于$\dfrac{1}{2}$.

(C) 不存在.

(D) 存在与否与 k 取值有关.

【32】已知 $f_x(x_0,y_0)$ 存在,则$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0-h,y_0)}{h}=$ ( )

(A)$f_x(x_0,y_0)$.

(B)0.

(C)$2f_x(x_0,y_0)$.

(D) $\dfrac{1}{2}f_x(x_0,y_0)$.

【33】设函数 $f(x)$可导,且曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线与直线 $y=2-x$ 垂直,则当 $\Delta x\to 0$ 时,该函数在点 $x=x_0$ 处的增量 Δy 是 ( )

(A) 与 Δx 同阶但不等价的无穷小.

(B) 与 Δx 等价的无穷小.

(C) 比 Δx 高阶的无穷小.

(D) 比 Δx 低阶的无穷小.

【34】二元函数 $f(x,y)$ 在点$(0,0)$ 处可微的一个充分条件是 ( )

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$.

(B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$,且$\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$.

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

(D) $\lim\limits_{x\to 0}[f'_x(x,0)-f'_x(0,0)]=0$ 且$\lim\limits_{y\to 0}[f'_y(0,y)-f'_y(0,0)]=0$.

【35】设 $f(x,y)$ 有连续的偏导数且 $f(x,y)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$ 为某一函数 $u(x,y)$ 的全微分,则

下列等式成立的是 ( )

(A) $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}$.　　(B) $x\frac{\partial f}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial y}$.

(C) $-x\frac{\partial f}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial y}$.　　(D) $x\frac{\partial f}{\partial y}=y\frac{\partial f}{\partial x}$.

【36】下列命题正确的是 ( )

(A) 若(x_0,y_0)为$f(x,y)$的极值点,则(x_0,y_0)必为$f(x,y)$的驻点.

(B) 若(x_0,y_0)为$f(x,y)$的驻点,则(x_0,y_0)必为$f(x,y)$的极值点.

(C) 若(x_0,y_0)为有界闭区域D上连续的函数$f(x,y)$在D内部唯一的极值点,且$f(x,y)$在该点取极大值,则$f(x,y)$在点(x_0,y_0)取得它在D上的最大值.

(D) 若$f(x,y)$在点(x_0,y_0)取得极小值,则$f(x,y_0)$在$x=x_0$处取极小值,$f(x_0,y)$在$y=y_0$处取极小值.

【37】$I=\int_1^{e}\mathrm{d}y\int_0^{\ln y}f(x,y)\mathrm{d}x$,变换积分次序为 ( )

(A) $I=\int_1^{e}\mathrm{d}x\int_0^{\ln x}f(x,y)\mathrm{d}y$.　　(B) $I=\int_{e^x}^{e}\mathrm{d}x\int_0^{1}f(x,y)\mathrm{d}y$.

(C) $I=\int_0^{\ln y}\mathrm{d}x\int_1^{e}f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(D) $I=\int_0^{1}\mathrm{d}x\int_{e^x}^{e}f(x,y)\mathrm{d}y$.

【38】设$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\varphi_3(x)$为二阶非齐次线性方程$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x)$的三个线性无关解,则该方程的通解为 ( )

(A) $C_1[\varphi_1(x)+\varphi_2(x)]+C_2\varphi_3(x)$.

(B) $C_1[\varphi_1(x)-\varphi_2(x)]+C_2\varphi_3(x)$.

(C) $C_1[\varphi_1(x)+\varphi_2(x)]+C_2[\varphi_1(x)-\varphi_3(x)]$.

(D) $C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+C_3\varphi_3(x)$,其中$C_1+C_2+C_3=1$.

【39】设$y=\frac{x}{\ln x}$是微分方程$y'=\frac{y}{x}+\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$的解,则$\varphi(x)$的表达式为 ( )

(A) $-x^2$.　　(B) x^2.

(C) $-x$.　　(D) x.

【40】设二阶常系数齐次线性微分方程$y''+by'+y=0$的每一个解$y(x)$都在区间$(0,+\infty)$上有界,则实数b的取值范围是 ( )

(A) $[0,+\infty)$.　　(B) $(-\infty,0)$.

(C) $(-\infty,4]$.　　(D) $(-\infty,+\infty)$.

二、填空题

【41】$I=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(xe^x)-e^{-\frac{x^2}{2}e^{2x}}}{x^4}=$ ________.

【42】设 $a > 0, a \neq 1$，且 $\lim\limits_{x\to\infty} x^p\left(a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}}\right) = \ln a$，则 $p =$ ________.

【43】$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{f(2x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\dfrac{x+1}{x-1}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} =$ ________.

【44】极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^x - (\sin x)^x}{x^3} =$ ________.

【45】设 $a_n = 3\int_0^{\frac{n+1}{n}} x^{2n-1}\sqrt{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} n a_n =$ ________.

【46】设 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导且 $f(0)=1, f'(0)=3$，则数列极限 $I = \lim\limits_{n\to\infty}\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]^{\frac{\frac{1}{n}}{1-\cos\frac{1}{n}}} =$ ________.

【47】已知 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{a(\sqrt{n})^3 + bn + c} = 2$，则 $a =$ ________，$b =$ ________.

【48】设 $f(x)$ 连续，且当 $x\to 0$ 时，$F(x) = \int_0^x (x^2+1-\cos t)f(t)\,\mathrm{d}t$ 是与 x^3 等价的无穷小量，则 $f(0) =$ ________.

【49】设 $f(x)$ 连续，当 $x\to 0$ 时，$F(x) = \int_0^x (\mathrm{e}^{x^2} - \cos t)f(t)\,\mathrm{d}t$ 是与 x^3 等价的无穷小量，则 $f(0) =$ ________.

【50】已知 $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{x^{2k-1} + mx^2 + nx}{x^{2k}+1}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，则 $m =$ ____，$n =$ ____.

【51】若函数 $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x-3} - n}{2(2x-m)(x-2)}$ 有无穷间断点 $\dfrac{3}{2}$、可去间断点 2，则 $m =$ ________，$n =$ ________.

【52】曲线 $y = 3x + \dfrac{\ln x}{2x} + 1$ 的斜渐近线是________.

【53】设 $\begin{cases} x = f'(t) \\ y = f(t^2) \end{cases}$，已知 $f'(1) = 0, f''(1) = 1$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1} =$ ________.

【54】设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$ 确定，则 $y''|_{t=1} =$ ________.

【55】设 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 内二阶可导，且在 $x=1$ 处与曲线 $y = x^3 - 3$ 相切，在 $(0, +\infty)$ 内与曲线 $y = x^3 - 3$ 有相同的凹凸性，则方程 $f(x) = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 内有________个实根.

【56】若 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内可微，且 $f'(0) = 0, f''(0) = A$，则 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f[\ln(1+x)]}{x^3} =$ ________.

【57】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = A$，则 $\int_0^1\left[\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t+(1-x)f(x)\right]\mathrm{d}x=$ ________.

【58】反常积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}=$ ________.

【59】反常积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+2x^4+2x^8}}=$ ________.

【60】设 $z=z(x,y)$ 由方程 $xf(z)+yg(z)=xy$ 所确定，且 $xf'(z)+yg'(z)\neq 0$，则 $[x-g(z)]\dfrac{\partial z}{\partial x}-[y-f(z)]\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

【61】设函数 $f(\mu)$ 可微，且 $f'(2)=2$，则 $z=f(x^2+y^2)$ 在点(1,1)处的全微分 $\mathrm{d}z|_{(1,1)}=$ ________.

【62】设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=y+\ln\dfrac{x}{z}$ 确定，则在点 $P_0(1,1)$ 处，$\dfrac{\partial z(x,y)}{\partial x}+\dfrac{\partial z(x,y)}{\partial y}$ 的值为________.

【63】设区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，$f(x)$ 为 D 上的正值连续函数，a,b 为常数，则 $\iint\limits_D\dfrac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma=$ ________.

【64】$\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}y\int_0^y \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{2}}^2\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{4-y^2}}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x=$ ________.

【65】设二阶线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 有三个特解，$y_1=\mathrm{e}^x$，$y_2=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$，$y_3=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$，则该方程为________.

三、解答题

【66】求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)-\ln(1+\sin^2 x)}{(1-\cos x)\ln(1-\sin^2 x)}$.

【67】若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+xf(x)}{x^3}=0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+f(x)}{x^2}$.

【68】确定 a 与 b 的值，使得

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\sqrt{x^4+ax}-\frac{\left(x^3+x^2+\frac{3}{2}bx\right)}{\sqrt[x]{\mathrm{e}}}\right]=\frac{1}{4}.$$

【69】设 $f(x)$ 可微且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2}tf(t)\cdot\ln\dfrac{t+1}{t}\mathrm{d}t$.

【70】求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}}+\cdots+\dfrac{1}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}\right]$.

【71】求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sqrt[n]{(n+1)^2(n+2)^2\cdot\cdots\cdot(2n)^2}$.

【72】求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2+n}\right)$.

【73】若有数列$\{x_n\}$由如下条件确定，$x_1=1,x_{n+1}=\sin(\arctan x_n),n=1,2,\cdots$.

（Ⅰ）证明数列$\{x_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$；

（Ⅱ）求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{x_n^2}-\dfrac{1}{x_{n+1}^2}\right)$.

【74】求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2}{3^n\cdot n!}x^n}{\int_0^x\sqrt[3]{e^t}\,dt}$.

【75】求$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]$.

【76】今有方程系列 P：$x^n-2x+1=0$，$n\geqslant 3$.

（Ⅰ）证明：P 中每一个方程，在$(0,1)$内都有且仅有一个解；

（Ⅱ）设 P 中的第 n 个方程的解为 x_n，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的值.

【77】设 $f'(x)$ 连续，$f(0)=0,f'(0)\neq 0,F(x)=\int_0^x t^2f(t^3-x^3)dt$. 若 $x\to 0$，则 $F(x)\sim\arctan x^n$，求 n 及 $f'(0)$.

【78】设函数集合 Ψ，其中每一函数 $f(x)$，满足下列条件：①$f(x)$ 是定义在$[0,1]$上的非负函数，且 $f(1)=1$；② $\forall u,v,u+v\in[0,1]$，有 $f(u+v)\geqslant f(u)+f(v)$.

（Ⅰ）证明 Ψ 中每一函数 $f(x)$ 都是单调增加的.

（Ⅱ）对所有这一类函数 Ψ，求积分$\int_0^1 f(x)dx$ 的最大取值.

【79】设 $f(x)=\begin{cases}(x+3)\arctan\dfrac{1}{x^2-9}, & x\neq\pm 3\\ 0, & x=\pm 3\end{cases}$，讨论函数 $f(x)$ 的连续性，若有间断点，指明其类型.

【80】已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数，它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x),$$

其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x 高阶的无穷小，且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，求曲线 $y=f(x)$ 在点$(6,f(6))$处的切线方程.

【81】设曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=x-1$,求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\mathrm{e}^t f(1+\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^t)\mathrm{d}t}{x\sin x-x\tan x}$.

【82】设 $f(x)$ 二阶连续可导且 $f(0)=f'(0)=0, f''(0)>0$,在曲线 $y=f(x)$ 上任意一点 $(x,f(x))$ 处作切线,此切线在 x 轴上的截距为 t,求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(t)}{tf(x)}$.

【83】设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数,且 $y'\neq 0$, $x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数.

(Ⅰ)试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}+(y+\sin x)\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3=0$ 变为 $y=y(x)$ 所满足的微分方程.

(Ⅱ)求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=\dfrac{3}{2}$ 的解.

【84】设 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}$,其中 a,b,c 都是常数且 $|a|\neq|b|$.

(Ⅰ)证明:$f(x)=-f(-x)$;

(Ⅱ)求 $f^{(n)}(x)$.

【85】求函数 $f(x)=x^2\cdot\dfrac{1}{1+x}$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)(n\geqslant 3)$.

【86】设 $f'(-x)=x[f'(x)-1]$,且 $f(0)=0$,求 $f(x)$ 的极值.

【87】已知方程 $\sin^3x\cos x=a(a>0)$,试讨论其在区间 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 上实根的个数.

【88】设曲线 L 是 $y=-x^2+1$ 在第一象限内的部分.在 L 上求一点 M,使过 M 点 L 的切线 AB 与两坐标轴和 L 所围成的图形的面积最小.

【89】已知,当 $|x|<1$ 时,函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)+a[f'(x)]^2=g(x)$,且 $f'(0)=0$.其中常数 $a>0$,函数 $g(x)$ 在 $|x|<1$ 可导,且 $g(0)=0, g'(0)>0$,试确定 $f(0)$ 是不是函数的极值,点 $(0,f(0))$ 是否是曲线 $y=f(x)$ 的拐点?

【90】设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可导,$f''(x)>0, f(0)<0$,极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 都存在,且异号,试证明方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上恰有两个实根.

【91】(Ⅰ)设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内可导,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A$,求证:

若 $A>0$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$;若 $A<0$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

(Ⅱ)设 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续,且 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛,又 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=l$,求证 $l=0$.

【92】函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上有任意阶导数,且 $f(2)=0$,设 $F(x)=(x-1)^3f(x)$.试证明在 $(1,2)$ 内存在一个 ξ,使得 $F'''(\xi)=0$.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com