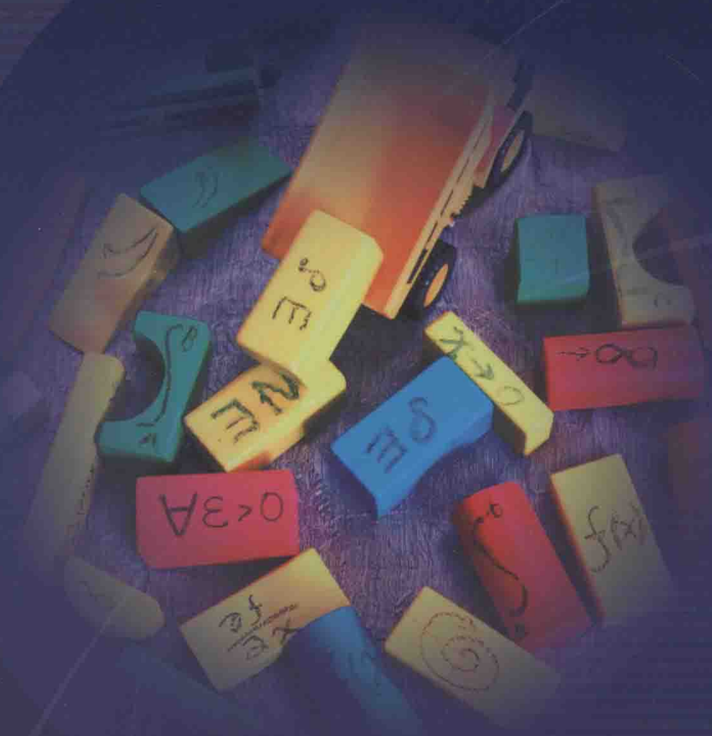
数学分析技巧

（下 册）

杨世藩　编著



科 学 出 版 社

数学分析技巧

（下册）

杨世藩　编著

科学出版社
北　京

内容简介

本书包含大学数学分析的全部课程内容, 并配有大量例题与习题以供阅读和练习之用, 作用教材, 可根据学时选讲, 例题是本书有特点的部分, 旨在帮助学习者尽快地理解和掌握数学分析的基本理念与技巧, 尤其对初学者会有较大帮助.

本书适合数学专业、物理专业学生阅读, 也可供相关的数学教师、工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析技巧：全 2 册/杨世藩编著. —北京：科学出版社, 2016.3
ISBN 978-7-03-047406-3
Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①杨 … Ⅲ. ①数学分析 Ⅳ. ①O17
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016) 第 036355 号

责任编辑: 王胡权 / 责任校对: 张凤琴
责任印制: 霍 兵 / 封面设计: 迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

大厂书文印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016 年 3 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2016 年 3 月第一次印刷 印张: 36 1/2
字数:735 000

定价: 139.00 元(上下册)
(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

数学分析是数学专业最重要的基础课之一. 它是进入近代数学的必经的阶梯, 也是构建宏伟数学大厦的基石. 对于初学者, 学好数学分析不仅为后继数学及应用课程奠定了良好的基础, 而且通过学习还可以感悟数学中抽象定义深刻的内涵和外延, 并且通过逻辑演绎得出精彩结论的过程. 所有这些都表明数学分析不仅是知识性学科, 而且还是方法论的学科. 正是如此的重要性, 数学分析课程有菲赫金哥尔茨著的《微积分学教程》(三卷八分册) 这样的宏篇巨著问世. 学人誉称为微积分学的字典, 这样规模的出版物, 在数学中并不多见. 作者写这本书的初衷是要写一本压缩版的微积分教程, 不仅帮助缩短数学分析课程的学时而且不失掉该课程的本质内容, 帮助初学者尽快掌握数学分析的理念、思想和方法. 以无穷小和无穷大的概念为基础, 给出极限理论. 用极限方法刻画微分, 通过级数方法给出积分理论.

数学分析的学习方法与中学数学的学习方法是不同的. 在中学阶段为了高考往往以解题为中心, 而数学分析的学习则应围绕数学理念的深刻理解和逻辑演绎技巧来展开. 理念往往是一颗创新的种子, 逻辑思维的演绎把这颗种子推向长成参天大树的神奇力量. 数学分析课程就是从无穷小以及极限这一概念出发通过逻辑演绎形成蔚为壮观的学科. 因此数学分析课程带给我们的不仅是知识的更新, 而且还是思想的更新. 为此目的, 作者在成书过程中, 配以相当数量的例题以展示技巧供读者参考. 有的习题给出了有关理论的应用背景. 习题可供读者选做. 虽然较多的例题会增加篇幅, 但对于初学者, 正如学棋之人, 多揣摹高手对局一样, 是提高自己水平的有效途径, 揣摹例题是尽快使自己进入数学分析领域的有效方法之一. 当然, 本书也可作为数学分析老师的教学参考书, 帮助组织课堂教学内容和习题辅导.

数学分析如果从牛顿时代算起, 已经历时二百多年, 其间经过一代又一代数学家的努力, 才形成今天这样的体系, 当我们在书中重温他们的工作时, 无不为其高超的技巧所折服. 时至今日, 数学分析的思想与结果已经成为自然科学和工程技术共同的基础知识, 甚至连经济学这样的人文学科, 也因数学分析的引入而获得诺贝尔经济学奖. 因此希望年轻的学子不要错过学习数学分析课程的机会.

作者从 20 世纪 50 年代初在高校数学系执教至退休, 从教四十余年, 又以十年成书, 虽经斟酌, 然一孔之见, 挂一漏万, 疏漏难免, 乞盼读者及同仁指正为感. 在成书过程中, 本书得到了贵州大学党政领导、贵州大学理学院党政领导以及贵州大学科技处领导的热情关怀和鼓励, 并获得了贵州大学学术著作出版基金的支持, 在

此深表感谢! 此书出版前也得到年青教师袁昊及其夫人周杰在原稿修改打印、出版联系等多方面的帮助, 在此也深表谢意! 同时特别感谢曹素元教授对本书出版前的审稿和建议.

杨世藩谨识

贵州大学理学院 2015 年春

目　录

第 11 章　数值级数 ··· 1
11.1　数值级数的基本概念及简单性质 ··· 1
11.2　正项级数收敛的充要条件与正项级数敛散的判别法 ··· 4
11.3　任意项级数 ··· 18
11.4　收敛级数的性质 ··· 22
第 12 章　函数项级数 ··· 31
12.1　函数序列及函数级数中的基本问题 ··· 31
12.2　函数序列及函数级数的一致收敛性的判别法 ··· 41
第 13 章　幂级数 ··· 54
13.1　幂级数的收敛半径与收敛区间 ··· 54
13.2　幂级数的性质 ··· 56
13.3　初等函数的泰勒级数展开 ··· 65
*13.4　斯特林公式 ··· 78
13.5　幂级数在近似计算中的应用 ··· 80
*13.6　用多项式一致逼近闭区间上的连续函数 ··· 81
第 14 章　傅里叶级数 ··· 87
14.1　傅里叶级数的概念 ··· 87
14.2　傅里叶级数的平均收敛性 ··· 93
14.3　傅里叶级数的收敛性 ··· 106
14.4　任意区间上的傅里叶级数 ··· 120
14.5　傅里叶级数的逐项求积与逐项求导 ··· 131
14.6　傅里叶级数的复数形式 ··· 134
第 15 章　欧氏空间与多元函数 ··· 137
15.1　m 维欧氏空间 ··· 137
15.2　欧氏空间中的点集 ··· 142
15.3　m 维欧氏空间的性质 ··· 149
15.4　多元向量函数 ··· 152
15.5　多元函数的极限 ··· 158
15.6　多元函数的连续性 ··· 164
第 16 章　多元数值函数的微分学 ··· 174

16.1　偏导数的概念 ······ 174
16.2　全微分与可微性 ······ 178
16.3　复合函数的偏导数与可微性 ······ 188
16.4　方向导数 ······ 192
16.5　高阶偏导数和高阶全微分 ······ 197
16.6　多元函数的泰勒公式 ······ 207
16.7　由一个方程式确定的隐函数及其微分法 ······ 210
第 17 章　多元向量函数微分学 ······ 226
17.1　线性变换 ······ 226
17.2　向量函数的可微性与导数 ······ 228
17.3　反函数及其微分法 ······ 238
17.4　由方程组确定的隐函数及其微分法 ······ 245
*17.5　函数相关性 ······ 249
第 18 章　多元函数微分学的应用—— 几何应用与极值问题 ······ 263
18.1　曲线的表示法和它的切线 ······ 263
18.2　空间曲面的表示法和它的切平面 ······ 267
18.3　简单极值问题 ······ 271
18.4　条件极值问题 ······ 277
18.5　最小二乘法 ······ 283
第 19 章　含参变量的定积分 ······ 296
19.1　含参变量的正常积分 ······ 297
19.2　极限函数的性质 ······ 303
19.3　含参变量的广义积分 ······ 307
19.4　计算含参变量积分的几个例子 ······ 313
19.5　欧拉积分 ——B 函数与 Γ 函数 ······ 322
第 20 章　重积分 ······ 332
20.1　引言 ······ 332
20.2　$\mathbf{R}^n$ 空间图形的若尔当测度 ······ 334
20.3　在 $\mathbf{R}^m$ 上的黎曼积分 ······ 339
20.4　化重积分为累次积分 ······ 355
20.5　重积分的变量替换 ······ 376
20.6　重积分的变量替换 (续) ······ 392
20.7　重积分在力学上的应用 ······ 407
第 21 章　曲线积分 ······ 413
21.1　与曲线有关的一些概念 ······ 413

21.2　第一型曲线积分 …… 416
21.3　第二型曲线积分 …… 421
21.4　平面上的第二型曲线积分与格林公式 …… 437
第 22 章　曲面积分 …… 453
22.1　曲面概念 …… 453
22.2　曲面的面积 …… 454
22.3　第一型曲面积分 …… 459
22.4　曲面的侧 …… 474
22.5　第二型曲面积分 …… 478
第 23 章　场理论 …… 485
23.1　场的表示法 …… 485
23.2　向量场的通量、散度和高斯公式 …… 487
23.3　向量场的环量和旋度 …… 500
23.4　保守场与势函数 …… 510
高斯公式 · 斯托克斯公式 · 线积分与路径无关的例题 …… 529
综合题例题 …… 535
综合题习题 …… 571

第 11 章　数 值 级 数

11.1　数值级数的基本概念及简单性质

11.1.1　一般概念

对于一般的无穷多个数之和:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1}$$

称为**无穷级数**, 并记为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, 其中 a_n 称为级数 (1) 的**一般项**.

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

称为级数 (1) 的**部分和**.

若 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$ 存在 (有限值), 称级数 (1) 收敛, 且其和为 S, 记作 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = S$;

若 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$ 不存在或极限值为 $+\infty$ 或 $-\infty$, 称级数 (1) 发散, 并且当极限值为 $+\infty$ 或 $-\infty$ 时, 称级数 (1) 发散到 $+\infty$ 或 $-\infty$, 记为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$ 或 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = -\infty$.

若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 绝对收敛; 若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ 发散, 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 条件收敛.

11.1.2　柯西准则

级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛的充要条件为: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n > N$ 且对任意的自然数 p, 成立

$$S_{n+p} - S_n = \sum_{n+1}^{n+p} a_n < \varepsilon. \tag{2}$$

11.1.3　级数的基本性质

(1) 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = S$, c 是与 n 无关的常数, 则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} ca_n$ 也收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = cS;$$

(2) 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = S_1$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = S_2$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n \pm b_n)$ 也收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = S_1 \pm S_2;$$

(3) 在级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 内添上或去掉有限项, 不会影响此级数的收敛性.

(4) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

应用性质 (4) 可以判定一个级数是发散的, 只要它的一般项不趋于零即可. 因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛的必要条件, 但不是充分条件.

数值级数性质的例题

1. 考虑等比级数

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1},$$

其中 $a \neq 0$. 它的第 n 个部分和为 $S_n = a\dfrac{1-r^n}{1-r}(r \neq 1)$, 因此就有

(1) 当 $|r| < 1$ 时 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(r) = \lim\limits_{n\to+\infty} a\dfrac{1-r^n}{1-r} = \dfrac{a}{1-r}$, 因而有

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r},$$

即等比级数当 $|r| < 1$ 时, 其和为 $\dfrac{a}{1-r}$.

(2) 当 $|r| > 1$ 时, 容易得到 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(r) = \lim\limits_{n\to+\infty} a\dfrac{1-r^n}{1-r} = \infty$.

当 $r = 1$ 时 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(1) = \lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{(a + \cdots + a)}_{n\text{个}} = \lim\limits_{n\to+\infty} na = \begin{cases} +\infty, & a > 0, \\ -\infty, & a < 0. \end{cases}$

当 $r=-1$ 时, 显然有 $S_n(-1)=\begin{cases} a, & n\text{为奇数},\\ 0, & n\text{为偶数}.\end{cases}$

因此, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(-1)$ 不存在. 这样一来, 当 $|r|\geqslant 1$ 时, 等比级数发散.

2. 证明级数 $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}+\cdots$ 收敛, 并求其和.

证 上述级数的部分和

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

因此, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=1$. 这表示所给级数收敛, 其和为 1.

3. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{4n^2-1}$ 的和.

解 因 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right]=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)$, 故 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\dfrac{1}{2}$, 所以级数收敛, 其和为 $\dfrac{1}{2}$.

4. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 发散.

证 这个级数的部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln k)=\ln(n+1)-\ln 1=\ln(n+1)\to+\infty.$$

因此这个级数发散.

5. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛.

证 对于任意的自然数 n 及 p, 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}&\leqslant\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}\\&\leqslant\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots\\&\quad+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)\\&=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

由此看出, 任给 $\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, 对于任意的自然数 n 及 p, 就有

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}<\varepsilon.$$

由柯西准则知级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛.

在傅里叶级数的理论中, 将证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$.

6. 证明级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

证 对于任意的自然数 n, 考虑级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 的一部分

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\geqslant\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},$$

由此看出, 对任意的 N, 当 $n>N$, 取 $p=n$ 就有 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}\geqslant\frac{1}{2}$, 这表示级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 不满足柯西准则, 因此它发散.

这个级数称为**调和级数**, 它的部分和单调上升. 因此它必发散到 $+\infty$.

7. 证明级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2n+1}$ 发散.

证 因为其一般项具有性质: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$, 它不趋于零, 所以级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2n+1}$ 发散.

8. 求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ 的和. $\left(\text{答案:}\frac{1}{3}.\right)$

9. 求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+2)}$ 的和. $\left(\text{答案:}\frac{1}{4}.\right)$

11.2 正项级数收敛的充要条件与正项级数敛散的判别法

设 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 是正项级数, 即 $a_n>0, n=1,2,\cdots$. 这时, 级数的部分和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ 是一个严格单调序列: $0<S_1<S_2<\cdots<S_n<\cdots$. 利用关于序列“单调有界极限存在”定理, 我们即可以得出下列关于正项级数收敛性的判别准则.

定理 1 正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛的充要条件是它的部分和序列 $\{S_n\}$ 有上界.

注 若序列 $\{S_n\}$ 无上界, 则显然有 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=+\infty$, 因此级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛.

这个定理对于判别正项级数是否收敛带来一定的方便. 因为按定义, 要问级数是否收敛, 就要问它的部分和序列 $\{S_n\}$ 是否有极限, 而大家知道, 对于一些比较复杂的序列就往往不大容易直接求出其极限值. 现在, 有了定理 1 以后, 就将求序列 $\{S_n\}$ 极限问题转化到估计 S_n 是否有上界的问题, 这就可以用适当放大的方法来解决, 这样就显得较为简单了.

正项级数敛散的判别法

设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 是两个正项级数. 利用定理 1 容易证明下述的比较判别法.

(1) 比较判别法: 若 $a_n \leqslant b_n (n \geqslant N)$, 则由 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 由 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 发散.

若 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n} (n > N)$, 则由 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 由 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散$\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 发散.

(2) 比较判别法的极限形式: 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = lb_n \neq 0$, 则有

1° 当 $0 < l < +\infty$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 同时收敛或同时发散;

2° 当 $l = 0$ 时, 由 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛;

3° 当 $l = +\infty$ 时, 由 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 发散 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散.

(3) 达朗贝尔判别法: 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 是正项级数,

1° 若 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r < 1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛;

2° 若 $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r > 1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散.

证 1° 取正数 r_1 满足 $0 \leqslant r < r_1 < 1$. 由 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r < 1$ 推出, 存在正整数 N_1, 使当 $n \geqslant N_1$ 时, 有 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < r_1 < 1$. 由此反复应用此不等式可以得到, 对任何 $n \geqslant N_{1+1}$, 就有 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} < r_1$, $\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}} < r_1, \cdots$,

$$\frac{a_{N_1+2}}{a_{N_1+1}} < r_1, \quad \frac{a_{N_1+1}}{a_{N_1}} < r_1,$$

因而有 $a_n < a_{N_1} r_1^{n-N_1}$. 由此, 根据比较判别法及等比级数 $\sum a_{N_1} r_1^{n-N_1}$ 的收敛性就推出级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

2° 取正数 r_2 满足 $r > r_2 > 1$, 由条件 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r > 1$ 推出, 存在正整数 N_2, 使当 $n \geqslant N_2$ 时, 有 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > r_2 > 1$, 即 $a_{n+1} > a_n$. 根据级数收敛的必要条件推出 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散.

注　在达朗贝尔判别法中, $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ 或 $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ 时, 都推不出级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 是收敛或发散. 例如, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$, 它们对应的 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 和 $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 都为 1, 但前者发散, 而后者却收敛.

(4) 柯西判别法: 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 是正项级数, 且 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{a_n} = \rho$, 则当 $\rho < 1$ 时, 级数收敛; 当 $\rho > 1$ 时, 级数发散.

证　设 $\rho < 1$, 取 ρ_1 使得满足 $0 \leqslant \rho < \rho_1 < 1$, 则由 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{a_n} = \rho$, 存在数 $N_1 > 0$, 使当 $n \geqslant N_1$ 时, 有 $\sqrt[n]{a_n} < \rho_1 < 1$, 即 $a_n < \rho_1^n$. 由此, 从等比级数 $\sum \rho_1^n(\rho_1 < 1)$ 的收敛性及比较判别法推出原级数收敛.

设 $\rho > 1$, 取 ρ_2 使得满足 $\rho > \rho_2 > 1$, 则由 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{a_n} = \rho$ 推出, 存在序列 $n_k \to +\infty$, 使 $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > \rho_2 > 1$, 即 $a_{n_k} > \rho_2^{n_k} \to +\infty$. 由此, 从级数收敛的必要条件推出原级数发散.

当 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{a_n} = 1$ 时, 无法推出级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 是收敛还是发散, 如级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 就是一个发散, 另一个收敛的例子.

一般地说, 柯西判别法要比达朗贝尔判别法的适应范围广一些. 事实上, 有下列结果: 设 $a_n > 0$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$, 则有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \rho$. 事实上, 利用 $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ln\rho$, 根据算术平均数的极限值的已知结果, 就有

$$\lim_{n\to+\infty}\ln\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln a_1 + \ln\dfrac{a_2}{a_1} + \cdots + \ln\dfrac{a_n}{a_{n-1}}}{n} = \ln\rho.$$

由此就得到 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \rho$.

这就说明了, 若级数满足达朗贝尔判别法中的条件 (极限形式), 则它就一定满足柯西判别法中的条件, 因此柯西判别法的适应范围更广. 但是应当指出, 在实际中, 达朗贝尔判别法用起来比较方便.

如果分析一下达朗贝尔判别法及柯西判别法可以看出, 在判别收敛性时, 它们都与一个收敛的等比级数相比较且证明比这个等比级数收敛得更快; 判别发散时,

证明了级数的一般项不趋于零. 因此, 如果我们遇到一类级数, 虽然它收敛, 但不比等比级数收敛得快或它发散, 但是一般项却趋向于零, 在这两种情况下, 这两个判别法就自然失效了. 这些都对应着判别法中 $r=1$ 或 $\rho=1$ 的情况, 如级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 就属于这两种情况. 因此, 为了要进一步解决这两个问题, 这就需要找一个收敛级数, 它比等比级数收敛得慢, 而用它来作为判断级数的收敛性的比较级数; 而在判断一个级数是否发散时, 就需要找一个一般项趋向于零的发散级数来比较. 这样就能得到更细致的判别法. p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ 就能起到这样的作用, 因为它在 $p>1$ 时收敛且在 $p\leqslant 1$ 时发散.

取 $b_n=\frac{1}{n^p}$, 则用泰勒公式就得到

$$\begin{aligned}\frac{b_n}{b_{n+1}}&=\left(1+\frac{1}{n}\right)^p=1+\frac{p}{n}+\frac{p(p-1)}{2!}\left(1+\frac{\theta}{n}\right)^{p-2}\frac{1}{n^2}\quad(0<\theta<1)\\&=1+\frac{p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\quad(n\to+\infty),\end{aligned}$$

并且当 $s>p$ 时, 必存在 N, 使当 $n>N$ 时 $1+\frac{s}{n}-\frac{b_n}{b_{n+1}}=\frac{s-p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)>0$, 即 $1+\frac{s}{n}>\frac{b_n}{b_{n+1}}$.

由此可以证明以下结论.

(5) 拉贝判别法: 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 是正项级数, 令 $R_n=n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}-1}\right)$. 有

(i) 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}R_n=\mu>1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛;

(ii) 若存在数 N_1, 当 $n>N_1$ 时有 $R_n\leqslant 1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散.

证 (i) 由 $\lim\limits_{n\to+\infty}R_n=\mu>1$ 知, 任给 s, $\mu>s>1$, 存在自然数 N_2, 当 $n>N_2$ 时, 就有 $\frac{a_n}{a_{n+1}}\geqslant 1+\frac{s}{n}$, 取 p 满足 $s>p>1$ 及 $b_n=\frac{1}{n^p}$, 则由上述不等式及 $1+\frac{s}{n}>\frac{b_n}{b_{n+1}}$ 得 $\frac{a_n}{a_{n+1}}\geqslant\frac{b_n}{b_{n+1}}$. 由此, 根据级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ 的收敛性及比较判别法就证明了级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 的收敛性.

(ii) 由 $R_n\leqslant 1$ 知, 当 $n>N_1$ 时, 有 $\frac{a_n}{a_{n+1}}\leqslant 1+\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\Big/\frac{1}{n+1}$. 由此, 根据级

数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 的发散性及比较判别法就证明了级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 的发散性. 证毕.

例 1 考察级数

$$1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)},$$

其中 α,β,γ 都是常数, 且 γ 不是负整数.

显然

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}\to 1.$$

因此, 达朗贝尔判别法失效. 若用拉贝判别法, 有

$$R_n=n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)=n\frac{\gamma-\alpha\beta+(1+\gamma-\alpha-\beta)n}{(\alpha+n)(\beta+n)}\to 1+\gamma-\alpha-\beta.$$

因此, 当 $\gamma>\alpha+\beta$ 时, 级数收敛; 当 $\gamma<\alpha+\beta$ 时, 级数发散. 但是当 $\gamma=\alpha+\beta$ 时, 拉贝判别法也失效. 这说明了拉贝判别法也有局限性. 若要想进一步推广这个判别法, 就需要找一个比 p 级数收敛的更慢的级数以及另一个比调和级数发散的更慢的级数. 我们就不准备进一步再讨论了.

比较达朗贝尔判别法及拉贝判别法, 就可以将它们统一成:

若 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\dfrac{\mu}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, 则当 $\lambda>1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛; 当 $\lambda<1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散; 当 $\lambda=1$ 时, 若 $\mu>1$, 则级数收敛; 若 $\mu<1$ 时级数发散, 当 $\lambda=1$ 且 $\mu=1$ 时, 则用拉贝判别法也无法判断此级数是收敛还是发散.

如果正项级数的一般项单调下降地趋于零, 则在下面有更简单的判别法, 并且还可以对级数的余项进行估计.

(6) 柯西积分判别法: 设函数 $f(x)$ 在 $x\geqslant 1$ 时是非负及单调下降的, 令 $a_n=f(n), n=1,2,\cdots$, 则正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛的充要条件是积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 且在收敛的情况下, 其余项 $r_n=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}a_k$ 有估计式

$$\int_{n+1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\leqslant r_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}a_k\leqslant f(n+1)+\int_{n+1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x.$$

证 由于当 $k\leqslant x\leqslant k+1$ 时, 有 $f(k+1)\leqslant f(x)\leqslant f(k)$, 因此

$$a_{k+1}=f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(k)=a_k,$$

从而得

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{1}^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

即

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k - a_1 \leqslant \int_{1}^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

由此看出, 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 则由上式中的右边不等式看出, 积分 $\int_{1}^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$ 有界, 而这个积分是随着 n 而单调上升的, 设其界为 M. 因此对任意的数 A, 令 $[A] \leqslant A < [A]+1$, 利用 $f(x) \geqslant 0$, 就有 $\int_{1}^{A} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{1}^{[A]+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant M$. 显然, 左边的积分看成 A 的函数时是 A 的单调上升函数, 因此当 $A \to +\infty$ 时有极限, 即 $\int_{1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

反之, 若 $\int_{1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则由上式中的左边不等式看出, $\sum\limits_{k=1}^{n+1} a_k$ 有界, 也由于它是单调上升的, 因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

由 $a_{k+1} = f(k+1) \leqslant \int_{k}^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant f(k) = a_k$ 还可以得到余项的估计式

$$\sum_{k=n}^{+\infty} a_{k+1} \leqslant \int_{n}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} a_k,$$

由此就得到所要证明的估计式. 证毕.

柯西积分判别法有简单的几何意义：积分 $\int_{1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 表示曲线 $y = f(x)(x \geqslant 0)$, x 轴与直线 $x = 1$ 所围无穷长曲边梯形 T 的面积 (图 11.1), $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ 表示外接于 T 的无穷长阶梯形面积, 也表示内接于 T 的无穷长阶梯形面积加上级数的第一项. 若 T 的面积有限, 则包含在 T 内的内接阶梯形面积也是有限的; 若 T 的面积无限, 则包含 T 的外接阶梯形面积也是无限的.

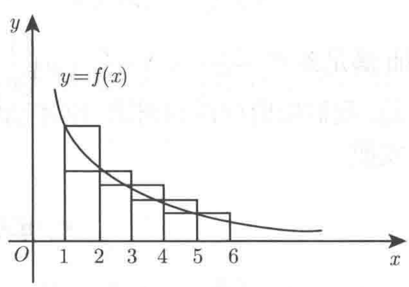


图 11.1

例 1 用柯西积分判别法证明: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^p} \begin{cases} \text{收敛}, & p > 1, \\ \text{发散}, & p \leqslant 1. \end{cases}$