

# 集合論導引

黎蒲樹 著

劉福增 譯

牧童邏輯叢刊 6

牧童出版社



# 集合論導引

黎蒲樹 著  
劉福增 譯

牧童邏輯叢刊 6  
牧童出版社

SET THEORY  
AND RELATED TOPIC

BY SEYMOUR LIPSCHUTZ

TRANSLATED by FU-TSENG LIU

COPYRIGHT © 1978

COWBOY PUBLISHING CO., LTD.

TAIWAN

R. O. C.

集合論導引

牧童邏輯叢刊 6

---

原	著：黎	蒲	樹
譯	述：劉	福	增
主	編：劉	福	增
	編：洪	成	完
發行人：	牧童出版	版	社

臺北市興隆路一段184巷2弄3號  
郵政劃撥臺北 18705 號

登記證：局版臺業 [ ]  
每册定價：新 臺 [ ]  
初 版：中華民國 55 年 11 月 (水牛)  
牧童一版：中 華 民 國 6 7 年 9 月

---

P1500978 ◀版權所有・不許翻印▶ S1500

# 集合論叢書

## △作者簡介

劉福增 臺灣新竹人。國立臺灣大學大學部、研究所畢業。美國加州大學研究院畢業。現任教國立臺灣大學。在加州大學研究期間，從當代邏輯大師丘崎 (A. Church) 學數理邏輯、邏輯哲學、數理哲學及語言哲學；從國際著名邏輯家 C. C. Chang 學集合論；從國際知名哲學家 K. Donnellan 學語言哲學。此外，他目前興趣還兼及政治哲學及社會哲學。

## △著作

現代邏輯引論 (編譯 裴森與奧康納原著 商務版)

集合論導引 (譯 黎蒲樹原著 牧童版)

命題演算法 (編譯 倪里崎原著 牧童版)

現代邏輯與集合 (譯述 修斐士原著 牧童版)

數理邏輯發展史 (編譯 倪里崎原著 牧童版)

集合、邏輯、與設基理論 (譯述 史陶原著 牧童版)

邏輯觀點 (自撰 牧童版)

初級數理邏輯 (譯述 修斐士和席爾合著 水牛版)

符號邏輯導引 (譯述 波洛原著 牧童版)

邏輯探討 (第一集) (自撰 牧童版)

## “牧童邏輯叢刊”編起

邏輯自亞里士多德創建以來，已有兩千三百年的歷史。但是直到十九世紀布爾和弗列格以後，邏輯才有現代的研究。在本世紀裡，邏輯研究和數學基礎研究一直緊密關連着。數學基礎的問題和觀念，對邏輯的發展有許多幫助；而邏輯在數學基礎的探究中，是一種首要工具。

近二十多年以來，這些學問的研究，日益迅速發展，並有豐富的成果。現在邏輯及數學基礎不僅本身已發展成典型的科學，而為人類理性最根層最艷麗的一種表現，並且對人類其它知識的塑造，具有震撼性和基礎性的沖擊作用，並提供一支有力的解析、操作和建構的工具，及各色各樣新的意義，和種種可能發展的路向。

我們的目標是以叢刊的形式，用清晰的現代中文，把邏輯和數學基礎，以及其直接相關的知識和理論，介紹和傳播給讀者。

這個叢刊主要將包括下列學科：

- (1) 數理邏輯及其後設理論，例如，證明論和模型論。
- (2) 數學基礎之分析，例如，集合論和構作論。
- (3) 語意學與記意學，及關於科學基礎與哲學基礎之語言分析與理論。
- (4) 自制理論，訊息理論，交播理論等在知識論方面的運用及其意義。
- (5) 數學哲學與邏輯哲學。
- (6) 歸納邏輯之基礎。
- (7) 語言哲學及其應用。

劉福增 洪成完

國立臺灣大學

## 修訂三版譯序

本書出版將近十二年了。過去重版至少在十次以上。本書恐怕是臺灣三十年來，在一般中文數學書籍中銷行最多的一本。我知道許多優秀的高中生會拿本書當參考；許多大學生會利用本書學集合論。中學數學教師研習班以及一些大學，也使用本書當課本。經由本書，我認識了許許多多好學之士。這是我人生中一大樂事。

集合論自康托(Cantor, 1845—1918)創設以來，已有八十多年的歷史。在當代數學的偉大成就中，它是其中最瑰麗的部門之一。在世界第一流大學研究院的課程上，一年也講不完。當然，本書所討論的只是最基本的部份。到目前為止，本書仍然是一般修習基本集合論最佳課本和參考書。

自去年六月起本人已把本書版權自水牛出版社收回，並交給牧童出版社出版發行。現在赴重版機會做了一些修正。主要是把「命辭」改為「命題」；把「敘辭」改為「敘說(述)」；把「否定」改為「否言」；把「條件式」改為「如言」；把「辨量詞(記號)」改為「量詞(號)」；把「套套邏輯」改為「套套言」；把「外範」改為「範程」。讀者如果發現需要修正的地方，非常歡迎來信指教。

劉 福 增

國立臺灣大學

1978年5月25日

## 譯 序

我譯這本書主要是由兩種興趣所喚起的：一種是研究邏輯；另一種是推廣“新數學”。

先說推廣新數學。

臺灣的高級中學從去年（1965）開始實施新數學的教育。這是數理的觀念世界上的一件大事。因為新數學叫我們用新的模式來了解數理世界。那末什麼是新數學呢？新數學與“舊”數學的不同，不在別的而主要在新數學具有下面兩個特色：

第一、以集合為基本的或始原的概念來建造數學；

第二、注重數學之基本的邏輯結構。

新數學既以集合為基本的概念來建造，那末，如果我們要學好新數學，就非徹底了解集合及與集合有關的理論不可。實際上，如果我們能徹底了解集合的理論，則對新數學的面貌和體態就可知之大半了。

爲了幫助大家了解新數學，所以我譯這本集合的書。

臺灣目前雖還沒有普遍實施新數學的教育，但這並不是說沒有這個必要。主要是因爲師資的問題而已。在美國已經普遍從幼稚園開始用集合的概念來講數學了。相信在不久的將來我們也會從幼稚園開始用集合的概念來講數學的。所以現在的小學教師及初中的數學教師，最好乘早接近有關集合的知識，不久你就要用到它的。此外一般對知識有趣味的人士也最好看看集合的書。不然將來就無法跟年青的一代在數理世界上打交道了。

近年來歐美方面有關集合論的書籍日益增多。在我已經看到的英文版和日文版的十幾種集合論的書當中，我認爲黎蒲樹(Seymour Lipschutz)著的“集合論及有關的論題”(Set Theory and Related Topic)一書最適合一般學集合論的人參考。所以，我譯了這本書，定名爲“集合論導引”。本書的特色是：(1) 從最簡單的集合概念講起；(2) 定義，定理及原理的敘述非常清楚；(3) 用許多精選的例子及圖樣說明定理及定義的含義；(4) 內容相當完整。要讀這本書並不需要具備怎樣了不起的數學知識。只要具有初中程度的數學知識再加上一些抽象的能力就讀得懂本書了。但這並不是說本書的程度只到中學爲止。本書的程度幅度很大。自淺至深，從高中到大學的程度。對一般不是專門研究數學基礎或邏輯的人，本書範圍內的集合知識，已經很够用了。

#### 4 集合論導引

如果讀者之中想對集合論做進一步的研究，下面三本書是很好的讀物。這三本在臺灣都可買到。

1. Fraenkel. A. *Abstract Set Theory* (水牛版)
2. Suppes. P. *Axiomatic Set Theory* (新月版)
3. Gödel. K. *The Consistency of The Continuum Hypothesis* (泰西版)

其次說研究邏輯。

自十九世紀末期的弗列格(G. Frege)到二十世紀初期的羅素(B. Russell)，「數學基礎」的問題普遍被人所關注和探討。研究數學基礎的兩大支柱是集合論與邏輯。而集合論與邏輯這兩門學問不是分離的。它們的底層部分是可以「互相介紹」的，也就是可以互相定義的。因為可以互相介紹，所以要認識邏輯最好也來看看集合論。就是這個「因緣」使我接近了集合論。

把集合的概念當做一個最基本的概念來建造數學，現在已有可觀的成績。最近我一直在想，我們把集合的概念當做像數學這樣的形式科學(formal science)的一個基本的概念來使用外，可不可以也把它用來建造經驗科學(empirical science)? 如果可以的話，是不是意味着形式科學與經驗科學有一個共同的基礎? 如果我們能找到這樣的形式科學與經驗科學的「兩棲概念」(amphibious concept)，這在人類知識的建造史上必定是件大事。我現在正在想着，搜索着。

我的學生劉成石，林鈺堂，王寶梅，洪滿惠和丁亞雯等幾位臺大的同學，以及臺北建國中學的黃文元同學，曾幫忙抄寫和校對本書的工作。劉君精細的校對使本書減少不少錯處。林君在本書的完成上花過僅次於我的時間。現在我一一向他(她)們說謝。

在本書的譯作過程中，我時常回憶我的學園生活。我不時會想起我的母校新竹中學和想起母校的校長辛志平先生和我的數學老師彭商育先生。當人生的閱歷愈多時，我愈會想念他們來。現在就把這本書獻給他們吧!

劉 福 增

1966年10月7日

國立臺灣大學



## 原 序

集合論是數學的基礎。集合論裡的概念，諸如函應與關係等等，都或隱或現地出現在數學的每一分支裡。本書是以非形式的，非公設化的方式來處理集合論的。

本書的內容分作三部；因為省著本書被當作各種程度的教科書和參考書的用處增加時，本書裡面的邏輯的發展不致受到擾亂。部 I 含有初等集合運算的介紹和函應及關係概念的詳細的討論。部 II 是以康脫的古典方式來發展基數與序數的理論。部 II 也討論半序集合與選擇公設及榮恩引理等。部 III 是討論一些通常與初等集合論關連的論題。當然，本書對某些論題的特殊的處理方式是受作者的偏好所影響的。例如我們在關係之前就引進函應而不先把函應定義成順序對集合。

本書的寫法是，每章先對有關的定義，原理及定理做清楚的敘述。在敘述定理時還舉例說明，並加其它描述的材料。然後再提出許多附有解答的問題。這些附有解答的問題，一方面是用來例示理論及加強對理論的了解。並把理論的焦點顯示出來，以便增進讀者對理論的貫通；另一面是用來重複基本原理使之活用，以便增加學習的效能。許多定理的證明及定理的基本結果的推衍包含在這一部份裡。補充問題是用來對各章所講的題材做一完整的複習。

本書所取的題材要比一般初級課程上的多得多。這是為使本書更富於變通，成為更有用的參考書，以喚起讀者更進一步的學習興趣。

我們推出下面一些參考書。我們尤其推薦 Halmos 和 Kamke 的做為本書部 II 的補充讀物。

Bourbaki, N., *Theorie des Ensembles*, Hermann, Paris, 1958

Halmos, P. R., *Naive Set Theory*, Van Nostrand, 1960

Hausdorff, F., *Set Theory*, Chelsea, 1957

Kamke, E., *Theory of Sets*, Dover, 1950

Kuratowski, C., *Introduction to Set Theory and Topology*, Addison-Wesley, 1962

Natanson, I.P., *Theory of Functions of a Real Variable*, Chap. 1, 2, 14, Ungar, 1955

在這兒我要向許多對本書的原稿做非常寶貴的建議和批評的朋友和同事致謝。尤其要感謝邵莫出版公司 (Schaum Publishing Company) 編輯朋友的卓絕的合作。

黎 蒲 樹

(Seymour Lipschutz)

美國布魯克林工藝學院

(Polytechnic Institute of Brooklyn)

1964年1月

# 目次

修訂三版譯序

譯序

原序

## 部 I 初等集合論

### 第一章 集合與子集合..... 3

- 集合(3)                    記法(3)
- 有限集合與無限集合(4)                    集合的相等(5)
- 空集合(5)                    子集合(5)                    眞子集合(6)
- 可比較性(7)                    定理與證明(7)                    集合之集合(7)
- 字集(8)                    巾集合(8)                    集合的互質(8)
- 范恩圖解(9)                    直線圖解(9)
- 集合論之公設化的發展(10)

### 第二章 集合的基本運算..... 22

- 集合運算(22)                    聯集(22)                    交集(23)
- 差集(24)                    補集(24)
- 可比較集合上的運算(26)

### 第三章 數集合..... 37

- 數集合(37)                    實數(37)                    整數(37)
- 有理數(38)                    自然數(38)                    無理數(38)
- 數系的直線圖解(39) 小數與實數(39)                    不等式(39)
- 絕對值(40)                    區間(41)                    區間的性質(42)
- 無限區間(42)                    有界集合與無界集合(43)

### 第四章 函應(函數)..... 55

- 定義(55)                    映像(56)                    函應的相等(56)

## 2 集合論導引

- 值域 (57)                      一一函應 (57)                      映成函應 (58)  
同一函應 (58)                      常元函應 (58)                      積函應 (59)  
函應積之可結合性 (60)                      函應之逆 (61)  
逆函應 (62)                      逆函應的定理 (63)

## 第五章 積集合與函應之圖形…………… 81

- 順序對 (81)                      積集合 (81)                      坐標圖 (82)  
函應之圖式 (82)                      函應圖式的性質(83)圖式與坐標圖 (84)  
坐標圖上函應圖形的性質 (84)  
當順序對看的函應 (85)                      一般化的積集合 (86)

## 第六章 關係…………… 97

- 開放語句 (97)                      關係 (97)  
解集合與關係的圖式 (99)                      當順序對看的關係 (99)  
逆關係 (100)                      自反關係 (101)                      對稱關係 (101)  
反對稱關係 (102)                      傳遞關係 (102)                      等價關係 (103)  
關係的定義域與值域 (103)                      關係與函應 (104)

## 第七章 進一步的集合理論……………

- 集合代數 (122)                      對偶原則 (123)                      加標集合 (124)  
推廣運算 (125)                      分割 (126)                      等價關係與分割 (127)

## 第八章 進一步的函應理論, 運算理論…………… 135

- 函應與圖解 (135)                      函應的限定和擴張 (135)  
集合函應 (136)                      實數值函應 (137)  
實數值函應的代數 (137)                      極大定義域規則 (138)  
特徵函應 (139)                      選擇函應 (140)                      運算 (141)  
可交換的運算(141) 可結合的運算(141) 可分配的運算 (141)  
單位元素 (142)                      逆元素 (142)                      運算與子集合 (143)

## 部 II 基數, 序數, 與超限歸納法

## 第九章 基數…………… 157

對等的諸集合 (157) 可付番集合 (158) 連續體 (160)  
 基數 (160) 基數算數 (161) 不等式與基數 (163)  
 康脫定理 (164) 史-彭定理 (164) 連續體假設 (165)

## 第十章 半序集合與全序集合 ..... 175

半序集合 (175) 全序集合 (172)  
 順序集合的子集合 (177) 全序子集合 (178)  
 最初元素與最後元素 (178) 極大元素與極小元素 (179)  
 上界與下界 (180) 相似的諸集合 (181) 順序型 (183)

## 第十一章 整序集合 序數 ..... 194

整序集合 (194) 超限歸納法 (195) 極限元素 (195)  
 始節 (196) 整序集合與其子集合之間的相似 (196)  
 整序集合之比較 (197) 序數 (197)  
 不等式與序數 (198) 序數加法 (199) 序數乘法 (200)  
 序數的結構 (201) 序數的輔助構造 (202)

## 第十二章 選擇公設 榮恩引理 整序可能定理 ..... 209

笛氏積與選擇函應 (209) 選擇公設 (209)  
 榮恩引理 (210) 整序可能定理 (210) 基數與序數 (210)  
 阿類富 (211)

## 第十三章 集合論裡的詭論 ..... 215

引語 (215) 一切集合的集合 (康脫的詭論) (215)  
 羅素的詭論 (215)  
 一切序數的集合 (布拉里-弗弟的詭論) (215)  
 一切基數的集合 (216)  
 一切與某一集合對等的集合的集合族 (216)  
 一切與某一整序集合相似的集合的集合族 (217)

<b>第十四章 命題代數</b> .....	221
敘說 (221)	連言 (221)      選言 (222)
否言 (223)	如言 (223)      雙如言 (224)
多項式與布氏多項式 (225)	命題與真值表 (226)
套套言與矛盾言 (229)	邏輯的等值 (230)
命題代數 (231)	邏輯的涵蘊 (232)
邏輯地真與邏輯地等值敘說 (234)	
<b>第十五章 量詞 (號)</b> .....	249
命題函應與真值集合 (249)	全稱量詞 (249)
存在量詞 (250)	含量詞的命題之否定 (251)
反例 (252)	記法 (252)
含一個以上變元的命題函應 (252)	
<b>第十六章 布氏代數</b> .....	258
定義 (258)	布氏代數裡的對偶性 (259)
基本定理 (259)	布氏代數裡的順序 (259)
開關線路設計 (260)	
<b>第十七章 邏輯的推論</b> .....	270
論證 (270)	論證與范恩圖解 (270)
論證與命題 (271)	論式與量號 (272)
如言敘述與其變換 (273)	
<b>補充問題解答</b> .....	281
<b>索引</b> .....	304
中文英文.....	304
英文中文.....	309

部 I

初等集合論





# 第一章 集合與子集合(部分集合)

## 集 合

在所有數學的分支裡，一個基本的概念是集合這一概念。從直覺上看，一集合 (set) 是任何性質確定好的一列 (list)，一聚合 (collection)，或一類 (class) 的事物。從我們下面要舉的例子裡，可以看出，集合裡的事物是什麼都可以的。比方說，數，人們，字母，河川，等等都可以。這些集合裡的事物叫做集合的元素 (elements) 或分子 (members)。

雖然我們將把集合當做抽象的元目 (entities) 來研究，現在為容易了解起見，我們列舉十個集合的特殊事例來看看。

例 1.1 數 1, 3, 7 與 10。

例 1.2 方程式  $x^2 - 3x - 2 = 0$  的解。

例 1.3 英文母音字母:  $a, e, i, o$ , 與  $u$ 。

例 1.4 活在地球上的人。

例 1.5 學生 Tom, Dick 與 Harry。

例 1.6 缺席的學生。

例 1.7 英國、法國和丹麥這些國家。

例 1.8 歐洲各國的首都。

例 1.9 數 2, 4, 6, 8, ……

例 1.10 在美國的河川。

上面各奇數例子裏的集合是由實際地列出集合的分子來定義的。這也就是說，用實際地列出集合的分子來表明該集合。而偶數例子裏的集合則由敘述性質來定義。這也就是說，用某些規則來決定某一特殊事物是否是此集合的一個分子。

## 記 法

通常我們常用英文大寫字母來表示集合，例如：

$$A, B, X, Y, \dots$$

又用小寫字母來表示集合裡的分子，例如：

$$a, b, x, y, \dots$$

如果我們用實際地列出某一集合的分子來定義該集合，比方說，設  $A$  由數字 1, 3, 7 與 10 所構成，則寫成