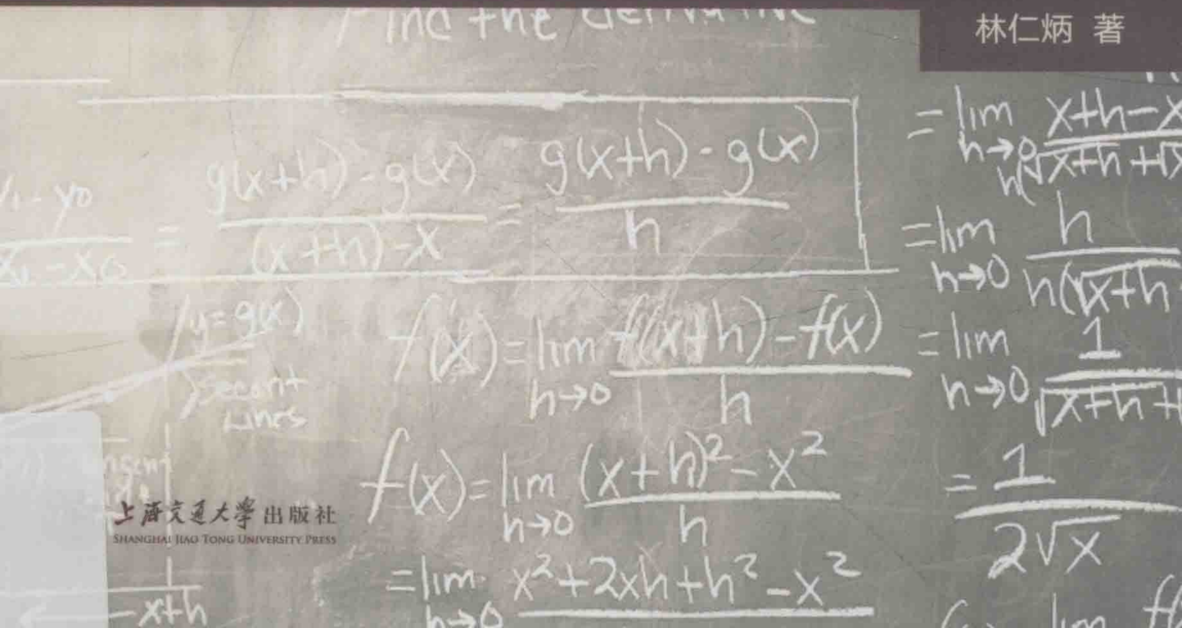
数学史与数学教育关系

HPM视角下

微积分思想方法溯源

林仁炳 著



上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

HPM 视角下微积分思想方法溯源

林仁炳 著

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书在 HPM(数学史与数学教育关系)视野下,对微积分中的重要概念、基本理论与基本方法的形成、发展与应用进行探讨,为在微积分教学中如何化解难点、突出重点,并激发学生的学习兴趣提供思路与方法。本书内容主要涉及实数、函数、极限、微积分基本定理、微积分符号体系、级数收敛性、调和级数以及万有引力与开普勒定律的关系等内容。

本书可以作为大学数学教师从事微积分教学与研究的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

HPM 视角下微积分思想方法溯源 / 林仁炳著.
—上海:上海交通大学出版社,2015
ISBN 978-7-313-13692-3

Ⅰ. ①H… Ⅱ. ①林… Ⅲ. ①微积分
Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 206161 号

HPM 视角下微积分思想方法溯源

著　　者:林仁炳
出版发行:上海交通大学出版社　　地　　址:上海市番禺路 951 号
邮政编码:200030　　电　　话:021-64071208
出 版 人:韩建民
印　　制:虎彩印艺股份有限公司　　经　　销:全国新华书店
开　　本:710mm×1000mm　1/16　　印　　张:13.75
字　　数:260 千字
版　　次:2015 年 9 月第 1 版　　印　　次:2015 年 9 月第 1 次印刷
书　　号:ISBN 978-7-313-13692-3/O
定　　价:38.80 元

前　言

作为一名教师经常会思考这样的问题：如何激发学生学习大学数学的兴趣、提高大学数学教学质量呢？HPM为这一老问题提供了新的视角，它意指数学史与数学教育之间的关系，通过数学历史的运用，提高数学教育的水平. 它的理论基础就是历史发生原理，即个体知识的发生遵循人类知识发生的过程. 历史发生原理在数学教育上也可表述为：个体数学理解的发展遵循人类数学思想的历史发展顺序. 其教育意义在于，表明了学习者的有效学习要回溯学科历史演进的主要步骤. 大学数学的绝大部分知识在19世纪以前都已建立起来，因此，它的历史文化内涵是极为丰富的，而通常的教材都只是注重知识的逻辑结构，并不去理会知识的形成过程和文化背景. 正如荷兰著名数学教育家弗赖登塔尔所说“把火热的发明变成了冰冷的美丽”. 这也是英国著名心理学家科斯特勒所抨击的那样，通常的教材将人类的探索过程归结为一堆干巴巴的定理，从而大大降低学生的学习兴趣，甚至怀疑学习的价值与意义.

微积分是大学数学的入门课程，历史上很多知名学者都对微积分在数学学习与高等教育中的作用予以很高的评价. 恩格斯曾经说过，“在一切理论成就中，未必再有什么像17世纪下半叶微积分发现那样被看作人类精神的最高胜利了. 如果在某个地方我们看到人类精神的纯粹的和唯一功绩，那就正是在这里”. 另一位著名数学教育家柯朗也对微积分有过很高的评价. 他指出，微积分学是人类思维的伟大成果之一. 它处于自然科学与人文科学之间的地位，使它成为高等教育的一种特别有效的工具. 可是现在很多的大学生不以为然，根本找不到这样的感觉，他们总感觉微积分教学就是从定理到定理，是抽象、枯燥、刻板的智力游戏，并没有什么实际价值. 在不少人看来，数学离他们是很遥远的. 有大学生经常会提出这样的问题：数学学了有什么用？其实，大学生会产生这些想法，归根结底是学习困难造成的，如果学习没有困难，自然就不枯燥了，就有学习兴趣了，就不会怀疑数学有什么用的问题了. 全世界几乎每一所知名大学，包括艺术院校都在开设数学课程，数学的价值与意义不容置疑.

大学生在微积分学习中到底存在哪些困难？根据本人的教学经验大致有这几类：有些是历史的原因，古今中外的学习者都会存在，如极限的$\varepsilon-N$定义，这就需要从HPM视角对这些问题进行剖析；有些是由于基础不够，造成理解困难，这就需要及时补充；还有些是学习方法上不适应，在学习过程中“见木不见林”现象是很普遍的. 特别是大学新生还有一些可能是个性差异，兴趣不同，这是个例，要因人而异，也需要恰当的指导与引领. 这些问题都需要合适的读物，本书就愿意做这样的尝试.

极限的概念与方法是现代微积分的理论基础和基本方法，不过无论是牛顿还是莱布尼兹都没有将微积分建立在极限理论的基础之上. 直到19世纪20年代数学家们开始认识到极限是微积分的真正基础，关于微积分严密化的工作才走上正轨. 从波尔查诺、阿贝尔、柯西、狄利克雷等人的研究开始，直到魏尔斯特拉斯、戴德金和康托彻底完成，中间经历了近半个世纪，他们才为微积分奠定了一个严格的基础，并消除了数学史上的第二次危机. 从此以后极限严格定义($\varepsilon-N(\delta)$定义)成为微积分的逻辑基础，同时极限$\varepsilon-N(\delta)$定义成为几乎全世界的大学生都要碰到的共同难题. 现在很多学校采取的策略是跳过去，或者绕过去. 无论是“跳过去”还是“绕过去”到后面都是要“还的”，这样的处理方式会增加后面内容的理解困难，甚至造成学习微积分的永久性的障碍. 可是教材不可能用很多的篇幅来解释极限概念的产生的背景、形成过程以及它对消除第二次数学危机的作用. 本书弥补了这个缺陷，对这方面的历史背景进行很好的梳理. 对于函数的连续性的讨论，无论是数学专业学生还是理工科学生，一般教材都是简单地给出结论，以降低学习难度，这样容易产生对这些重要结论从何而来，用于哪里的困惑，本书给出了详细的解释与初等证明. 希望这本书无论是对教师，还是对学生特别是对基础不够扎实的学生给予实在可行的帮助.

微积分分为微分学与积分学. 微分学讨论微分运算与微分概念. 微分运算就是已知函数求变化率(导数)，微分概念就是以直代曲，以切线微段来代替曲线微段的思想体现. 积分学讨论定积分的概念与积分运算. 定积分的概念就是已知函数进行化整为零再求和的累积效果，积分运算就是利用微积分基本定理将求定积分转化为求微分运算的逆运算来进行，从而使得微分学与积分学成为一个整体理论. 一般的教材都是从知识点的逻辑顺序展开，初学者容易产生“见木不见林”的现象. 本书从宏观的角度，引导读者对微积分的核心概念与基本理论进行整体把握，帮助读者在学习过程中达到“既见木又见林”的效果.

级数是微积分教材中的重要内容，在级数理论形成初期，数学家们所犯的错误就是将有限情形的运算简单地推广到无限情形，于是出现一系列似是而非的矛盾与困惑. 这些现象在当今大学生学习级数时，同样会出现. 因此，本书对级数收敛性概念以及级数收敛判别法进行全面的梳理，最后收录了一个用级数形式表示的处处连续处处不可导的例子，供读者学习时参考.

作为微积分的典型应用，本书第9章讨论了开普勒定律与万有引力定关系的初等证明，以及三级火箭发射人造卫星的数学模型.

浙江师范大学王基一教授在百忙中审阅初稿，并提出了宝贵意见和建议，在此表示衷心感谢！本书在写作过程中，参考了国内外相关研究的文献，在此一并表示感谢！

由于作者水平有限，书中存在纰漏及错误之处，敬请读者批评指正.

作者于浙江树人大学
2015年5月31日

目　录

第1章

HPM 简介

HPM的原名为"与ICMI共同合作的数学史与数学教学之间关系研究群"(International Study Group on Relations between History and Pedagogy of Mathematics, Cooperating with the International Commission on Mathematical Instruction, ISGHPM),起源于1972年在英国埃克塞特举行的第二届国际数学教育大会(ICME-2, the Second International Congress on Mathematical Education)上的一个工作组.这个有些繁琐的名称,于1984年在澳大利亚阿德莱德举行的第五届国际数学教育大会举行的关于数学史与数学教育关系的卫星会议上,被美国数学家麦瑟夫建议称为History and Pedagogy of Mathematics,简写为"HPM",于是HPM一直沿用至今.

1.1 HPM的兴起及缘由

数学是人类历史上最悠久的学科之一.在几千年的数学历史长河中,从远古时代的打结计数到当代发达的计算机技术,从尼罗河畔土地丈量到航天航空探测宇宙星球,从欧几里得几何到抽象公理体系,各种数学思想的形成、产生与发展,构成了人类思想史文明史上最富有魅力的思想源泉.数学是历史性最强的学科,新数学理论总是在继承和发展原先的数学理论的基础上建立起来,它们不仅不会推翻原有的理论,而且总是包容原先的理论.例如,数的理论的演进,从无理数、负数、虚数乃至四元数都表现出完全的积累性;空间的概念扩展,欧氏R^n、内积空间、赋范空间、距离空间、拓扑空间都表现出完全的包容性;现代分析中如函数、极限、连续、导数、积分等概念的推广均以其古典定义为特例.在数学的进化过程中,几乎没有发生过新理论的产生完全推翻旧理论的事例.数学教育相对于其他学科的教育表现出更多的积累性,数学学习每前进一步都要求有相应的基础与积累.数学科学的特性要求数学教育者要了解数学发展史,对数学概念的形成与发展有清晰的认识.

数学的发展不是一帆风顺的，在更多的情况下是充满犹豫、徘徊的，要经历艰难曲折，甚至会面临危机. 数学史是数学家们克服困难战胜危机的斗争记录，无理数的发现、微积分和集合论的创立在数学发展的征程中曾经出现过大的危机，如四色问题的证明、费马大定理和庞加莱猜想证明，这些小的危机与挫折在数学史上更是不胜枚举. 这些事例帮助人们了解数学创新的真实过程，对这种艰难曲折的创新过程的了解，则可以使得后来者从前人的探索与奋斗中吸取教益，获得自己学习和研究数学的信心与动力.

数学发展史有助于数学知识的学习. 荷兰数学家和数学教育家弗赖登塔尔(Freudenthal)精彩地指出，"没有一种数学的思想，以它被发现时的那个样子公开发表. 一个问题被解决后，相应地发展为一种形式化的技巧，结果把求解过程丢在一边，使得火热的发明变成冰冷的美丽[①]". 数学家发现数学的时候，是火热地思考着的，而教科书上呈现给大众的就是一种美丽而冰冷的数学. 因此在数学教育中通过数学史的融入，了解当时的数学家为什么和如何研究数学很有必要.

例如极限、微分、积分的概念，它们的产生和发展都具有特定的历史背景，而且是许多数学家经过长期的探索钻研，历经多次演变，才逐步形成和完善的. 如果对这些概念的背景缺乏了解，对它们的理解就显得很肤浅，往往就事论事，甚至在理解上会带来一些困难. 因此，了解数学产生和发展的历史背景，对理解数学是非常必要的.

在数学教学中，数学教师的任务不仅是要把书本上的内容讲清楚，还要对数学发展的来龙去脉有清楚的认识. 我国著名数学家吴文俊说过："假如对一个概念的来龙去脉，对一种重要思想的产生和影响等许多因素都弄清楚了，我想对数学就会了解得多，对数学的现状就会知道得更清楚、更深刻，还可以对数学的未来起一种指导作用[②]."其实，当我们学习了数学史后会发现，数学发展的实际情况与我们今天所学的数学课程是不一致的，通常的数学课本直接给出了一个系统的逻辑叙述. 现今中学所学的数学内容基本上属于 17 世纪微积分产生之前的常量数学知识，而大学所学的高等数学大部分内容是 17、18 世纪的变量数学知识. 这些数学教学内容已经过"千锤百炼"，是在科学性与教育性要求相结合的原则指导下经过反复推敲、实践而成的. 所以，要提高学生对数学的宏观认识，仅凭数学教材的学习，是难以了解数学的原貌与全景的，作为教师就必须宏观地把握数学发展的脉络，才能理解数学的本质. 许多数学家发明发现的生动过程，更有助于学生理解掌握数学创造的方法、技巧. 数学史融入数学教育使数学更加人性化，深化了大家对数学的理解，让人真正体会到数学并不神秘，数学是人人可学、人人可做、人人可用的. 其实，学

---

① (荷)弗赖登塔尔. 数学教育再探——在中国的讲学[M]. 上海：上海教育出版社，1995：15.

② 吴文俊. 在教育部的全国高校中外数学史讲习班开学典礼上的讲话[C]//中国数学史论文集(二). 济南：山东教育出版社，1986.

习数学是人类的一种文化生活.

我国中学数学教学大纲中明确指出："在教学中要注意阐明数学的产生和发展的历史，使学生了解我国和世界各国的古今数学成就，以及数学在现代科学技术、社会生产和日常生活中的广泛应用. 激发学生的学习兴趣和积极性，陶冶学生的情操，培养学生坚忍不拔的意志、实事求是的科学态度和勇于创新的精神. 帮助学生通过学习数学，养成良好的学习习惯，认识数学的科学意义、文化内涵，理解和欣赏数学的美学价值[①]."

当今的数学是由人类经历几千年的努力的结果，是人类思维与思想的结晶. 数学不仅是一种工具，而且是一种思维模式；不仅是一种知识，而且是一种素养；不仅是一种科学，而且是一种文化. 能否运用数学观念定量思维是衡量一个民族科学文化素质的重要标志，数学教育在培养高素质科学技术人才中具有独特的、不可替代的重要作用[②]. 数学是文化的传承的重要组成部分. 数学科学作为一种文化，不仅是整个人类文化的重要组成部分，而且是推进人类文明进步的重要力量. 对于每一个希望了解人类文明史的人来说，数学是必读的篇章. 古今中外的教育体系中，数学总是处在教育的核心内容中.

19 世纪末以来数学家、数学史家大力提倡数学史的教育价值. 美国著名数学史家卡约黎(Florian Cajori, 1859—1930)、美国著名数学史家和数学教育家史密斯(David Eugene Smith, 1860—1944)、意大利著名数学史家洛利亚(Gino Loria, 1862—1954)、丹麦著名数学史家邹腾(Hieronymus Georg Zeuthen, 1839—1920)、英国著名数学家德摩根(A. De Morgan, 1806—1871)、荷兰著名数学史家迪克斯特休斯(E. Jan Dijksterhuis)等欧美数学家、数学史家都大力提倡数学史的教育价值. 他们对在数学教学中如何使用数学史都各有论述[③]. 美国数学家和数学史家 M. 克莱因(Morris Kline, 1908—1992)十分强调数学史对数学教育的重要价值，他认为每一位中学和大学数学教师都应该知道数学史，其中最重要的一条理由是，数学史是教学的指南. 在克莱因眼里，数学史的重要程度可谓无以复加. 克莱因坚信，历史上数学家曾经遇到过的困难，学生在课堂上同样会遇到，因而历史对于课堂教学具有重要的借鉴作用. 他指出："数学绝对不是课程中或教科书里所指的那种肤浅观察和寻常诠释. 换言之，它并不仅仅是从叙述鲜明的公理推演出毋庸置疑的结论[④]."由此，不难看出，数学史对数学教育的意义已经被许多人认可. 如何借助数学史来改善教师的教学与学生的学习，已经成为许多数学家、数学史家、数学教育

---

① 全日制普通高级中学数学教学大纲(实验修订版)[S]. 北京：人民教育出版社，2009.

② 教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会. 高等学校工科数学基本要求[S]. 2003.

③ Fauvel J, Maanen J. V. History in Mathematics Education[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000: 45.

④ (美)M. 克莱因. 古今数学思想(第1册)[M]. 张理京，译. 上海：上海科学技术出版社，1979: 2-3.

家共同关注的问题.

对于在数学教育中使用数学史的问题至少可以追溯到1890年以前.格莱舍(J. W. L. Glaisher,1848—1928)在1890年就任英国科学促进协会主席发表的演讲中说:"任何试图将一门学科与它的历史割裂开来的话,我们确信没有哪一门学科比数学会损失得更多[①]."在1908罗马国际数学家大会上,法国数学家庞加莱(Henri Poincare, 1854—1912)在大会报告中指出:"如果我们想要预见数学的将来,适当的途径是研究这门科学的历史和现状[②]."德国数学家外尔(H. Wley)说过,"除了天文学以外,数学是所有学科中最古老的一门科学.如果不去追溯自古希腊以来各个时代所发现与发展起来的概念、方法和结果,我们就不能理解前50年数学的目标,也不能理解它的成就[③]".意大利数学史家洛利亚(Gino Loria, 1862—1954)是提倡在数学教学中使用数学史的前辈,特别是在教师培训方面.他赞同一个在当时广泛传播的观点,数学教师需要用高观点来重新审视初等数学的问题.

1.2 HPM的现代发展

1970年,HPM团队作为一个广泛传播的国际性的活动与组织才开始逐渐形成.它是伴随着一系列的学术会议及大量数学家、数学史家和数学教育家的不断参与而发展壮大的.在1972年的ICME上,由美国数学家琼斯(Phillip S. Jones)和罗杰斯(L. Rogers)组织的关于History and Pedagogy of Mathematics的会议上成立了ISGHPM, 后来隶属于1976年在德国卡尔斯鲁厄(Karlsruhe)举行的ICME-3.在ICME-3上,琼斯(Phillip S. Jones)和斯特沃斯(Roland Stowasser)的报告的题目是"以数学史为课程设计的关键性工具".在这次会议上,罗杰斯指出,参会者希望国际数学教育大会组委会能认识到数学史与数学教育研究的重要性以及大家对它的广泛兴趣,并且提交给ICMI秘书处一个方案,即提议建立一个体系来确保在将来的ICME上可以定期举办HPM会议.ICMI执行委员会在它随后的会议中附加了这个新的研究小组.

到了1978年,HPM团队的活动开始渗透到其他组织中.例如,在1978年举行的赫尔辛基(Helsinki)国际数学家大会(the International Congress of Mathematicians, ICM)上,产生了由弗莱格主持的"关于数学史与数学教育的关联"的分组会

① Siu Mank. The ABCD of using history of mathematics in the undergraduate classroom [A]// Katz V. Using History to Teach Mathematics: an International Perspective[C]. Washington: Mathematical Association of America,2000:3-8.

② 曲安京.中国数学史研究范式的转换[J].中国科技史杂志,2005(1):50-58.

③ Fulvia Fuinghetti. Histoty and mathematics education:a look around the world with particular Reference to Italy[A]// Wann-Sheng Horng. Proceedings of Asia-Pacific HPM 2004 Conference: History, Culture and Mathematics Education in the New Technology[C]. Taipei:National Taiwan University,2004:2-17.

议.在这次会议上,HPM研究小组明确了两个任务:公开传播数学史的信息与资源;在国际性的集会上,如ICM和ICME上举行讲座和研讨会.

在成立之初,这个研究小组的重要目标有以下几个:①探讨如何促进国内外接触与资讯交流,包括综合大学与师范院校的数学史课程及教材、数学教学中数学史的使用及其关系和不同层面对于数学史及数学教育的观点;②促进数学家、数学史家、大(中)学校数学教师、社会科学家以及数学的使用者的联合,来刺激各学科间的交流与研究;③促进对数学发展本身以及对数学发展有所贡献的事物的更深层了解;④将数学教学和数学史教学与数学的发展作连接,进而对于教学的改善和课程的发展有所助益;⑤提供数学教师可使用的各种资源,以及促进各种数学教学的研讨;⑥促进数学史料及相关领域的更多接触,促进数学家与数学教师对数学史和数学教学关系的共识;⑦确认传播数学史在文化发展中的重要意义.

HPM团队在以后的发展中,其团队成员包括了来自世界范围内的数学教育家、数学教师和数学史家,他们共同探究和研究数学史与数学教育的关系.HPM研究的目标是通过数学历史的运用,提高数学教育的水平.HPM关注的内容包括:数学与其他学科的关系、多元文化的数学、数学史与学生的认知发展、数学史与发生教学法、数学史与学生的困难、数学原始文献在教学中的应用等.

1980年以后HPM团队在全球范围内发展很快,1980年,ICME-4在美国柏克莱(Berkeley)举行.会上主要讨论:在中小学教数学时怎样使用数学史?作为教育的数学与哲学和科学史的关系是什么?每个主题作了4场报告.荷兰数学教育家弗赖登塔尔对在HPM中已经关注很久的“个体的发展重现种系的发展”给出自己简明的观点:数学史是一个不断系统化的学习过程.

先前的HPM会议,都是在国际性的大会中附加的,如ICM、ICME等.但是从1984年开始,HPM会议均以ICME卫星会议的形式举行,并把HPM卫星会议放在当年举办ICME的国家邻近的地点举行,这已形成了一个传统.HPM卫星会议是唯一集来自世界各地的关于数学教育中数学史的运用、数学史、数学教育史的报告会、研讨会、研究报告于一体的国际会议.参加HPM卫星会议的人士有数学史方面的研究人员,有数学教育领域的专家,也有将数学史运用到教学中的有实际经验的老师.ICME-10的HPM卫星会议在瑞典召开,不仅讨论到数学史在教学上之应用,也讨论到数学与艺术、数学与文学、数学与音乐等跨领域的关联.ICME-11于2008年在墨西哥蒙特雷举行.ICME-12于2012年在韩国首尔举行,2012年HPM会议在韩国大田国际会展中心召开.此次会议的主要内容包括:大会报告、专题讨论、工作坊展示、东亚数学及HPM研究状况等.此次会议的研究方向为:持续关注课堂教学与实践;重视实证研究并关注HPM领域的理论建构;关注教师的HPM培训与教育.这次HPM会议对中国开展HPM教学研究的启示有:加强职前及在职教师的HPM培训;深入开展HPM课堂教学实践研究及案例开发;增加

HPM领域的实证研究，建构研究的理论框架.

1.3 HPM视角下数学史与数学教育结合

在19世纪，人们将德国生物学家海克尔所提出的生物发生学定律——“个体发育史重蹈种族发展史”运用于教育领域中，于是提出，历史发生原理（history-genetic-principle）——个体知识的发生遵循人类知识发生的过程. 历史发生原理在数学教育上也可表述为，个体数学理解的发展遵循人类数学思想的历史发展顺序. 其教育意义在于，表明了学习者的有效学习要回溯学科历史演进的主要步骤. 历史发生原理是数学史与数学教育结合的理论基础. 历史发生原理强调，个体的数学认识过程会与人类的数学认识过程具有相似性，人类认识数学的历史对个体的数学认识活动具有极强的指导意义. 数学教学可以从数学史中汲取营养，借鉴经验，准确把握数学活动的本质，从而优化教学设计，加快个体的数学学习过程.

因此，在数学教育中，数学教师首先要对数学思想的形成与发展有足够的重视和充分的了解. 要对所教学科的思想方法有足够深切地理解，对思想方法的应用要有准确地把握. 以微积分为例，教师对微分学与积分学的思想方法既要知道从哪里演变而来，又要清楚这些思想方法用于哪些领域. 在教学中要把微积分思想的溯源以适当的方式传递给学生，要让学生大致了解微积分的思想方法从哪里来，用在哪些方面，这不但有利于学生的学习，也有利于思想方法的应用. 反之，若数学教师对微积分发展历史缺乏了解，学生更不知道，在教学中遇到阻力是必然的.

根据社会-历史的方法和文化传统，知识被认为是由人们所从事的活动而产生的文化调节的认知实践. 知识所提供的明确的内容被认为是经过思考，并由文化的唯理性元素构成的. 唯理性的模式直接与社会的、历史的以及符号的特征有关，并为个体活动创造了认知基础. 从社会文化的认知观点上看，知识必须通过关于理性的产生和个体的活动，并与它们社会的、历史的、物质的和符号的维度来理解.

由于数学对象并非物质世界中的真实存在，而是人类抽象思维的产物，因此数学是一种文化. 在社会文化的观点下，数学是文化空间的一个子空间. 数学的进步是人类社会文明的火车头. 在人类文明的几个高峰中，数学的进步是突出的标志：对于古希腊文明，《几何原本》是其标志性贡献；对于文艺复兴以后的科学黄金时代，牛顿建立微积分方法和力学体系为其最重要的代表；19—20世纪之交的现代文明，是以数学方法推动相对论的建立而显现的；至于今天正在经历的信息时代的文明，冯·诺依曼创立的计算机方案，是信息技术的基础和发展的源泉. 这些史实都表明数学文化与人类文明密切相关，学生对数学的理解被认为是沿着数学活动的线索、意义和概念在文化上以及智力上的占有过程. 正如沃洛斯诺（Volosinov）所指出的，“任何真正的理解在本质上是对话的”，意思是说理解的核心在于不同观

点的混合的记号语言的匹配，因为这种记号语言的匹配是处于情境中的，并且受到文化上的支持.首先需要把握不同观点的数学概念及其意义的产生与发展的过程，没有不同观点的把握就没有不同观点的混合，数学史是重建和解释过去的数学概念一个绝妙的工具.此外，知识的源泉(如活动和手段)、知识的意义和概念是历史性的和泛文化的建构产物，即现在的大多数学概念都是过去概念的转变、改编和转化的结果.这些过去的概念是由先前几代数学家在特定的情境下阐述而成的，数学史能帮助学生了解这些概念产生和发展的来龙去脉，为理解这些概念提供借鉴.

我们知道，影响学习者学习的心理学因素包括认知因素和非认知因素.直接参与数学学习认知活动的要素称为认知因素，包括原有数学认知结构、现有思维发展水平和数学能力等；不直接参与数学学习认知活动的因素称为非认知因素，包括兴趣、动机、情感和意志等.

数学史通过影响学生的认知因素来参与数学学习活动.数学史可以帮助学生加深对数学概念、方法和思想的理解.数学教育心理学指出，理解促进记忆，推动迁移.所以数学史影响学习中的记忆、迁移.有意义学习需要理解，数学史也促进有意义学习.认知结构是学习者头脑里的数学知识按照自己理解的深度、广度，结合自己的感觉、知觉、记忆、思维、联想等认知特点，组合成一个具有内部规律的整体结构.因此，数学史可以影响学生的认知结构.此外，数学史可以帮助学生体会活的数学创造过程，培养学生的创造性思维能力，所以说数学史将影响学生的思维发展水平、数学能力等，甚至是数学创新思维能力.认知结构、思维发展水平、数学能力都是影响学生学习的认知因素，所以数学史通过影响学生的认知因素来参与数学学习活动.

数学史通过影响学生的非认知因素参与数学学习活动.数学史可以帮助学生了解数学的应用价值和文化价值，明确学习数学的目的，增强学习数学的动力，树立科学品质，培养良好的精神，所以数学史通过影响非认知因素对数学学习起推动作用.从心理学的角度看，数学史全面地参与了数学学习活动，既通过影响认知因素来参与数学学习活动，又通过影响非认知因素来推动数学学习活动，进而直接影响数学学习活动中的记忆理解的深度和数学学习的成效.

从20世纪六七十年代开始，数学学习理论中的认知主义取代行为主义.美国教育心理学家布鲁纳提出了“发现学习”理论，强调学习进程是一种积极的认知过程，提倡知识的发现学习.他进行了大量的数学学习实验，并从中总结出四条数学学习原理，即建构原理、符号原理、比较和变式原理、关联原理.此外美国认知教育心理学家奥苏贝尔提出了,有意义学习”理论，美国教育心理学家加涅提出了“信息加工”学习理论.奥苏贝尔将之定义为:“有意义学习过程的实质，就是符号所代表的新知识与学习者认知结构中已有的适当观念建立非人为的和实质性的联系.”所谓非人为的和实质性的联系是指新的符号或符号代表的观念与学习者认知结构中

已有的表象、已经有意义的符号和概念或命题的联系. 加涅的学习理论认为,高级规则的学习以简单规则学习为前提,简单规则学习以概念学习为前提,概念学习以辨别学习为前提.

1.4 数学思想方法是数学史与数学教育的最佳结合点

数学思想方法是对数学知识内容及其所使用的方法的本质认识. 它蕴涵于具体的内容和方法之中,又经过提炼与概括,成为理性知识,直接支配数学教学的实践活动. 它在认识活动中被反复运用,具有普遍的指导意义,是建立数学和应用数学解决问题的指导思想. 数学概念的掌握、数学理论的建立和解题方法的运用,都是数学思想方法的体现和应用. 数学思想方法的形成过程就是数学史的产生与发展过程,没有数学思想方法的数学史是没有灵魂的数学史,没有价值的数学史. 根据历史发生原理,个体数学理解的发展遵循人类数学思想的历史发展顺序,数学教育的过程必须借鉴人类数学思想的历史发展顺序,从人类数学思想的历史发展顺序中得到启发,寻找数学教育的规律. 数学思想方法是数学史与数学教育的最佳结合点,是数学史指导数学教育的纽带.

首先,数学的历史就是数学思想方法的发展史,数学思想方法的发展是贯穿数学史的主线. 数学史刻画了数、函数、曲线、空间、极限、微分、积分、集合、对应、群、环、域等数学概念如何由生动的直观到抽象的思维的历史,反映从思维再到实践而逐渐发展、逐渐深刻地反映自然界的历史. 数学史揭示了一系列重要数学定理、数学方法产生的过程以及数学新分支发展的渊源,特别是提供了数学大师们创造性思维的范例. 从另一个角度来看,在数学发展的历史长河中,伴随着每次重大的数学发现都有重要的数学思想方法诞生. 数学每一步前进都是新数学思想对传统思想的斗争、决裂与继承.

其次,掌握数学思想方法是数学教育的核心价值所在. 数学教育的最终目的是为了培养学生的数学能力和数学思维,而数学能力与数学思维主要是通过掌握数学知识,灵活运用数学知识和数学思维方法形成的. 数学思想方法在学生的学习中起着非常关键的作用. 数学思想方法作为数学知识的精髓,是对数学本质的认识,是数学学习的指导思想和普遍适应的方法,是对数学对象本身与数学知识的高度概括和抽象. 数学思想方法是以元知识的形态与数学知识浑然一体地存在着,是通过数学知识的显化来表现的. 它以一种潜移默化的形式作用于人的思维活动,不仅能把数学知识的学习和培养数学能力有机地结合起来,而且还能提高个体的思维品质和数学能力,从而能够发展学习者的智力和提高学习者的数学素养.

第 2 章

微积分简史[①]

微积分学或者数学分析，是人类思维的伟大成果之一. 它处于自然科学与人文科学之间的地位，使它成为高等教育的一种特别有效的工具. 遗憾的是，微积分的教育方法有时流于机械，不能体现出这门学科乃是一种撼人心灵的智力奋斗的结晶. 这种奋斗经历了 2 500 多年之久，它深深扎根于人类活动的许多领域，并且，只要自己和认识自然的努力一日不止，这种奋斗就将继续不已.

——R. Courant(柯朗)

在一切理论成就中，未必再有什么像 17 世纪下半叶微积分发现那样被看作人类精神的最高胜利了. 如果在某个地方，我们看到人类精神的纯粹的和唯一功绩，那就正是在这里.

——Friedrich Von Engels(恩格斯)

The great book of Nature lies ever open before our eyes and the true philosophy is written in it…. But we cannot read it unless we have first learned the language and the characters in which it is written…. It is written in mathematical language and the characters are triangles, circles, and the other geometrical figures.

——Galileo Galilei(伽利略)

2.1 半个世纪的酝酿

微积分产生于 17 世纪下半叶，之前的半个世纪可以说是微积分的酝酿时期，微积分的产生离不开当时科学技术的发展，为了全面理解微积分的酝酿、产生与发

① 本章内容主要借鉴了 2002 年高等教育出版社出版的李文林的《数学史概论》(第二版)的第 6、7 章，1979 年上海科学技术出版社出版的 M. 克莱因的《古今数学思想》(第二册)的第 17 章，以及 2007 年复旦大学出版社出版的卡尔. B. 波耶的《微积分概念发展史》的第 5 章等文献资料.

展，现在简略地回顾一下17世纪初欧洲的自然科学发展状况和当时天文学、力学领域发生的几个重大事件.

1608年，荷兰眼镜制造商汉斯·利伯希(Hans Lippershey)为自己制作的望远镜申请专利，并遵从当局的要求，制造了一个双筒望远镜. 之后，伽利略(Galileo Galilei，1654—1642)对望远镜加以改进，并将之应用于天文观测. 由此做出了令世人目不暇接的天文发现. 望远镜的发明不仅引起天文学的崭新发展，同时还推动了光学的研究与发展.

1619年，德国天文学家、数学家开普勒(Johanns Kepler，1571—1630)公布了他的最后一条行星运动定律，即行星绕太阳公转周期的平方，与其椭圆轨道的半长轴的立方成正比，于是天文学上有了行星运动的三大定律，也称开普勒三大定律，其内容是：

(1)太阳系行星运行的轨道是椭圆，太阳位于该椭圆的一个焦点.

(2)由太阳到行星的矢径在相等的时间内扫过的面积相等.

(3)行星绕太阳公转周期的平方，与其椭圆轨道的半长轴的立方成正比.

开普勒主要是通过观测归纳出这三条定律. 从数学上推证开普勒三大定律，成为当时欧洲自然科学领域的中心课题之一.

1638年，伽利略《关于两门新学科的探讨和数学证明》出版，他指出，他曾经观察到物体在不同介质里下降速度的差异. 物体在空气里降落的速度差异，比在水里的要小，所以他断言：介质越稀薄，物体下降的差异越小. 于是可以得出这样的结论：在一个完全没有阻力的介质中，所有物体以同一速度降落，顾名思义这就是自由落体运动. 伽利略建立了自由落体定律、动量定律等为动力学奠定了基础. 他认识到弹道的抛物线性质，并断言要达到炮弹的最大射程发射角是45°等. 伽利略擅长实验，他的比萨斜塔实验至今为人们所传颂. 尽管伽利略的结果都是实验观测得到，但他本人竭力倡导自然科学的数学化，希望用数学的方法证明自己观测到的现象. 本章前面伽利略的这段话就是表明他的这个观点，自然这本书是用数学的语言写成，如果不懂数学，那就读不懂自然这本书. 他的著作激起人们对他所确立的动力学概念与定律作精确的数学表示的热情，这股热情极大地推动了数学的发展.

17世纪初，欧洲的自然科学迈入综合与突破阶段，而这种综合与突破所面临的数学困难，主要表现在这几个方面：非匀速运动物体的速度与加速度，这使得瞬时变化率问题的研究成为当时的当务之急；望远镜的设计需要确定曲面上任一点的法线，这又使得求任意曲线的切线问题变得不可回避；确定炮弹的最大射程以及寻求行星轨道的近日点与远日点等涉及函数的极大值极小值问题也亟待解决. 这些问题都可以归结为微分学的基本问题. 与此同时，行星沿轨道运动的路程、行星矢径扫过的面积、物体的重心以及引力的计算等问题，它们使积分学的基本问题——面积、体积、曲线长、重心和引力计算的兴趣被重新激发起来. 这些问题早在

