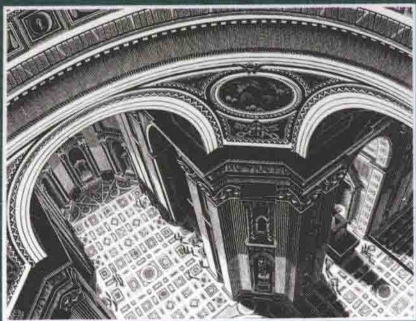
高等数学习题集
精品系列

超越普里瓦洛夫

留数卷

刘培杰数学工作室 编



普里瓦洛夫（Привалов,Иван Иванович），苏联人。1891 年 2 月 11 日生于别依津斯基。1913 年毕业于莫斯科大学后，曾在萨拉托夫大学工作。1918 年获数学物理学博士学位，并成为教授。1922 年回到莫斯科，先后在莫斯科大学和航空学院任教。1939 年成为苏联科学院通讯院士。1941 年 7 月 13 日逝世。

普里瓦洛夫的研究工作主要涉及函数论与积分方程。有许多研究成果是他与鲁金共同取得的，他们用实变函数论的方法研究解析函数的边界特性与边界值问题。1918 年他在学位论文《关于柯西积分》中，推广了鲁金－普里瓦洛夫唯一性定理，证明了柯西型积分的基本引理和奇异积分定理。他是苏联较早从事单值函数论研究的数学家之一，所谓黎曼－普里瓦洛夫问题就是他的研究成果之一。他还写了三角级数论及次调和函数论方面的著作。他发表了 70 多部专著和教科书，其中《复变函数引论》、《解析几何》都是多次重版的著作，并且被译成多种外文出版。

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

CHAOYUE PULIWALUOFU — LIUSHUJUAN

超越普里瓦洛夫

留数卷

● 刘培杰数学工作室 编

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

留数又称残数，是复变函数论中一个重要的概念. 本书总结了一些计算留数的常用方法和惯用技巧，叙述严谨、清晰、易懂.

本书适合于高等院校数学与应用数学专业学生学习，也可供数学爱好者及教练员作为参考.

图书在版编目(CIP)数据

超越普里瓦洛夫. 留数卷/刘培杰数学工作室编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.1

ISBN 978-7-5603-5008-0

Ⅰ. ①超… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①残数 Ⅳ. ①O1 ②O174

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 276151 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 刘立娟
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16 印张 9.75 字数 174 千字
版　　次 2015 年 1 月第 1 版 2015 年 1 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-5008-0
印　　数 1～3 000 册
定　　价 28.00 元

目录

第一章　留数定理及儒歇定理的应用

1（留数基本定理）　设 D 为周线或复周线 C 所围的区域，函数 $f(z)$ 除以 $z_k \in D(k=1,2,\cdots,n)$ 为奇点外，于 $\overline{D}$ 解析，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,z_k)$$

（这样，当函数在曲线 C 内只有有限个奇点时，函数沿此曲线积分的计算就可归结为留数的计算）.

证　作圆周 $\Gamma_k: |z-z_k|=\rho_k$，使 $|z-z_k|\leqslant\rho$ 含于 D 内，$k=1,2,\cdots,n$，且使诸圆 Γ_k 两两相离，则由柯西(Cauchy)定理有

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\int_{\Gamma_k} f(z)\mathrm{d}z$$

又由 Γ_k 的作法及留数的定义知

$$\int_{\Gamma_k} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f,z_k)$$

故得

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,z_k)$$

证毕.

2　设 g 与 h 在点 z_0 正则，且 $g(z_0)\neq 0, h(z_0)=0, h'(z_0)=0, h''(z_0)\neq 0$，则 z_0 为 $\dfrac{g(z)}{h(z)}$ 的二阶极点，且

$$\mathrm{Res}\left(\frac{g}{h},z_0\right)=2\cdot\frac{g'(z_0)}{h''(z_0)}-\frac{2}{3}\cdot\frac{g(z_0)h'''(z_0)}{[h''(z_0)]^2}$$

证　因 g 无零点，h 有二阶零点，故 z_0 为 $\dfrac{g}{h}$ 的二阶极点，且其洛朗(Laurent)展式为

$$\frac{g(z)}{h(z)}=\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\frac{b_1}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots$$

下面计算 b_1. 由题设知

$$g(z)=g(z_0)+g'(z_0)(z-z_0)+\frac{g''(z_0)}{2}(z-z_0)^2+\cdots$$

$$h(z)=\frac{h''(z_0)}{2}(z-z_0)^2+\frac{h'''(z_0)}{6}(z-z_0)^3+\cdots$$

于是

$$\begin{aligned}g(z)=&h(z)\left[\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\frac{b_1}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots\right]=\\&\left(\frac{h''(z_0)}{2}+\frac{h'''(z_0)}{6}(z-z_0)+\cdots\right)\cdot\\&[b_2+b_1(z-z_0)+a_0(z-z_0)^2+\cdots]=\\&\frac{b_2h''(z_0)}{2}+\left[\frac{b_2h'''(z_0)}{6}+\frac{b_1h''(z_0)}{2}\right](z-z_0)+\cdots\end{aligned}$$

由于两幂级数相等，其对应系数应相等，故

$$g(z_0)=\frac{b_2h''(z_0)}{2}$$

$$g'(z_0)=\frac{b_2h'''(z_0)}{6}+\frac{b_1h''(z_0)}{2}$$

由此解出 b_1，即得所证.

3 设 g,h 在点 z_0 正则，且 $g(z_0)=0,g'(z_0)\neq 0,h(z_0)=h'(z_0)=h''(z_0)=0,h'''(z_0)\neq 0$，则 $\dfrac{g(z)}{h(z)}$ 在点 z_0 处为二阶极点，且留数为

$$\frac{3g''(z_0)}{h'''(z_0)}-\frac{3}{2}\cdot\frac{g'(z_0)h^{(4)}(z_0)}{[h'''(z_0)]^2}$$

注　证明可仿照上题. 对形如 $\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^2}$ 的二阶极点，此处 $g(z_0)\neq 0$，上题的留数公式简化为 $g'(z_0)$.

4 求下列函数的留数：

(1) $\dfrac{e^z}{(z-1)^2}$；(2) $\dfrac{e^z-1}{\sin^3 z}$；(3) $\dfrac{z}{1-\cos z}$.

解　(1) $z_0=1$ 为二阶极点，$g(z)=e^z,h(z)=(z-1)^2,g(1)=e\neq 0$，$h(1)=h'(1)=0,h''(1)=2\neq 0$. 所以留数为 $\dfrac{2e}{2}-\dfrac{2}{3}\cdot(e\cdot 0)\cdot\dfrac{1}{2^2}=e$.

(2) $z_0=0$ 为二阶极点，$g(z)=e^z-1,h(z)=\sin^3 z,g(0)=0,g'(0)\neq 0$,

$h(0)=h'(0)=h''(0)=0, h'''(0)=6, h^{(4)}(0)=0$. 故留数为 $3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$.

(3) $z_0=0$ 为单极点, $g(z)=z, g(0)=0, g'(0)\neq 0, h(z)=1-\cos z$, $h(0)=h'(0)=0, h''(0)=1\neq 0$. 故在点 0 处的留数为 2.

5 求 $\mathrm{Res}(\cot z, 0)$.

解法 1　由 $z=0$ 是 $\cot z=\frac{\cos z}{\sin z}$ 的一阶极点，故

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\cos z}{\sin z},0\right)=\lim_{z\to 0}\left(z\cdot\frac{\cos z}{\sin z}\right)=\lim_{z\to 0}\cos z=1$$

解法 2

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\cos z}{\sin z},0\right)=\left.\frac{\cos z}{(\sin z)'}\right|_{z=0}=\frac{\cos 0}{\cos 0}=1$$

6 求 $\mathrm{Res}\left(\frac{e^z}{z^2+1},i\right)$.

解　因 $z=i$ 是 $\frac{e^z}{z^2+1}$ 的一阶极点，故可用与第 5 题相同的两种方法来解，但因有

$$\frac{e^z}{z^2+1}=\frac{\frac{e^z}{z+i}}{z-i}$$

故直接使用柯西公式会更好

$$\mathrm{Res}\left(\frac{e^z}{z^2+1},i\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-i|=1}\frac{e^z}{z^2+1}dz=$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-i|=1}\frac{\frac{e^z}{z+i}}{z-i}dz=$$
$$\left.\frac{e^z}{z+i}\right|_{z=i}=\frac{e^i}{2i}$$

7 求 $\mathrm{Res}\left(\frac{e^z}{z^{n+1}},0\right)$.

解法 1　因 $z=0$ 是 $\frac{e^z}{z^{n+1}}$ 的 $n+1$ 阶极点，因此

$$\mathrm{Res}\left(\frac{e^z}{z^{n+1}},0\right)=\frac{1}{n!}\lim_{z\to 0}\left(z^{n+1}\cdot\frac{e^z}{z^{n+1}}\right)=\frac{1}{n!}$$

解法 2　直接由洛朗展式求得

$$\frac{e^z}{z^{n+1}}=\frac{1}{z^{n+1}}+\frac{1}{z^n}+\frac{1}{2!\ z^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{n!\ z}+\frac{1}{(n+1)!}+\cdots$$

故 $\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{z^{n+1}},0\right)=\frac{1}{n!}$（取负一次项系数所得）.

解法 3　直接由关于求高阶导数的积分公式

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

或

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$$

令 $z_0=0,f(z)=e^z$，得

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{z^{n+1}},0\right)=\frac{1}{n!}(e^z)^{(n)}\Big|_{z=0}=\frac{1}{n!}$$

8 求 $\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z^2+1)^3},i\right]$.

解　因 i 是 $\frac{1}{(z^2+1)^3}$ 的三阶极点，故

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z^2+1)^3},i\right]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z-i)^3\frac{1}{(z^2+1)^3}\right]=$$

$$\frac{1}{2!}\times 3\times 4\times\frac{1}{(z+i)^5}\Big|_{z=i}=-\frac{3}{16}i$$

以下两例说明有时直接利用洛朗展式求留数也是方便的：

9 求 $\operatorname{Res}\left[\frac{z^4}{(2+3z^2)^4},\sqrt{\frac{2}{3}}i\right]$.

分析　此题与第 8 题并无本质差别，但此时 $\sqrt{\frac{2}{3}}i$ 是 $\frac{z^4}{(2+3z^2)^4}$ 的四阶极点. 若求函数 $\left(z-\sqrt{\frac{2}{3}}i\right)^4\frac{z^4}{(2+3z^2)^4}$ 的三阶导数，这是比较麻烦的. 然而若按留数的定义，那就是求函数 $\frac{z^4}{(2+3z^2)^4}$ 在点 $z_0=\sqrt{\frac{2}{3}}i$ 处的洛朗展式的负一次项系数，此时反而比较简单.

解　先求 $f(z)=\dfrac{z^4}{(2+3z^2)^4}$ 在点 $z_0=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,\mathrm{i}$ 处的洛朗展式，也就是将 $f(z)$ 展成关于 $\zeta=z-z_0$ 的(双边)幂级数.

显然，分子 z^4 可表示成关于 ζ 的多项式

$$z^4=(\zeta+z_0)^4=z_0^4+4z_0^3\zeta+6z_0^2\zeta^2+4z_0\zeta^3+\zeta^4$$

分母 $(2+3z^2)^4$ 可表示成关于 ζ 的多项式

$$(2+3z^2)^4=3^4\zeta^4(16z_0^4+32z_0^3\zeta+24z_0^2\zeta^2+8z_0\zeta^3+\zeta^4)$$

将以上两个多项式相除即得 $f(z)$ 的洛朗展式

$$f(z)=\frac{1}{3^4}\left(\frac{1}{16\zeta^4}+\frac{1}{8z_0\zeta^3}+\frac{1}{32z_0^2\zeta^2}-\frac{1}{32z_0^3\zeta}+\cdots\right)$$

(我们只要算到前四项就可以了，从 $-\dfrac{1}{32z_0^3\zeta}$ 以后的项我们不必关心).

于是得到

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z^4}{(z+3z^2)^4},\sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathrm{i}\right]=-\frac{1}{3^4}\cdot\frac{1}{32z_0^3}=-\frac{\mathrm{i}}{576\sqrt{6}}$$

10 求 $\operatorname{Res}\left(\dfrac{\mathrm{e}^z}{1-\cos z},0\right)$.

解　因

$$\mathrm{e}^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$$

$$1-\cos z=\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

故

$$\frac{\mathrm{e}^z}{1-\cos z}=\frac{2}{z^2}+\frac{2}{z}+\cdots$$

(同样，对于 $\dfrac{2}{z}$ 以后的项我们不必关心)，因此

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^z}{1-\cos z},0\right)=2$$

11 求下列函数 $f(z)$ 的关于各孤立奇点及无穷远点(如果它不是奇点的极限点)的留数：

(1) $f(z)=\dfrac{5z-2}{z(z-1)}$；

(2) $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$;

(3) $f(z)=\dfrac{z^{2n}}{(1+z)^n}$, n 为自然数;

(4) $f(z)=\dfrac{z}{\sin z}$;

(5) $f(z)=\dfrac{e^z}{(z-a)(z-b)}$.

(1) **解法 1** 用洛朗展式求解.

显然 $z=0,z=1$ 是 $f(z)$ 的一阶极点.

当 $z=0$ 时

$$f(z)=-\frac{5z-2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}z^n=$$

$$-5(1+z+z^2+\cdots)+2\left(\frac{1}{z}+1+z+z^2+\cdots\right)\quad(0<|z|<1)$$

当 $z=1$ 时

$$f(z)=\frac{5(z-1)+3}{z-1}\cdot\frac{1}{1+(z-1)}=$$

$$\left(5+\frac{3}{z-1}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$$

当 $z=\infty$ 时

$$f(z)=\left(\frac{5}{z}-\frac{2}{z^2}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=$$

$$\left(\frac{5}{z}-\frac{2}{z^2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}\quad(|z|>1)$$

所以

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=c_{-1}=2,\operatorname{Res}[f(z),1]=c_{-1}=3$$

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-c_{-1}=-5$$

解法 2 用极限法求解.

因 $z=0$ 与 $z=1$ 是 $f(z)$ 的一阶极点,所以

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to0}zf(z)=\lim_{z\to0}\frac{5z-2}{z-1}=2$$

$$\operatorname{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to1}\frac{5z-2}{z}=3$$

因此

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\{\mathrm{Res}[f(z),0]+\mathrm{Res}[f(z),1]\}=-5$$

解法 3　用柯西公式求解.

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=\frac{1}{2}}f(z)\mathrm{d}z=$$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{\dfrac{5z-2}{z-1}}{z}\mathrm{d}z=2$$

$$\mathrm{Res}[f(z),1]=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z-1|=\frac{1}{2}}\frac{\dfrac{5z-2}{z}}{z-1}\mathrm{d}z=3$$

解法 4　用求导法求解.

令 $\varphi(z)=5z-2,\psi(z)=z(z-1)$,则

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\frac{\varphi(0)}{\psi'(0)}=2,\mathrm{Res}[f(z),1]=\frac{\varphi(1)}{\psi'(1)}=3$$

(2) **解法 1**　因为

$$f(z)=\frac{z^2}{(z^2+1)^2}=\frac{z^2}{(z-\mathrm{i})^2(z+\mathrm{i})^2}$$

所以 $z=\pm\mathrm{i}$ 是 $f(z)$ 的二阶极点,故

$$\mathrm{Res}[f(z),\mathrm{i}]=\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[(z-\mathrm{i})^2f(z)]=$$

$$\left[\frac{z^2}{(z+\mathrm{i})^2}\right]'\Bigg|_{z=\mathrm{i}}=-\frac{\mathrm{i}}{4}$$

$$\mathrm{Res}[f(z,-\mathrm{i})]=\left[\frac{z^2}{(z-\mathrm{i})^2}\right]'\Bigg|_{z=-\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}}{4}$$

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\{\mathrm{Res}[f(z),\mathrm{i}]+\mathrm{Res}[f(z),-\mathrm{i}]\}=0$$

解法 2　因为

$$\frac{1}{(z^2+1)^2}=-\frac{1}{4(z-\mathrm{i})^2}-\frac{\mathrm{i}}{4(z-\mathrm{i})}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+3)\mathrm{i}^n(z-\mathrm{i})^n}{2^{n+4}}\quad(0<|z-\mathrm{i}|<2)$$

故

$$f(z)=[(z-\mathrm{i})+\mathrm{i}]^2\left[-\frac{1}{4(z-\mathrm{i})^2}-\frac{\mathrm{i}}{4(z-\mathrm{i})}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+3)\mathrm{i}^n(z-\mathrm{i})^n}{2^{n+4}}\right]$$

所以

$$\mathrm{Res}[f(z),\mathrm{i}]=-\frac{\mathrm{i}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{4}=-\frac{\mathrm{i}}{4}$$

类似可得

$$\mathrm{Res}[f(z),-\mathrm{i}]=\frac{\mathrm{i}}{4}$$

又由

$$\frac{1}{(z^2+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{z^{2n+2}}\quad(|z|>1)$$

于是当 $|z|>1$ 时

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{z^{2n}}$$

所以

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-c_{-1}=0$$

(3) 因 $z=-1$ 是 $f(z)=\dfrac{z^{2n}}{(1+z)^n}$ 的 n 阶极点,所以

$$\mathrm{Res}[f(z),-1]=\frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}(z^{2n})\right]\bigg|_{z=-1}=$$

$$(-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{(n-1)!\ (n+1)!}$$

故

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=(-1)^n\frac{(2n)!}{(n-1)!\ (n+1)!}$$

(4) 因 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z}{\sin z}=1$, $(\sin z)'\Big|_{z=k\pi}\neq 0$,所以 $z=0$ 与 $z=k\pi(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 分别是 $f(z)$ 的可去奇点与简单极点,于是

$$\mathrm{Res}[f(z),k\pi]=\frac{\varphi(k\pi)}{\psi'(k\pi)}=(-1)^k k\pi$$

其中 $\varphi(z)=z,\psi(z)=\sin z,k=\pm 1,\pm 2,\cdots$

(5) 显然 $z=a$ 与 $z=b$ 是 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z}{(z-a)(z-b)}$ 的一阶极点,故

$$\mathrm{Res}[f(z),a]=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=\frac{\mathrm{e}^a}{a-b}$$

$$\mathrm{Res}[f(z),b]=\lim_{z\to b}\frac{\mathrm{e}^z}{z-a}=\frac{\mathrm{e}^b}{b-a}$$

当 $a=b$ 时,则

$$f(z)=\frac{\mathrm{e}^z}{(z-a)^2}=\frac{\mathrm{e}^{a+(z-a)}}{(z-a)^2}=\frac{\mathrm{e}^a}{(z-a)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z-a)^n$$

所以

$$\mathrm{Res}[f(z),a]=c_{-1}=\mathrm{e}^a\quad(a=b)$$

故当 $a \neq b$ 时，$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=\dfrac{e^{a}-e^{b}}{b-a}$；当 $a=b$ 时，$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-e^{a}$.

在 12 ～ 18 题中，求出函数 $f(z)$ 关于孤立奇点(按 11 题的要求) 的留数.

12 $f(z)=\cot \dfrac{\pi z}{(z-a)^{2}}$.

解 若 a 不是整数，则 a 是 $f(z)$ 的二阶极点，此时 $z=k$(k 为整数) 是 $f(z)$ 的简单极点，故有

$$\operatorname{Res}[f(z),a]=(\cot \pi z)'\Big|_{z=a}=-\pi\csc^{2}\pi a$$

$$\operatorname{Res}[f(z),k]=\frac{\varphi(k)}{\psi'(k)}=\frac{1}{\pi(k-a)^{2}}$$

其中

$$\varphi(z)=\cos \pi z,\psi(z)=(z-a)^{2}\sin \pi z$$

若 a 是整数，令 $z-a=\zeta$，即 $z=a+\zeta$，于是

$$\frac{\cot \pi z}{(z-a)^{2}}=\frac{1}{\zeta^{2}}\cdot\frac{\cos \pi\zeta}{\sin \pi\zeta}=\frac{1}{\zeta^{2}}\cdot\frac{1+\dfrac{(\pi\zeta)^{2}}{2!}+\cdots}{\pi\zeta-\dfrac{(\pi\zeta)^{3}}{3!}+\cdots}=$$

$$\frac{1}{\zeta^{3}}\left(\frac{1}{\pi}-\frac{\pi}{3}\zeta^{2}+\cdots\right)$$

所以 $\operatorname{Res}[f(z),a]=-\dfrac{\pi}{3}$，$z=\infty$ 是极点的极限点.

13 $f(z)=\dfrac{z^{4}}{(z^{2}-a^{2})^{4}}$，$a\neq 0$.

解 $z=\pm a$ 是极点，令 $z-a=\zeta$，于是

$$\frac{z^{4}}{(z^{2}-a^{2})^{4}}=\frac{1}{16\zeta^{4}}\cdot\frac{(1+\dfrac{\zeta}{a})^{4}}{(1+\dfrac{\zeta}{2a})^{4}}=$$

$$\frac{1}{16\zeta^{4}}\left(1+\frac{\zeta}{a}\right)^{4}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-4}{n}\left(\frac{\zeta}{2a}\right)^{n}\quad(|\zeta|<2|a|)$$

由于

$$\left(1+\frac{\zeta}{a}\right)^{4}=1+\frac{4}{a}\zeta+\frac{6}{a^{2}}\zeta^{2}+\frac{4}{a^{3}}\zeta^{3}+\frac{1}{a^{4}}\zeta^{4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-4}{n}\left(\frac{\zeta}{2a}\right)^n=1-\frac{2}{a}\zeta+\frac{5}{2a^2}\zeta^2-\frac{5}{2a^3}\zeta^3+\cdots$$

所以$\frac{1}{\zeta}$的系数为

$$\frac{1}{16}\left(-\frac{5}{2a^3}+\frac{4}{a}\cdot\frac{5}{2a^2}-\frac{6}{a^2}\cdot\frac{2}{a}+\frac{4}{a^3}\right)=-\frac{1}{32a^3}$$

故

$$\mathrm{Res}[f(z),a]=-\frac{1}{32a^3}$$

类似可得(用 $-a$ 代替 a 即可)

$$\mathrm{Res}[f(z),-a]=\frac{1}{32a^3}$$

于是

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=0$$

14 $f(z)=\cos\dfrac{z^2+4z-1}{z+3}$.

解 显然 $z=-3$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点.

因为

$$\begin{aligned}f(z)=&\cos\left[z+1-\frac{4}{z+3}\right]=\\&\cos[(z+3)-2]\cos\frac{4}{z+3}+\sin[(z+3)-2]\sin\frac{4}{z+3}=\\&[\cos(z+3)\cos 2+\sin(z+3)\sin 2]\cos\frac{4}{z+3}+\\&[\sin(z+3)\cos 2-\cos(z+3)\sin 2]\sin\frac{4}{z+3}\end{aligned}$$

由于

$$\cos(z+3)\cos 2\cos\frac{4}{z+3}$$

与

$$\sin(z+3)\cos 2\sin\frac{4}{z+3}$$

都是关于 $z+3$ 的偶函数,故其展式不包含$\frac{1}{z+3}$的项,而

$$\sin(z+3)\cos\frac{4}{z+3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+3)^{2n+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\frac{4^{2n}}{(z+3)^{2n}}=$$

$$(z+3)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\frac{4^{2n}}{(z+3)^{2n}}-$$
$$\frac{(z+3)^3}{3!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\frac{4^{2n}}{(z+3)^{2n}}+\cdots+$$
$$\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+3)^{2n+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\frac{4^{2n}}{(z+3)^{2n}}+\cdots$$

(这是因为两级数绝对收敛,用乘法法则而得),由此知 $\sin(z+3)\cos\dfrac{4}{z+3}$ 的展式中$\dfrac{1}{z+3}$的系数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{(-1)^{n+1}4^{2(n+1)}}{[2(n+1)]!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4^{2n}}{(2n-1)!\ (2n)!}$$

类似可得 $\cos(z+3)\sin\dfrac{4}{z+3}$ 的展式中$\dfrac{1}{z+3}$的系数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\frac{(-1)^n4^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{2n+1}}{(2n)!\ (2n+1)!}$$

所以

$$\mathrm{Res}[f(z),3]=-\mathrm{Res}[f(z),\infty]=$$
$$-\sin 2\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{2n}}{(2n-1)!\ (2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{2n+1}}{(2n)!\ (2n+1)!}\right]$$

15 $f(z)=e^{z+\frac{1}{z}}$.

解　显然 $z=0$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点,由于

$$f(z)=e^{z+\frac{1}{z}}=\left(1+z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots+\frac{1}{k!}z^k+\cdots\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\ z^n}=$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\ z^n}+\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!\ z^n}+\frac{1}{2!}\sum_{n=-2}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!\ z^n}+\cdots+$$
$$\frac{1}{k!}\sum_{n=-k}^{\infty}\frac{1}{(n+k)!\ z^n}+\cdots=$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\ (n+k)!}\right]\frac{1}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n=$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}c_{-n}z^{-n}+\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n$$

其中

$$c_{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\ (n+k)!}\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

所以

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=-\mathrm{Res}[f(z),\infty]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\ (k+1)!}$$

16 $f(z)=\dfrac{z}{(z-z_1)^m(z-z_2)}, z_1\neq z_2, m\neq 1.$

解 显然 $z=z_1$ 与 $z=z_2$ 分别是 $f(z)$ 的 m 阶极点与简单极点. 令 $\varphi(z)=z, \psi(z)=(z-z_1)^m(z-z_2)$.

于是

$$\mathrm{Res}[f(z),z_2]=\frac{\varphi(z_2)}{\psi'(z_2)}=\frac{z_2}{(z_2-z_1)^m}$$

$$\mathrm{Res}[f(z),z_1]=\frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{z}{z-z_2}\right)^{(m-1)}\Bigg|_{z=z_1}=$$

$$\frac{(-1)^{m-1}z_2}{(z_1-z_2)^m}=-\frac{z_2}{(z_2-z_1)^m}$$

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\{\mathrm{Res}[f(z),z_1]+\mathrm{Res}[f(z),z_2]\}=0$$

17 $f(z)=\dfrac{1}{z(1-\mathrm{e}^{-hz})}, h\neq 0.$

解 令 $1-\mathrm{e}^{-hz}=0$,解得 $z=\dfrac{2k\pi\mathrm{i}}{h}$($k$ 为整数).

显然 $z=0(k=0)$ 是 $f(z)$ 的二阶极点,而 $z=\dfrac{2k\pi\mathrm{i}}{h}(k\neq 0)$ 是 $f(z)$ 的简单极点,于是

$$\mathrm{Res}\left[f(z),\frac{2k\pi\mathrm{i}}{h}\right]=\frac{1}{\psi'\left(\frac{2k\pi\mathrm{i}}{h}\right)}=\frac{1}{2k\pi\mathrm{i}}$$

其中 $\psi(z)=z(1-\mathrm{e}^{-hz}), k=\pm 1,\pm 2,\cdots$

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0}\left[\frac{z}{1-\mathrm{e}^{-hz}}\right]'=\frac{1}{2}$$

$z=\infty$ 是极点的极限点.

18 $f(z)=\dfrac{\tan z}{z^n}$, n 为自然数.

解 因 $f(z)=\dfrac{\tan z}{z^n}=\dfrac{\sin z}{z^n\cos z}$,而 $z=0$ 与 $z=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$

分别是 $f(z)$ 的 $n-1$ 阶极点与简单极点，所以

$$\operatorname{Res}\left[f(z),\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right]=\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{\psi'\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right]}=\frac{-1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^n\pi^n}$$

其中 $\psi(z)=z^n\cos z, k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$

因为

$$\tan z=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)B_{2k}}{(2k)!}z^{2k-1}\quad\left(|z|<\frac{\pi}{2}\right)$$

其中 B_{2k} 是伯努利(Bernoulli) 数，故

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)B_{2k}}{(2k)!}z^{2k-n-1}\quad\left(|z|<\frac{\pi}{2}\right)$$

由此可知，当 n 为奇数时，$\frac{1}{z}$ 的系数为零；当 n 为偶数时，使 $2k-n-1=-1$ 的 k 是 $k=\frac{n}{2}$，所以$\frac{1}{z}$ 的系数为

$$(-1)^{\frac{n}{2}-1}\frac{2^n(2^n-1)B_n}{n!}$$

所以

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=0\quad(n\text{ 为奇数})$$

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=(-1)^{\frac{n}{2}-1}\frac{2^n(2^n-1)B_n}{n!}\quad(n\text{ 为偶数})$$

$z=\infty$ 是极点的极限点.

19 若有限点 z_0 是 $f(z)$ 的一阶极点，则

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

(这样就把留数的计算化为极限的计算了).

证　由假设知，存在 $r>0$，当 $0<|z-z_0|<r$ 时有

$$f(z)=\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots$$

令

$$g(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots$$

则 $g(z)$ 于 $|z-z_0|<r$ 内解析. 又显然有

$$(z-z_0)f(z)=c_{-1}+(z-z_0)g(z)$$

因为$\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)g(z)=0$，故