小学生数学竞赛题精选

XIAOXUESHENG SHUXUE JINGSAITI JINGXUAN

孝武主编
崇九编

林出版社

六年级

小学数学竞赛题精选

（六年级）

俞孝武　主编
肖　毅·崇　九　编

学林出版社

小学数学竞赛题精选(六年级)

主　　编：俞孝武
编　　者：肖　毅　崇　九
责任编辑：褚大为
装帧设计：沈兆荣　周剑峰
出　　版：学林出版社
　　　　　上海钦州南路 81 号
发　　行：新华书店上海发行所
印　　刷：上海市印刷六厂
版　　次：1997 年 12 月第 1 版
印　　次：1998 年 2 月第 2 次印刷
开　　本：787×1092　1/32
印　　张：15.5
字　　数：33 万
印　　数：6,001—17,000册
定　　价：20.00 元
ISBN7—80616—445—6/G·104

前　言

为适应《九年义务教育全日制小学数学教学大纲》及上海市九年制义务教育课程标准小学数学教学要求，实施素质教育，让更多的爱好数学的小学生在课余、双休日有丰富的数学学习内容，也为有意参加全国、本市的各类小学数学竞赛活动的小学生提供实用的、有效的辅导，我们特编写这套丛书。

本套丛书分三、四、五、六年级四册，各册独自成书又互相联系，构成完整的小学数学竞赛体系，涵盖了所有涉及到的小学数学竞赛内容，内容丰富、实用。每册书有三十个专题，每个专题都有专题的意义、专题的基础知识和思维等能力的要求，多层次的例题及详尽的分析、专题练习题。每册书备有该年级小学数学竞赛题自测题三套，以便自我检测，最后附有提示与答案提供参考。

编写本套丛书时遵循了以下原则：

1. 基础性与提高性相结合。

小学数学竞赛题一般要求较高，但不能离开小学数学基础知识和基本技能而任意拔高。本书编写时从各年级的数学基础知识和基本技能出发，设置若干专题，每个专题都指出数学基础知识和基本技能的要求，同时也提出思维能力等方面的要求，以利于小学生对数学竞赛知识的学习；同时又适当安排各年级学生能接受的、与该年级数学知识有一定联系的数学竞赛知识，以开拓小学生的数学知识面，提高解答数学竞赛

题的能力。

2. 指导性与实践性相结合。

为加强对小学生学习数学竞赛知识的指导，本丛书每册书都设置了三十个专题，每个专题内容集中一、二个数学竞赛内容，并举出十多个有层次的例题，进行详细的分析，可使小学生通过例题的学习逐步掌握该专题的知识要求。同时，每个专题都配备若干练习题，让小学生通过自己的实践，掌握解答这类数学竞赛题的规律，提高分析问题和解决问题的能力。

3. 局部性与整体性相结合。

本丛书从小学数学竞赛的整体要求出发，首先对近年来的各类小学数学竞赛题进行了详尽的分析与研究，提出小学数学竞赛题的整体设计；然后再根据各年级的基础知识和竞赛要求设计出各年级的专题内容。这就使本书既有各年级的竞赛要求，又有小学整体的竞赛要求，专题内容安排上既有一定的独立性又有密切的联系。例如中、低年级的专题比较具体、直观；而该专题到高年级就上升到一定的规律、法则，使学生学习数学竞赛知识能承上启下，融会贯通，有利于小学生数学竞赛能力的逐步培养、提高。

4. 科学性与趣味性相结合。

数学是一门严谨的学科，它具有抽象性、逻辑性和应用性，小学生学习常不易理解和掌握。本书从小学生学习数学的特点出发，每个专题的介绍力求从儿童的生活实际出发，分析做到直观、形象，文字叙述做到通俗易懂，有一定趣味性，同时严格把握好数学知识的科学性。使学生能提高学习数学竞赛知识的积极性和自觉性，从而获得成功的愉悦。

本书的编者都是有多年指导和研究小学生数学竞赛的、

具有丰富经验的高级教师。各册作者分别是：

三年级：张显元、周洁婴、史婷、罗曙萍、高晓燕、黄唯真。

四年级：秦汉鑫。

五年级：谢悠南。

六年级：肖毅、崇九。

欢迎读者对本书提出宝贵意见，以便进一步修改、完善。

编　者

一九九七年六月

目　录

一、中国剩余定理

我国古代有一本著名的数学书名叫《孙子算经》。书中有这样一道题目:“今有物不知其数,三三数之剩二,五五数之剩三,七七数之剩二,问物几何?”这是驰名中外的中国古算题之一。解答这类问题要用到古代数学家孙子所发明的著名定理——“孙子定理”。它的解法很早就流传到国外,被称为“中国剩余定理”。

中国剩余定理的问题的一般解法,是运用数的整除和同余等有关知识进行思考与解答。如整数 a、b 同除以自然数模 n,如果所得余数相同,我们就说 a 与 b 对于模 n 同余,记作 $a \equiv b \pmod{n}$,得到:

(A) 对于模 n 同余的两个整数 a 和 b,它们的差一定能被 n 整除。

如,$10 \div 3 = 3 \cdots\cdots 1$,$7 \div 3 = 2 \cdots\cdots 1$,

则,$(10-7) \div 3 = 1$。

(B) 被除数扩大(或缩小)n 倍,除数不变,则商和余数也相应扩大(或缩小)相同的倍数。

如,$14 \div 6 = 2 \cdots\cdots 2$,

则,$(14 \times 2) \div 6 = (2 \times 2) \cdots\cdots (2 \times 2)$,$28 \div 6 = 4 \cdots\cdots 4$,

$(14 \div 2) \div 6 = (2 \div 2) \cdots\cdots (2 \div 2)$,$7 \div 6 = 1 \cdots\cdots 1$。

(C) 被除数加上除数的倍数,再除以除数,余数不变。

如,$12 \div 5 = 2 \cdots\cdots 2$,

则，$(12+5\times3)\div5=5\cdots\cdots2$(余数不变)

中国剩余定理的问题也可以根据题意,运用分析法逐步尝试推算,求得题中要求的数。

中国剩余定理在世界数学史上是十分了不起的一项成果,掌握其解题思路,有利于解决日常生活与生产中较复杂的实际问题。

例 1　一个数除以 3 余 2,除以 5 余 3,除以 7 余 2,求适合这条件的最小的数。

分析：关于这个问题的一般解法,在明朝程大位《算法统宗》(公元 1592 年)已有一首歌,就是:“三人同行七十稀,五树梅花二十一枝,七子团圆整半月,除百零五便得知。”

这首歌表示具体解法为：先分别求出能被 5 和 7 整除而被 3 除余 1 的数(70),能被 3 和 7 整除而被 5 除余 1 的数(21),能被 3 和 5 整除而被 7 除余 1 的数(15),然后用被 3、5、7 除所得的余数(即 2、3、2)分别去乘这三个数,再相加,也就是：

$$70\times2+21\times3+15\times2=233。$$

最后从 233 中减去 3、5、7 的最小公倍数 105 的 2 倍得 23,这就是适合条件的最小数。

解法一：运用分析法,逐步尝试推算得到所求的数。

根据题意,因为,一个数除以 3 余 2,除以 7 余 2,则这个数除以 21 余 2,而数 23 正好是 3、7 除都余 2 的最小数,也恰好是用 5 除余 3 的数,所以,23 是符合题意的解。

解法二：运用同余知识来思考。

设所求的适合条件的最小自然数为 x，把这个问题可以记作：

$$\begin{cases} x\equiv 2 \pmod 3 \\ x\equiv 3 \pmod 5 \\ x\equiv 2 \pmod 7 \end{cases}$$

由此得到：

(1) $[5、7]=35$，$35\equiv 2 \pmod 3$，

(2) $[3、7]=21$，$21\equiv 1 \pmod 5$，

$21\times 3\equiv 1\times 3 \pmod 5$ ——（同余问题(B)），

即，$63\equiv 3 \pmod 5$。

(3) $[3、5]=15$，$15\equiv 1 \pmod 7$，

$30\equiv 2 \pmod 7$

(4) $35+63+30=128$，

$[3、5、7]=105$，

$128-105=23$。

经检验，$23\equiv 2 \pmod 3$，$23\equiv 3 \pmod 5$，$23\equiv 2 \pmod 7$。

所以，适合条件的最小自然数是 23。

说明：因为，$128\equiv 2 \pmod 3$，$128\equiv 3 \pmod 5$，$128\equiv 2 \pmod 7$，所以，128 符合问题所提的条件，但 128 不是要求的适合这条件的最小自然数。又因为 3、5、7 的最小公倍数是 105，从 128 中减去它们的最小公倍数 105，就得到适合条件的最小自然数，所以，正确的答案应是 23。

例 2 求三除余二，五除余三，七除余四的最小整数。

分析：根据题意，应该这样想，先从除以 3 余 2 的数中去找除以 5 余 3 的数；再从“3 除余 2，5 除余 3”的数中去找除以 7 余 4 的数。这样才能步步深入，逼近目标，直至寻得问题解答。这种方法也称“筛选法”。

解法一：根据“三除余二，五除余三”的条件，先写上2，每次加3，加到五除余三的时候暂停下来；再根据“七除余四”这个条件，从原来求得的数上每次加15，得到七除余四时为止。如，

$2, 2+3=5, 5+3=8$,

8是5除余3的数，然后，

$8, 8+15=23, 23+15=38, 38+15=53$，53是第一个七除余四的数，所以，53是所求的数。

解法二：

(1) $[5、7]=35, 35\equiv2 \pmod 3$。

(2) $[3、7]=21, 21\equiv1 \pmod 5$,

$21\times3\equiv1\times3 \pmod 5, 63\equiv3 \pmod 5$。

(3) $[3、5]=15, 15\equiv1 \pmod 7$,

$15\times4\equiv1\times4 \pmod 7, 60\equiv4 \pmod 7$。

(4) $35+63+60=158, [3、5、7]=105$,

$158-105=53$。

因此适合条件的最小整数是53。

例3 一个数除以6余4，除以10余8，除以9余4，这个数最小是几？

分析：认真审题，仔细推敲一下题中各个条件的含意，不难发现第一句话指出该数是被3除余1的偶数；第二句话指出该数是被5除余3的偶数；第三句话指出该数是被3除余1，被9除余4。综合以上分析，此题可简化为：

求一个最小的偶数，被5除余3，被9除余4。

解法一：用筛选法求解，考虑被9除余4，可以进行以下推算：$4, 4+18=22, 22+18=40, 40+18=58$，58是第一

个被5除余3的数，即为所求。

解法二：运用“枚举法”进行解答。

（1）除以6余4的偶数有：

10、16、22、28、34、40、46、52、58、64……

（2）除以10余8的偶数有：

18、28、38、48、58、68……

（3）除以9余4的偶数有：

13、22、31、40、49、58、67……

因为第一次同时出现在上面三个数列中的数是58，所以要求最小数是58。

例4 一个三位数，被7除余1，被8除余2，被9除余3，求该数。

分析：根据题意，扣住问题特征，反过来思考一下，不难发现，如果这个三位数同时能被7、8、9三个数整除的话均少6，因此先求出7、8、9三个数的最小公倍数，然后再求得本题的解。

解：

因为，[7、8、9]＝504，504－6＝498，这是满足要求的唯一的一个三位数。

所以，要求的数是498。

例5 学校图书馆，有一批数学课外读物，总数在2500本至3000本之间。若每包24本，最后一包缺2本；若每包28本，最后一包还是缺2本，若每包32本，最后一包也是缺2本，这批数学课外读物一共有多少本？

分析：根据题意，由条件可知，如果再增加2本数学课外读物，那么这批数学课外读物的总本数能被24、28、32三个

数同时整除，也就是这三个数的公倍数。因此数学课外读物的总数是24、28、32三数的某个公倍数减去2所得的数。

解：24、28、32的公倍数有：672、1344、2016、2688、3360……，因为题中告诉我们，数学课外读物的总数是在2500本至3000本之间，因此，符合条件的数是2688，所以，数学课外读物的总本数是：2688－2＝2686（本）。

例6　一个三位数除以9余6，除以4余2，除以5余1，这个三位数最大是多少？

分析：这个最大的三位数除以9、4、5后得到的余数各不相同，分别是6、2、1。如果用4去除时，在所得的商中减去1，那么就余4＋2＝6；如果用5去除时，在所得的商中减去1，那么也就余5＋1＝6，这样用9、4、5去除三位数后都余6。所以，在解题时，可以这样去思考：先求出这三个数的最小公倍数，再求最大的三位数，且是此最小公倍数的倍数，然后加上6。

解：[9、4、5]＝180。

180的倍数有：360、540、720、900、1080……

满足条件的最大三位数是900＋6＝906

因此所求的最大三位数是906。

例7　有一个班的同学去公园划船，他们算了一下，如果增加一条船，正好每条船坐6人；如果减少一条船，正好每条船坐9人，问这个班共有多少学生？

分析：根据题意，我们清楚地知道，全班总人数一定是6的倍数，又是9的倍数，因为6和9的最小公倍数是18。由此，问题就转化为求符合条件的18×n（n为自然数）。

解法一：

$[6、9]=18$，当 $n=1$ 时，

$18\times n=18\times 1=18$(人)，$18\div 6=3$(条船)，$18\div 9=2$(条船)，

根据题意，每船坐 6 人比每船坐 9 人，要多用 2 条船，故 18 人不符合题意。

当 $n=2$ 时，$18\times 2=36$(人)，$36\div 6=6$(条船)，

$36\div 9=4$(条船)，经检验总人数 36 人，刚好符合题意。

解法二：设总人数为 x 人。

$$\frac{x}{6}-\frac{x}{9}=2,\ x=36。$$

所以，这个班共有学生 36 人。

例 8 一筐苹果 4 个 4 个数余 1，5 个 5 个数余 3，7 个 7 个数余 2。这筐苹果至少有多少个？

分析：如果有三个两两互质的自然数 A、B、C，它们分别除 N 得到三个余数 R_1、R_2、R_3。那么只要找到三个自然数 N_1、N_2、N_3，使 N_1 既是 A 和 B 的公倍数且除以 C 余数为 1。N_2 既是 B 和 C 的公倍数且除以 A 余数为 1。N_3 既是 A 和 C 的公倍数且除以 B 余数为 1。则有 $N'=N_1\cdot R_3+N_2\cdot R_1+N_3\cdot R_2$，若 N' 大于 A、B、C 的最小公倍数，则减去 A、B、C 的最小公倍数的整数倍，则就是所求的数 N。若 N' 小于 A、B、C 的最小公倍数，则 $N=N'$。

解：本题中的 4、5、7 为三个两两互质的自然数，根据题意得：

$A=4$，$R_1=1$；$B=5$，$R_2=3$；$C=7$，$R_3=2$；又有 $[4、5]=20$，$[5、7]=35$，$[4、7]=28$，$[4、5、7]=140$。

因为，$N_1=6\times20=120$，$120\div7$ 余数为 1；

$N_2=35\times3=105$，$105\div4$ 余数为 1；

$N_3=28\times2=56$，$56\div5$ 余数为 1；

$N'=120\times2+105\times1+56\times3=513$；

$513>140$，

所以，$N=513-140\times3=93$。

经检验，$93\div4=23\cdots\cdots1$；$93\div5=18\cdots\cdots3$；$93\div7=13\cdots\cdots2$，完全符合题意。

因此，这筐苹果至少有 93 个。

说明：本题也可以灵活运用例 2、例 3 中的解法一的思考方法去解答。

除以 4 余 1 的第一个数为：1，$1+4\times3=13$。13 是除以 5 余 3 的数，即，$13\div5=2\cdots\cdots3$。把 13 再加上 3 与 5 的公倍数的若干整数倍使其和除以 7 余 2，则有 $13+20\times4=93$，$93\div7=13\cdots\cdots2$，93 即是要求的数，以上两种解法各有千秋。

例 9 六(1)班学生去方塔公园参加划船活动，租电动船若干只，如果每只船坐 4 人，有 1 人不能参加；如果每只船坐 5 人，就可以少租船 2 只，而每人每小时可少付租船费 0.2 元，问每只电动船每小时租费多少元？

分析：根据题意，每只船坐 4 人，有 1 人不能参加。每只船坐 5 人，可以少租 2 只船，也就是有 $5\times2=10$(个)座位没有人坐。这样分析以后，我们清楚地知道：如果每只船多坐 1 人，就增加 $5\times2+1=11$(个)座位。

解：电动船的只数是：

$$(5\times2+1)\div(5-4)=11\text{(只)}$$

六(1)班有学生人数：

$4\times 11+1=45$ (人)

每只电动船每小时的租费是：

$0.2\times 45\div 2=4.5$ (元)

答：每只电动船每小时租费 4.5 元。

例 10 一个数被 2 除余 a，被 5 除余 b，被 7 除余 c，被 9 除余 d。求这样的最小整数。(其中 a、b、c、d 均是自然数)

分析：同样地，先求一个被 2 除余 1 的数，被 5、7、9 同时整除的数，即，$5\times7\times9=315$，正满足要求；再求一个被 5 除余 1 的数，被 2，7，9 同时整除的数，即，$2\times7\times9=126$，也满足要求；由于 $2\times5\times9=90$，它被 7 除余 6，再补上 1 方能被 7 整除，可见 $90\times6=540$，就是被 2、5、9 同时整除而被 7 除余 1 的数；而 $2\times5\times7=70$，9 除余 7，因此，$70\times4=280$，它是被 9 除余 1 的数，而被 2、5、7 同时整除的数。

综合起来，本题所要求的数是：$315a+126b+540c+280d$ 减去 $2\times5\times7\times9=630$ 的倍数，所得最小的整数。

练　习　一

1. 一个数除以 3 余 2，除以 5 余 4，除以 7 余 5，求适合条件的最小自然数。

2. 我国《续古摘奇算法》中有这样一道题："二二数之余一，五五数之余二，七七数之余三，九九数之余四，问本数"。

3. 填空。如果某数除 492、2241、3195 都余 15，那么这个数是(　　)。

4. 填空。除以 3 余 1，除以 5 余 2，除以 7 余 4 的最小三位数是(　　)。