[张宇考研数学系列丛书]

张宇

CLASSIC

考研数学题源探析

经典1000题

（解析分册·数学三）

1000 EXERCISES ON MATHS

Mr. Zhang

主编 张宇

2017

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

[张宇考研数学系列丛书]

张宇

考研数学题源探析经典1000题

（解析分册·数学三）

CLASSIC

张宇 ◎ 主编

编委（按姓氏拼音排序）：蔡燧林 高昆轮 胡金德 万金平 乌日罕

亦一（笔名）于吉霞 曾凡（笔名）张乐 张心琦 张宇 郑利娜 朱杰

北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学题源探析经典1000题. 解析分册. 数学三 / 张宇主编. — 北京：北京理工大学出版社，2016. 1

ISBN 978-7-5682-1842-9

Ⅰ. ①张… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第022024号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 河北鹏润印刷有限公司
开　　本 / 787毫米×1092毫米　1/16
印　　张 / 17.5
字　　数 / 436千字
版　　次 / 2016年1月第1版　2016年1月第1次印刷
定　　价 / 54.80元(共2册)

责任编辑 / 高　芳
文案编辑 / 胡　莹
责任校对 / 孟祥敬
责任印制 / 边心超

Contents 目录

第一篇　微积分

第二篇 线性代数

第三篇 概率论与数理统计

第一篇　微积分

第 1 章　函数、极限、连续

一、选择题

1.1.(B) **【解析】**若$\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$是无穷小量,则$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n\cdot\dfrac{1}{x_n}=0$,故(B)正确.

若取$x_n=\dfrac{1}{n}$,$y_n=1$,则满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$,且$\{x_n\}$在$n\to\infty$时是无穷小量、有界量、单调递减,但$\{y_n\}$不是无穷小量,排除(A),(C),(D).

1.2.(D) **【解析】**对于命题①,由数列收敛的定义可知,若数列$\{u_n\}$收敛于A,则对任意给定的$\varepsilon>0$,存在自然数N,当$n>N$时,恒有

$$|u_n-A|<\varepsilon,$$

则当$n_i>N$时,恒有

$$|u_{n_i}-A|<\varepsilon,$$

因此数列$\{u_{n_i}\}$也收敛于A,可知命题正确.

对于命题②,不妨设数列$\{x_n\}$为单调增加的,即

$$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant\cdots,$$

其中某一给定子数列$\{x_{n_i}\}$收敛于A,则对任意给定的$\varepsilon>0$,存在自然数N,当$n_i>N$时,恒有

$$|x_{n_i}-A|<\varepsilon.$$

由于数列$\{x_n\}$为单调增加的数列,对于任意的$n>N$,必定存在$n_i\leqslant n\leqslant n_{i+1}$,有

$$-\varepsilon<x_{n_i}-A\leqslant x_n-A\leqslant x_{n_{i+1}}-A<\varepsilon,$$

从而

$$|x_n-A|<\varepsilon.$$

可知数列$\{x_n\}$收敛于A. 因此命题正确.

对于命题③,因$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=A$,$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=A$,由极限的定义可知,对于任意给定的$\varepsilon>0$,必定存在自然数$N_1,N_2$:

当$2n>N_1$时,恒有

$$|x_{2n}-A|<\varepsilon;$$

当$2n+1>N_2$时,恒有

$$|x_{2n+1}-A|<\varepsilon.$$

取$N=\max\{N_1,N_2\}$,则当$n>N$时,总有

$$|x_n-A|<\varepsilon.$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$. 可知命题正确.

故答案选择(D).

【注】本题命题③为 2015 年考研实考题,提醒读者注意基本功训练.

1.3. (D) 【**解析**】令 $g(x)=\varphi[\varphi(x)]$，注意 $\varphi(x)$ 是奇函数，有

$$g(-x)=\varphi[\varphi(-x)]=\varphi[-\varphi(x)]=-\varphi[\varphi(x)]=-g(x).$$

因此 $\varphi[\varphi(x)]$ 为奇函数，同理可得 $f[\varphi(x)]$，$f[f(x)]$，$\varphi[f(x)]$ 均为偶函数. 答案选(D).

1.4. (B) 【**解析**】注意在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内，$\sin x$ 是增函数，$\cos x$ 是减函数.

任取 $x_1,x_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且 $x_1<x_2$，有 $\cos x_1>\cos x_2$，所以 $\sin(\cos x_1)>\sin(\cos x_2)$，即 $f(x)$ 是减函数；由于 $\sin x_1<\sin x_2$，所以 $\cos(\sin x_1)>\cos(\sin x_2)$，即 $\varphi(x)$ 是减函数.

【**注**】复合函数的单调性：若 $f(x)$ 是增函数，$\varphi(x)$ 是减函数，则 $f[f(x)]$，$\varphi[\varphi(x)]$ 是增函数，而 $f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$ 是减函数.

1.5. (C) 【**解析**】因为 $f(x+2k)=\dfrac{1}{f(x+k)}=f(x)$，故 $f(x)$ 是周期函数.

1.6. (D) 【**解析**】$f(-x)=\begin{cases}(-x)^2, & -x\leqslant 0,\\ (-x)^2+(-x), & -x>0\end{cases}=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ x^2-x, & x<0.\end{cases}$

1.7. (C) 【**解析**】令 $u(x)=\dfrac{2}{x}$，$v(x)=\dfrac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时可排除(A)；令 $u(x)=v(x)=\dfrac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时可排除(B)；令 $u(x)=\dfrac{1}{x}$，$v(x)=-\dfrac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时可排除(D).

1.8. (D) 【**解析**】如 $\alpha(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$，$\beta(x)=x$，当 $x\to 0$ 时，都是无穷小. 但 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，故 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 无法比较阶的高低.

1.9. (A) 【**解析**】对于任意给定的正数 M，总存在着点 $x_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$n>\dfrac{2M-\pi}{4\pi}$，使 $|f(x_n)|=\left|2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right|>M$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.

(C) 错，对于任意给定的正数 M，无论 x 取多么大的正数，总有 $x_n=|2n\pi|>x$（只要 $|n|>\dfrac{x}{2\pi}$），使 $f(x_n)=x_n\sin x_n=0<M$，故当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 不是无穷大. 千万不要将无穷大与无界混为一谈.

1.10. (B) 【**解析**】令 $\dfrac{1}{x}=t$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\sin\frac{1}{x}}-1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\alpha}-\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{\sin t}-1}{(1+t)[(1+t)^{\alpha-1}-1]}=\dfrac{1}{\alpha-1}(\alpha\neq 1)$.

1.11. (D) 【**解析**】设 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时为无界变量，不是无穷大. 令 $g(x)=x$，当 $x\to 0$ 时为无穷小，可排除(A). 设 $x\to 0$ 时，令 $f(x)=x^2$，$g(x)=\dfrac{1}{x}$ 可排除(B)，(C).

1.12. (B) 【**解析**】**方法一**　若 $f(x)+\sin x$ 在点 x_0 处连续，则 $f(x)=[f(x)+\sin x]-\sin x$ 在点 x_0 处也连续，与已知矛盾.

方法二　排除法. 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处间断，$f(x)\sin x=0$ 在 $x=0$ 处连续. 若设 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ $f(x)$ 在点 $x=0$ 处间断，但 $f^2(x)=1$，$|f(x)|=1$ 在 $x=0$ 处都连续. 故可排除(A)，(C)，(D).

1.13. (A) 【**解析**】有限个无穷小的和、差、积、绝对值还是无穷小量.

1.14. (C) 【解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\tan x}-e^x}{x^n}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}-e^x}{x^n}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\left[e^{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}-1\right]}{x^n}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}-1}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^n}=C\neq0,$$

则 $n=3$ 时,$C=\dfrac{1}{3}$.

1.15. (A) 【解析】由泰勒公式 $\sin ax=ax-\dfrac{1}{6}a^3x^3+o(x^3)(x\to0)$,

$$I=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{(1-a)x+\frac{1}{6}a^3x^3+o(x^3)}{-bx^3}=1,$$

故
$$a=1,b=-\frac{1}{6}.$$

1.16. (C) 【解析】由于$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3ax^2+b}{(e^{\sin^2x}-1)\cos x}$,当 $b\neq0$ 时,该极限为 ∞,于是,$b=0$.

从而

$$\lim_{x\to0}\frac{3ax^2+b}{(e^{\sin^2x}-1)\cos x}\xlongequal{\text{等价无穷小代换}}\lim_{x\to0}\frac{3ax^2}{\sin^2x}=3a=1\Rightarrow a=\frac{1}{3}.$$

1.17. (D) 【解析】

$$f(x)=\ln\frac{1+x^2}{1+\sin^2x}=\ln\left(1+\frac{x^2-\sin^2x}{1+\sin^2x}\right)\sim\frac{x^2-\sin^2x}{1+\sin^2x}\sim x^2-\sin^2x(x\to0).$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{x+\sin x}{x}\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^{n-1}}=2\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{(n-1)x^{n-2}}$$

$$\xlongequal{\text{当 } n=4}2\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3},$$

因此,$n=4$.

【注】更希望读者看出:$x^2-\sin^2x=(x+\sin x)(x-\sin x)\sim2x\cdot\dfrac{1}{6}x^3=\dfrac{1}{3}x^4(x\to0)$,这样便可直接得出答案.

1.18. (D) 【解析】分母不为零,故 $\lambda\leqslant0$;又 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$,故 $k>0$.

1.19. (D) 【解析】由 $f(x)$ 的表达式可知 $x=0,x=1$ 为其间断点.

$x\to1^+,x-1\to0^+,\dfrac{x}{x-1}\to+\infty,e^{\frac{x}{x-1}}\to+\infty,f(x)\to0$;

$x\to1^-,x-1\to0^-,\dfrac{x}{x-1}\to-\infty,e^{\frac{x}{x-1}}\to0,f(x)\to-1$;

$x\to0^+,\dfrac{x}{x-1}\to0^-,e^{\frac{x}{x-1}}-1\to0^-,f(x)\to-\infty$;

$x\to0^-,\dfrac{x}{x-1}\to0^+,e^{\frac{x}{x-1}}-1\to0^+,f(x)\to+\infty$.

故 $x=1$ 是第一类间断点,$x=0$ 是第二类间断点,选(D).

1.20. (A) 【解析】$x=0$ 和 $x=1$ 为 $f(x)$ 的间断点,其余点连续.

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\lim_{x\to 0}\ln|x|\cdot x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0,$$

则 $x=0$ 为可去间断点.

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{|x-1|}\sin x=\begin{cases}\sin 1, & x\to 1^+,\\ -\sin 1, & x\to 1^-,\end{cases}$$

因 $x\to 1$ 时,$\ln x=\ln(1+x-1)\sim x-1$,则 $x=1$ 为跳跃间断点. 答案选择(A).

1.21. (C) 【解析】去掉绝对值符号,将$f(x)$ 写成分段函数,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}, & x\in(0,1)\cup(1,+\infty),\\ -\dfrac{1}{x+1}, & x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0),\end{cases}$$

则 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1\neq\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1$,故 $x=0$ 为跳跃间断点.

1.22. (A) 【解析】不妨设 $f(x)$ 单调增加,且 $|f(x)|\leqslant M$,对任一点 $x_0\in(a,b)$,当 $x\to x_0^-$ 时,$f(x)$ 随着 x 增加而增加且有上界,故 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 存在;当 $x\to x_0^+$ 时,$f(x)$ 随着 x 减小而减小且有下界,故 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 存在,故 x_0 只能是第一类间断点.

二、填空题

1.23. na 【解析】令 $x=-1$,则 $f(1)=f(-1)+f(2)$,因 $f(x)$ 是奇函数,得到

$$f(2)=f(1)-f(-1)=2f(1)=2a.$$

再令 $x=1$,则 $f(3)=f(1)+f(2)=3f(1)=3a$,现用数学归纳法证明 $f(n)=na$

当 $n=1,2,3$ 时,已知或者已证. 假设 $n\leqslant k$ 时,有 $f(k)=ka$.

当 $n=k+1$ 时,

$$f(k+1)=f(k-1)+f(2)=(k-1)a+2a=(k+1)a,$$

故对一切正整数 n,有 $f(n)=na$.

令 $x=0$,则 $f(2)=f(0)+f(2)$,即 $f(0)=0=0\cdot a$,又 $f(x)$ 是奇函数,故对一切负整数 n 有

$$f(n)=-f(-n)=-(-na)=na.$$

所以对一切整数 n,均有 $f(n)=na$.

1.24. $e^{\frac{1}{100}x^2}$ 【解析】当 x 充分大时,有重要关系:$e^{\alpha x}\gg x^\beta\gg\ln^\gamma x$,其中 $\alpha,\beta,\gamma>0$,故本题填 $e^{\frac{1}{100}x^2}$.

1.25. $\frac{1}{2}$ 【解析】$\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin 2x}=\dfrac{1}{2}$.

1.26. 0 【解析】$\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$.

1.27. e^6 【解析】$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot 3x}{\sin x}\right\}=e^6$.

1.28. $-\frac{\sqrt{2}}{6}$ 【解析】$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x})(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}{(x+2)(x-1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}$

$$=\frac{1}{6\sqrt{2}}\lim_{x\to 1}\frac{2(1-x)}{x-1}=-\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

1.29. $-\frac{1}{6}$ 【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{(e^{x^2}-1)\ln(1-x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^2(-x)}=-\frac{1}{6}$.

1.30. e^6 【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{2x-1}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3(2x-1)}{x-2}\right\}=e^6$.

1.31. 2 【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)}{\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)}=2.$$

1.32. $5,\frac{1}{4^5}$ 【解析】原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)\left(1-\frac{3}{x}\right)\left(1-\frac{4}{x}\right)\left(1-\frac{5}{x}\right)}{\left(4-\frac{1}{x}\right)^{\alpha}}x^{5-\alpha}=4^{-\alpha}\cdot$

$\lim\limits_{x\to\infty}x^{5-\alpha}=\beta>0$,所以 $\alpha=5,\beta=\frac{1}{4^5}$.

1.33. -3 【解析】当 $x\to 0$ 时,$\ln\frac{1-ax^2}{1+ax^2}=\ln\left(1-\frac{2ax^2}{1+ax^2}\right)\sim-\frac{2ax^2}{1+ax^2}\sim-2ax^2$,

$$\frac{1}{10\ 000}x^4+\sin^2(\sqrt{6}x)\sim\sin^2(\sqrt{6}x)\sim 6x^2,$$

故 $a=-3$.

1.34. $-\frac{2}{9}$;2 【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\cos\frac{2x}{3}\right)}{Ax^k}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\cos\frac{2x}{3}-1\right)}{Ax^k}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos\frac{2x}{3}-1}{Ax^k}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\left(\frac{2x}{3}\right)^2}{2}}{Ax^k}=-\frac{2}{9}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{Ax^k}=1.$$

则 $k=2,-\frac{2}{9A}=1$,即 $A=-\frac{2}{9}$.

1.35. $\frac{1}{3}$;1 【解析】当 $x\to-1$ 时,

$$\sqrt[3]{x}+1\xlongequal{t=x+1}\sqrt[3]{t-1}+1=-(\sqrt[3]{1-t}-1)\sim-\left(-\frac{1}{3}t\right)=\frac{x+1}{3}.$$

故$A=\frac{1}{3},k=1$.

1.36. $-\frac{1}{32}$;2 【解析】当 $x\to\pi$ 时,

$$\sqrt[4]{\sin\frac{x}{2}}-1=\sqrt[4]{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)}-1$$

$$=\sqrt[4]{1+\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)-1\right]}-1$$

$$\sim\frac{1}{4}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)-1\right]$$

$$\sim \frac{1}{4}\cdot\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2\right]=-\frac{1}{32}(x-\pi)^2.$$

故 $A=-\frac{1}{32},k=2$.

1.37. 1 【解析】$\lim\limits_{x\to0^+}e^x(\sin x+\cos x)=1,\lim\limits_{x\to0^-}(2x+a)=a$. $f(x)$ 在零点处连续，可得

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=1=\lim_{x\to0^-}f(x)=a.$$

1.38. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 【解析】因为

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right],$$

而

$$F_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+2}\right],$$

所以$\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+2}}$，由于$\left|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right|<1$，这样$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n\to0(n\to\infty)$，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

三、解答题

1.39.【解】由 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & \frac{1}{e}<g(x)<1,\\ g(x), & 1\leqslant g(x)<e\end{cases}$ 得到 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & -1<x<0,\\ e^x, & 0\leqslant x<1.\end{cases}$

【注】在求 $f[g(x)]$ 时，既要将解析式 $f(x)$ 中的 x 都换为 $g(x)$，同时也要把表示自变量变化范围的地方的 x 换为 $g(x)$，并由得到的不等式求出复合函数的自变量的变化范围.

1.40.【解】本题同样考查分段函数的复合方法. 下面用解析法求解.

首先，广义化为 $f[g(x)]=\begin{cases}[g(x)]^2-1, & g(x)\leqslant0,\\ \ln g(x), & g(x)>0.\end{cases}$

由 $g(x)$ 的表达式知，

① 当 $g(x)\leqslant0$ 时，即$\{2e^x-1\leqslant0\}\cap\{x\leqslant0\}$ 或$\{x^2-1\leqslant0\}\cap\{x>0\}$，而

$$\{2e^x-1\leqslant0\}\cap\{x\leqslant0\}=\{x\leqslant-\ln 2\}\cap\{x\leqslant0\}=\{x\leqslant-\ln 2\},$$
$$\{x^2-1\leqslant0\}\cap\{x>0\}=\{-1\leqslant x\leqslant1\}\cap\{x>0\}=\{0<x\leqslant1\}.$$

② 当 $g(x)>0$ 时，即$\{2e^x-1>0\}\cap\{x\leqslant0\}$ 或$\{x^2-1>0\}\cap\{x>0\}$，而

$$\{2e^x-1>0\}\cap\{x\leqslant0\}=\{x>-\ln 2\}\cap\{x\leqslant0\}=\{-\ln 2<x\leqslant0\},$$
$$\{x^2-1>0\}\cap\{x>0\}=\{x>1 \text{ 或 } x<-1\}\cap\{x>0\}=\{x>1\}.$$

综上，得 $f[g(x)]=\begin{cases}(2e^x-1)^2-1, & x\leqslant-\ln 2,\\ \ln(2e^x-1), & -\ln 2<x\leqslant0,\\ (x^2-1)^2-1, & 0<x\leqslant1,\\ \ln(x^2-1), & x>1.\end{cases}$

1.41.【解】(1) 若 $0 \leqslant x < \dfrac{1}{2}$，则 $\sqrt[n]{1} \leqslant \sqrt[n]{1+(2x)^n+x^{2n}} \leqslant 1 \cdot \sqrt[n]{3}$；

若 $\dfrac{1}{2} \leqslant x < 2$，则 $2x < \sqrt[n]{1+(2x)^n+x^{2n}} \leqslant 2x\sqrt[n]{3}$；

若 $2 \leqslant x < +\infty$，则 $x^2 \leqslant \sqrt[n]{1+(2x)^n+x^{2n}} \leqslant x^2\sqrt[n]{3}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$，故

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<\dfrac{1}{2},\\ 2x, & \dfrac{1}{2}\leqslant x<2,\\ x^2, & 2\leqslant x<+\infty.\end{cases}$$

(2) 因为 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right)$，$\left[\dfrac{1}{2},2\right)$，$[2,+\infty)$ 上均连续，又

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}f(x)=1,\ \lim_{x\to\frac{1}{2}^+}f(x)=1,\ f\left(\frac{1}{2}\right)=1,$$

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=4,\ \lim_{x\to2^+}f(x)=4,\ f(2)=4,$$

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续.

【注】本题源于苏联的数学竞赛题，在近些年考研中多次涉及，是用夹逼准则求极限的典型考题. 注意本题的放缩法.

(1) 夹逼准则：①$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$；②$y_n \to A, z_n \to A \Rightarrow x_n \to A \quad (n\to\infty)$.

(2) 对于 $u_1+u_2+\cdots+u_n$（$u_i \geqslant 0$，n 为有限数），其放缩法为：

$$1\cdot u_{\max} \leqslant u_1+u_2+\cdots+u_n \leqslant n\cdot u_{\max}.$$

1.42.【解】因为 $(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}} > (3^n)^{\frac{1}{n}}=3$，又 $(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}} < (3\cdot3^n)^{\frac{1}{n}}=3\cdot3^{\frac{1}{n}}$，$\lim\limits_{n\to\infty}3\cdot3^{\frac{1}{n}}=3$，由夹逼准则，得 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3$.

1.43.【解】

(1) 当 $x\to0$ 时，$\tan x\sim x$，$(1+\sin x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\dfrac{1}{n}\sin x\sim\dfrac{x}{n}$，故原极限 $=\dfrac{1}{n}$.

(2) 当 $x\to0$ 时，$\sin x\sim x$，$e^x-e^{-x}=e^{-x}(e^{2x}-1)\sim2x$，故原极限 $=2$.

(3) 当 $x\to0$ 时，$\ln(1+x^4)\sim x^4$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$1-\cos\dfrac{x}{2}\sim\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2=\dfrac{1}{8}x^2$，故原极限 $=\dfrac{1}{16}$.

(4) 这是"1^∞"型极限，可用公式 $\lim\limits_{x\to0}u^v=\exp\left\{\lim\limits_{x\to0}v(u-1)\right\}$ 来计算，事实上 $\ln u=\ln[1+(u-1)]\sim u-1\,(u\to1)$. 故原式 $=\exp\left\{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+e^x-1}{x}\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{e^x-1}{x}\right)\right\}=e^2$.

(5) 这是"$\infty-\infty$"型未定式极限，首先通分变成"$\dfrac{0}{0}$"或"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型未定式，然后使用洛必达法则求极限.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)&=\lim_{x\to0}\frac{xe^x(1+x)+1-e^x}{x(e^x-1)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{3xe^x+x^2e^x}{e^x+xe^x-1}\\&=\lim_{x\to0}\frac{3e^x+5xe^x+x^2e^x}{2e^x+xe^x}=\frac{3}{2},\end{aligned}$$

或利用等价无穷小 $e^x-1\sim x$（当 $x\to 0$）代换，则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)&=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x(1+x)+1-e^x}{x(e^x-1)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x(1+x)+1-e^x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3xe^x+x^2e^x}{2x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{3e^x+5xe^x+x^2e^x}{2}=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

【注】典型错误：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x+xe^x}{x}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+xe^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(2e^x+xe^x)=2.$
等价无穷小代换只能在乘除运算时使用，不能在加减运算时使用.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n$ 是"1^∞"型极限，可以使用洛必达法则求极限，也可以凑成第二个重要极限，还可以利用等价无穷小代换.

方法一 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left[\frac{x-2ax+1}{x(1-2a)}\right]^x=\lim_{x\to+\infty}x\ln\left[1+\frac{1}{x(1-2a)}\right]\left(令\frac{1}{x}=t\right)$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{1-2a}\right)}{t}\xlongequal{洛必达法则}\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{1+\frac{t}{1-2a}}\cdot\frac{1}{1-2a}=\frac{1}{1-2a}.$$

方法二 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^n$

$$=\ln\left\{\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^n\right\}=\ln\left\{\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^{n(1-2a)\cdot\frac{1}{1-2a}}\right\}$$

$$=\ln e^{\frac{1}{1-2a}}=\frac{1}{1-2a}.$$

方法三 $\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]\sim\frac{1}{n(1-2a)}(n\to\infty)$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}n\frac{1}{n(1-2a)}=\frac{1}{1-2a}.$$

(7) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{6}\sin^3x\cdot x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{6}x^4}{x^4}=\dfrac{1}{6}.$

投命题者所好，当狗 $\to 0$ 时，狗 $-\sin$ 狗 $\sim\frac{1}{6}$ 狗^3.

(8) 当 $x\to 0$ 时，$e^{\tan x}-e^{\sin x}=e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)\sim\tan x-\sin x$，$x\sin^2x\sim x^3$，故

$$\begin{aligned}原式&=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}\quad\left(当 x\to 0 时，\tan x\sim x,1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\right).\end{aligned}$$

(9) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x(1-\cos x)}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x(1-\cos x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}=\frac{1}{2}.$$

(10) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tan x}{x}-1\right)\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tan x-x}{x}\right)\right\}$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x-x}{x^3}\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to 0^+}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}\right\}=e^{\frac{1}{3}}.$$

根据海涅定理,取 $x=\frac{1}{n}$,则原式 $=e^{\frac{1}{3}}$.

(11) 当 $x=0$ 时,原式 $=1$;

当 $x\neq 0$ 时,原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\cdots$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}.$$

(12) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x+1}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+1}}=e^{-2}$.

(13) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)\cos^2 x}{\sin^2 x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

(14) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\cos x}\cdot\dfrac{\sin x+x^2\sin\frac{1}{x}}{x}\cdot\dfrac{x}{\ln(1+x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+x\sin\frac{1}{x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)}=\frac{1}{2}.$$

(15) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\xlongequal{令\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to 0^+}\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)\right]$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\lim_{t\to 0^+}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{2(1+t)}=\frac{1}{2}.$$

(16) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{a}{x}-\left(\frac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{a}{x}-\frac{1}{x^2}\ln(1+ax)\right]+0$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{ax-\ln(1+ax)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\frac{a}{1+ax}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{a^2x}{2x(1+ax)}=\frac{a^2}{2}.$$

(17) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{x+a}\left(1+\dfrac{b}{x}\right)^{x+b}}{\left(1+\dfrac{a+b}{x}\right)^{2x+a+b}}=\dfrac{e^a\cdot e^b}{e^{2(a+b)}}=e^{-(a+b)}$.

(18) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{x}{1+\ln x}}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x\ln x}{1+\ln x}\right\}=e^0=1$.

(19) $\lim\limits_{x\to0^+}(\cot x)^{\tan x}=\exp\{\lim\limits_{x\to0^+}\tan x\ln(\cot x)\}=\exp\{\lim\limits_{x\to0^+}x\ln(\cot x)\}=e^0=1$.

(20) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin^2x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{\frac{1}{3}x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin^2x)2\sin x\cos x}{\frac{4}{3}x^3}=\dfrac{3}{2}$.

(21) $$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{\frac{1}{2}x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t}{\frac{3}{2}x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x\arctan(1+x^2)}{3x}=\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}.$$

(22) 原式 $=-\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^x\left[\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^x-1\right]}{x^3}=-\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{x\ln\frac{\sin x}{x}}-1}{x^3}$

$$=-\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}=-\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)}{x^2}$$

$=-\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x-x}{x^3}=\dfrac{1}{6}$.（注意常用的公式：$\lim\limits_{x\to0^+}x^x=1$）

(23) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-\sin^2x\cdot\cos^2x}{x^2\sin^2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-\sin^2x\cdot\cos^2x}{x^4}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+\sin x\cdot\cos x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x\cdot\cos x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{\sin x}{x}\cos x\right)\cdot\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{2}\sin 2x}{x^3}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{3x^2}=2\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{3x^2}=\frac{4}{3}.$$

(24) $\ln(1-x)=-x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$；$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^4)$；$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{2^2 2!}+o(x^4)$.

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{x^2\cdot\left[-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]}=\frac{1}{6}.$$

(25) 原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot\frac{1}{2}x(1+\sqrt{\cos x})}=\dfrac{1}{2}$.

(26) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+e^x}{x+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$,故

$$\lim_{x\to+\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=\exp\left\{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+e^x)}{x}\right\}=e.$$

(27) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=0$,

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}=e^0=1$.

(28) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^4)$, $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+o(x^3)\ (x\to 0)$,故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}-x\left(1-\frac{x^2}{2!}\right)+o(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

(29) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]\right\}$

$$\xlongequal{\text{令}\frac{1}{x}=t}\exp\left\{\lim_{t\to 0^+}\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)\right]\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{t\to 0^+}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}\right\}=\exp\left\{\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}t^2}{t^2}\right\}=e^{\frac{1}{2}}.$$

【注】典型错误:$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$. 错误原因:求极限是一个统一的过程,即,在同一极限符号下当 x 趋于 $+\infty$(或 x_0)时,所有的 x 都要趋于 $+\infty$(或 x_0),不能一部分 x 趋于 $+\infty$(或 x_0),而另一部分 x 不趋于 $+\infty$(或 x_0).

1.44.【证】 用反证法. 设 $|f(1)|,|f(3)|,|f(5)|$ 都小于2,即

$|f(1)|=|a+b+1|<2$, $|f(3)|=|3a+b+9|<2$, $|f(5)|=|5a+b+25|<2$,

则 $$|f(1)-2f(3)+f(5)|\leqslant|f(1)|+2|f(3)|+|f(5)|<2+2\times2+2=8.$$

而事实上,$|f(1)-2f(3)+f(5)|=|a+b+1-6a-2b-18+5a+b+25|=8$,与上面结论矛盾,故 $|f(1)|,|f(3)|,|f(5)|$ 中至少有一个不小于2.

1.45.【解】 $\dfrac{1}{n}(1+1+\cdots+1)<\dfrac{1}{n}(1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n})<\dfrac{1}{n}(\sqrt[n]{n}+\sqrt[n]{n}+\cdots+\sqrt[n]{n})$,即

$$1<\frac{1}{n}(\sqrt[n]{1}+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n})<\sqrt[n]{n}.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n})=1$.

1.46.【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos x}(e^{1-\cos x}-1)}{\frac{1}{3}x^2}=e\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{3}x^2}\right)=\dfrac{3}{2}e.$

1.47.【解】 因为 $x\to 0$ 时,$\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1=e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1\sim x\ln\dfrac{2+\cos x}{3}$,而

$$\ln\frac{2+\cos x}{3}=\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)\sim\frac{\cos x-1}{3}\sim\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3}=-\frac{1}{6}x^2,$$

故原极限 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3}=-\dfrac{1}{6}.$

1.48.【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sin^2x+e^x)-\ln e^x}{\ln(x^2+e^{2x})-\ln e^{2x}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{\sin^2x+e^x}{e^x}\right)}{\ln\left(\frac{x^2+e^{2x}}{e^{2x}}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{\sin^2x}{e^x}\right)}{\ln\left(1+\frac{x^2}{e^{2x}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{e^x}\cdot\frac{e^{2x}}{x^2}=\lim_{x\to0}e^x=1.$$

1.49.【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(1-x^{x-1})}{1-x+\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x[1-e^{(x-1)\ln x}]}{1-x+\ln x}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-x(x-1)\ln x}{1-x+\ln x}=-\lim_{x\to1}\frac{(2x-1)\ln x+(x-1)}{-1+\frac{1}{x}}$$

$$=-\lim_{x\to1}\frac{(2x^2-x)\ln x+x(x-1)}{1-x}=-\lim_{x\to1}\frac{(2x^2-x)\ln x}{1-x}+1$$

$$=1-\lim_{x\to1}\frac{(4x-1)\ln x+(2x-1)}{-1}=1+1=2.$$

1.50.【解】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x+\cos x-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})}{x^2},$$

而 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})(1+\sqrt{\cos 2x})}{x^2(1+\sqrt{\cos 2x})}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\cdot4x^2}{x^2}=1,$$

故原极限 $=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}.$

1.51.【解】 为了在使用洛必达法则时使求导变得简单，先做变量代换，令 $t=\dfrac{1}{x}$，

从而原式 $=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^{2t})}{\ln(1+e^t)}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}\cdot\dfrac{1+e^t}{e^t}=2.$

1.52.【解】 此题为“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式，若用洛必达法则，则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}.$$

连续使用完两次法则，又回到了起点，法则失效，正确的做法是先对式子恒等变形.

分子分母同乘 e^{-x}，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1.$