



半导体激光器设计理论 II

半导体激光器 激光波导模式理论 (下册)

郭长志 编著



科学出版社

国家科学技术学术著作出版基金资助出版
半导体激光器设计理论 II

半导体激光器 激光波导模式理论

(下 册)

郭长志 编著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

模式理论是研究激光在波导光腔中的传播规律、各种波导结构中可能存在的各种光模类型和模式结构特点,揭示激光模式结构与波导结构的内在联系,从而发现控制波导结构和模式结构的途径。由于光在传播过程中主要突出其波动性,因而量子场论和经典场论基本上导出相同的结果,因此完全可以从麦克斯韦方程组出发进行分析。其任务是找出器件性能所需的最佳激光模式结构和设计出其合理的波导光腔结构方案。本书是在作者1989年12月出版的《半导体激光模式理论》的基础上,作了修订和大量补充完备,以反映作者及其团队几十年来取得的重要研究成果和该领域的最新进展。全书论述既重基础又涉及前沿,既重物理概念又重推导编程演算。

本书适合有关专业的大学高年级学生、研究生、研究人员和教师作为专业教材、参考书或自修提高的读物。

图书在版编目(CIP)数据

半导体激光器激光波导模式理论. 下册/郭长志编著. —北京:科学出版社, 2015.11

(半导体激光器设计理论)

ISBN 978-7-03-046261-9

I. ①半… II. ①郭… III. ①半导体激光器-激光-光波导-研究
IV. ①TN248.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第265593号

责任编辑:钱俊 裴威/责任校对:张凤琴
责任印制:徐晓晨/封面设计:耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京京华虎影印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015年11月第一版 开本:720×1000 B5

2015年11月第一次印刷 印张:29

字数:572 000

定价:168.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

总 序

任何激光器都由三个主要部分组成，一是增益材料、二是波导光腔、三是激发机制。半导体激光器的增益材料主要是直接带隙半导体，包括高折射率的体半导体和低维半导体（量子阱、量子线、量子点），或低折射率的掺铒 (Er) SiO_2 、掺铟 Si_3N_4 等；其波导光腔可由介电波导或等离子体波导构成，其激发机制可为光注入、p-n 结注入、或量子隧穿注入等。

人们在 1948 年提出半导体激光器的设想，1961 年在理论上肯定了半导体中实现粒子数反转的可能性，并于 1962 年在发光二极管偶然观测到激光发射现象之后，制成同质结激光器。从此不断为其提高工作寿命、降低阈值（首先是为了实现室温连续工作）、控制激光模式、提高出光功率、提高调制速率、提高工作温度、拓宽激光波长范围、微型化和集成化、以及某些特殊用途等的目标而迅速发展。

在半导体激光器的发展过程中，理论和实验之间，或先或后、互相促进、共同得到重大发展。其中富有活力的设计理论，往往因其开创性和前瞻性，在思想上起着开路先锋的作用。半导体激光器的设计理论大体可分为：工艺理论、速率方程理论、模式理论和量子理论四个方面：

(1) 工艺理论在继承传统半导体工艺理论，例如，熔体拉晶、杂质扩散、离子注入、掩膜刻蚀、熔焊烧结等的基础上，着重发展了液相外延、分子束外延、金属有机气相沉积外延生长和自组织生长等化学热力学和晶体生长动力学的设计理论。其任务是根据半导体激光器件的结构和性能上的要求，设计出合理可行的制作工艺方法、条件和流程。

(2) 速率方程理论是从微观唯象观点，以唯象参数为工具，以粒子数守恒为依据的速率方程为分析手段的半导体激光器件物理理论，从全局上揭示了半导体激光器的激射阈值相变、多模之间的模式竞争、模式谱系结构等静态行为，延迟、过冲、振荡过渡等瞬态行为、调制方式方法及其速率、动态频谱结构、动态单模化、光模注入锁定、激光的双稳态、自脉动、分叉、混沌、量子噪声和谱线展宽、载流子在量子阱、量子线、量子点等低维结构中的捕获和逃逸等动力学行为及其物理机制。至于所涉的有关唯象参数的数值大小则由实验估测，而其物理机制、内涵、导出、和理论估算等，则由下述宏观和微观理论分别解决和提供。其任务是挖掘器件的潜能、发现和提出可能的新器件或新性能、提出优化器件现有性能等的器件设计方案。

(3) 模式理论是研究激光在波导光腔中的传播规律，各种波导结构中可能存在

的各种光模类型和模式结构特点、揭示激光模式结构与波导结构的内在联系，从而发现控制波导结构和模式结构的途径。由于光在传播过程中主要突出其波动性，因而量子场论和经典场论基本上导出相同的结果，因此完全可以从麦克斯韦方程组出发进行分析。其任务是找出器件性能所需的最佳激光模式结构和设计出其合理的波导光腔结构方案。

(4) 量子理论是研究半导体激光器中体半导体、量子阱、量子线、量子点等增益介质的电子能谱结构及其电子与辐射光场的相互作用，包括光的产生、吸收、放大和散射等涉及不同能带之间、能带以内不同子带或各种晶格缺陷和杂质能级之间的光跃迁和非光跃迁、带内散射和弛豫等决定半导体激光器涉及光电性能的重要量子行为。其处理所涉电子系统与光子系统相互作用的理论基础或出发点，有经典理论、半经典理论、全量子理论三个层次。经典理论是将电子的运动服从牛顿力学，光波及其与电子的相互作用服从经典场论，即麦克斯韦方程组。这对众多的电子与光波之间弱相互作用的折射率现象和自发发射因子现象都可得出相当成功的理论结果。半经典理论是将电子的运动服从量子力学，但对光波采用经典场论近似，即近似服从麦克斯韦方程组。这在受激辐射和散射问题都获得非常成功，但无法直接处理自发辐射问题。全量子理论是将电子和光子的运动皆统一服从量子力学，即将电磁辐射场量子化，这样的量子场论与量子电动力学或量子电子学或光子学的差别只在一般可忽略相对论效应。至于光和非光跃迁所涉的增益介质中的电子能级则由半导体能带的量子理论得出。因此，现行的半导体激光器激光过程的理论大多是以半导体能带结构理论和半经典光跃迁的量子理论为基础。其任务是研究半导体激光材料的光增益和激光的量子效率，及其光增益谱结构，如增益谱的峰值增益及其相应的峰值能量和增益谱宽与半导体能带结构的关系，以及影响增益的可能因素，提出拓宽激光波段和提高激光增益的新材料及其受到增益介质的尺寸大小和维数的影响。这对半导体激光器的激射阈值、激光功率、调制速率、器件结构和激光波段等都有根本性的意义。

这部《半导体激光器设计理论》丛书是作者自 20 世纪六七十年代迄今的几十年期间在北京大学物理系和国内有关院校和研究所以及加拿大多伦多大学和美国亚利桑那州立大学的研究生和研究人员、部分教师和大学高年级本科生讲授这方面由《半导体激光器工艺理论》、《半导体激光器速率方程理论》、《半导体激光器激光波导模式理论》和《半导体激光器能带结构和光增益的量子理论》的四个学期研究生系列课程的自编讲义，并在教学和科研实践过程中不断修改、更新、补充的后三部分整理成相对独立但密切联系的三卷集组成。第 I 卷 (LT1)《半导体激光器速率方程理论》分三章，先在第 1 章中详细讨论半导体异质结构的注入(激发)及其电流的机制、能带图表述及其绘制、并着重探讨与新近垂直腔面发射激光器 (VCSEL) 的发展密切相关的多层同型异质结理论。同时也为速率方程理论的建立

提供坚实的物理和理论背景,并打好编程计算的基础。第 2 章中建立光子和电子相互作用所应服从的微观唯象粒子数速率方程组,并讨论其静态解,即电子和光子相互作用动平衡时的静态现象。第 3 章则深入探讨半导体激光器的瞬态行为、小信号和大信号简谐波调制和脉码调制的行为、自脉动忽然分岔等不稳定现象和双稳态现象、随机过程等动力学行为及其设计应用。

第 II 卷 (LT2)《半导体激光器激光波导模式理论》分上下册共四章,上册在开始的引言中总结了光波导腔在激光形成中的作用,第 1 章从经典场论和经典电子论的观点系统分析光与半导体和金属介质相互作用产生的介质光学性质及其形成的各种光波导和相应的各种模式。第 2 章深入探讨作为波导理论“基元”的突变三层平板波导腔内外模式的空间结构和频谱结构。在此基础上进而推广讨论多层平板、圆柱、圆盘和矩形直柱等突变波导及其模式结构,并建立三层平板波导和微盘自发发射因子的经典场论。下册在第 3 章中详细分析由于注入非平衡载流子和非平面外延晶体层形成的非自建和自建缓变波导及其腔内外的模式结构。至此主要讨论的都是各种横截面直柱波导的横模 (x 方向) 和侧模 (y 方向) 的形成和控制问题,第 4 章集中系统分析光波近平行光腔层面的端面发射激光器和光波近垂直光腔层面的表面发射直柱激光器纵模 (z 方向) 的形成和控制问题。

第 III 卷 (LT3)《半导体激光器能带结构和光增益的量子理论》系统论述激光产生和控制过程的量子性质及其量子理论,共分三章,第 1 章系统论述半导体由单电子近似算出的电子能带结构及其图谱,即电子能量随电子波矢 k 的变化,特别是比较成功和比较精确计算 k 空间极值点附近能带结构的 $k \cdot p$ 微扰论、处理应变对能带结构的影响的皮库斯 - 毕耳哈密顿量、估算异质结界面能带阶量的模型固体理论、计算量子阱中电子态和子带结构的包络函数理论和有效质量方程。第 2 章深入论述半导体中光跃迁过程的半经典理论及其费米黄金定则,并在此基础上建立半导体及其量子阱光增益的半经典理论。第 3 章系统论述半导体带内的子带间光跃迁的半经典理论和量子光学即辐射场的全量子理论一些基本概念的概述作为本分卷的结束。

本系列课程的开设是在半导体激光器的诞生和发展的初期,为了助力我国迎头赶上,争取与世界同步开拓这新领域而努力开展研究和培养提高这方面的人才,因而教学对象不只是本校学生,而是面对各个院校开始从事这新领域的学习和研究的朝气蓬勃负有重任的人员,他们多么渴望高效迅速获得这新领域的核心知识、技能和设备。

由于本丛书源自上述后三个学期课程,每学期上课约 20 周、每周 4 学时的讲义,每讲结尾都有学习重点、习题和参考文献,学员选修这系列课程可从任一学期的课程开始,以每讲为一个学习单元,基本不重复和遗漏。故书中虽以章节为主线,但仍随每周 4 学时的实际讲义划分教学段落,分别给出每讲的学习重点、习题和

参考文献。这三者的编号也冠以课程讲义序号。例如,第五讲学习重点、Ex.5.1(a)、文献 [5.4] 等。类此,如果引用第 I 卷的章节、论断、公式、图、表、则在其右上角注明 LT1 等。例如:见 1.2.1 节^{LT1}，“有消除异质界面势垒尖峰的作用”^{LT1}，式 (1.2-1h)^{LT1}，图 1.2-1A(b)^{LT1}，表 1.2-1^{LT1} 等。

本丛书在教学和编写过程中参考了国内外同行发表的优秀著作,得到国内外参加本课程学习的研究生、研究人员、教师和研究合作者讨论交流启发的助益;以及 2005 至 2012 年在中国科学院半导体研究所为部分研究生和研究人员系统讲授 5 轮这系列课程共 15 个学期历时七年半,得以将这系列课程的讲义最后定稿。这期间一直得到该所研究生部全体成员的大力支持和帮助;科学出版社和钱俊责任编辑及其同事们的鼓励、支持和帮助;北京大学物理系虞丽生教授、清华大学电子工程系罗毅教授和中国科学院半导体研究所王启明院士对本丛书出版的鼓励和推荐;国家科学技术学术著作出版基金的充分资助,等。对这些非常珍贵的鼓励、支持和帮助,一并致以衷心诚挚的感谢,并恳请国内外同行、学员和各界读者随时指出本丛书中任何差错和不足之处,以便认真检查修正和补充,不胜感激。

郭长志

2014 年 11 月 16 日于北京

目 录

第 3 章 缓变波导	499
3.1 延伸抛物型波导	500
3.1.1 二维延伸抛物型实折射率波导	500
3.1.2 出射光束	513
3.1.3 一维延伸抛物型复折射率波导	538
3.1.4 模式稳定性	549
3.2 突变-缓变波导	557
3.2.1 模式电场方程的一维化	557
3.2.2 突变-延伸抛物型波导	561
3.2.3 突变-平方正切波导	567
3.2.4 突变-延伸幂函数波导	571
3.3 截断缓变波导	582
3.3.1 突变-平方双曲正切波导	582
3.3.2 突变-截断幂函数波导	596
3.4 有源区内的注入载流子分布	625
3.4.1 载流子的双极性扩散过程	625
3.4.2 有源区内垂直于结平面方向的载流子分布	628
3.4.3 结电流分布模型	644
3.4.4 一维化结电压模型	661
3.4.5 二维条形结电压分布和改进的模型	684
3.4.6 条形激光器中电压、电流和载流子分布的精确模型 —— 有限差分法	701
3.5 非平面波导	730
3.5.1 结构形式和分析方法	730
3.5.2 非等厚有源层内的扩散方程	732
3.5.3 数值例子	733
3.5.4 非平面波导过程的特点	738
第 4 章 分布反馈波导	743
4.1 引论	743
4.2 分布反馈激光器	743
4.2.1 周期刻槽的光栅效应	748

4.2.2	耦合波理论	749
4.2.3	近似解析解	765
4.2.4	色散和禁带	769
4.2.5	数值结果	772
4.2.6	增益光栅的实现	784
4.3	分布布拉格反射激光器	789
4.3.1	作为布拉格反射体的周期刻槽	791
4.3.2	分布布拉格反射激光器的基本特性	798
4.3.3	有集成输出波导的半导体激光器	815
4.3.4	光栅刻槽形状对耦合系数的影响	815
4.4	薄膜光学的电磁理论基础	828
4.4.1	薄膜干涉的特点和薄膜与厚膜的判据	829
4.4.2	光波在多层薄膜结构的行为	834
4.5	光学薄膜光学特性的计算方法	857
4.5.1	薄膜光学性质的等效性	857
4.5.2	逐面逐层迭代——菲涅耳矩阵传递法	865
4.5.3	逐面逐层迭代——导纳矩阵和相位矩阵递推法	868
4.5.4	干涉矩阵等效递推法	872
4.5.5	本征值与反射率	879
4.5.6	单层介质膜的主要光学特性	885
4.5.7	膜系的透射率和吸收率	890
4.5.8	光学薄膜的驻波场计算方法	892
4.5.9	图解法及其应用	895
4.5.10	低损耗激光反射体的设计	904
	索引	950

第3章 缓变波导

在同质结或异质结条形激光器中，平行于结平面方向的波导，主要是由注入非平衡载流子分布造成的增益分布和折射率分布所构成的，如图 3.1-1A(a) 所示。这些分布的具体形状，是由非平衡载流子在一定的外加电压以及一定的几何结构和材料组合下的漂移、扩散和复合过程所决定的。而且，随着外加电压的增加，激光的强度将增加，导致受激复合剧增，使这些分布产生所谓“空间烧孔”的畸变，从而改变了波导的结构和性质，造成了各种稳态和瞬态不稳定性。这类激光器的这些不稳定性，主要是由其波导的非内建性质造成的。同时，其波导的增益性质也使其激光谱线宽度比折射率波导增宽了约三个量级。但是，其波导的缓变性质却有利于增大保持单基侧横模运行的波导宽度。因此，在缓变波导的设计和制作中，要求寻找既能实现缓变波导的内建性质，又能获得折射率波导性质的方案。例如，采用非平面一

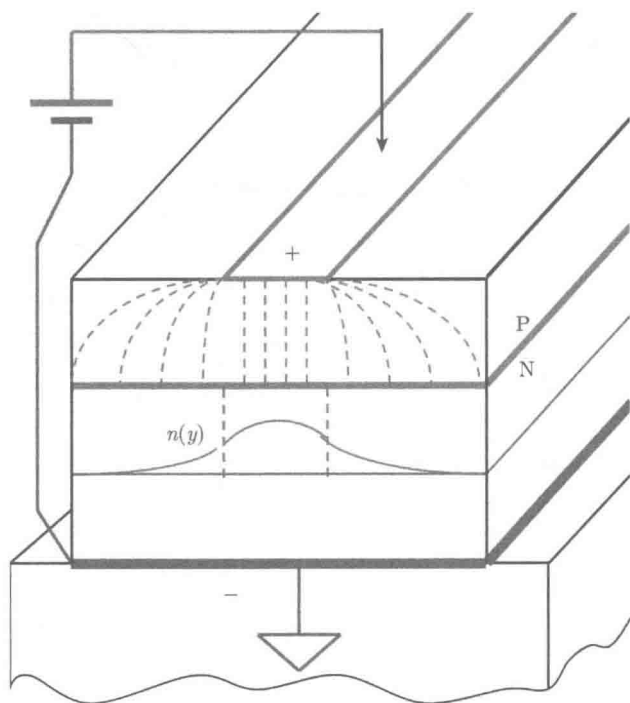


图 3.1-1A(a) 条形电极双异质结激光器中平行结面的侧向非内建增益波导的形成示意

次外延生长形成的有源层缓变的波导结构，如图 2.5-2B 所示，是一个不但可以解决非内建波导的不稳定性问题，还可以克服增益波导对谱线的增宽作用，有利于激光的单色化或单频化的可实现方案之一。显然，缓变波导的理论分析将比突变波导的分析困难得多。首先必须确定增益和折射率的大小及分布，然后才能确定波导的结构和性质。因而，必须研究决定非平衡载流子分布的各种物理过程，并从之求出在一定条件下形成的分布，这就必然会涉及比较复杂的物理过程和数学手段。但为了使问题简化，便于得出近似正确的结果，往往对可能的分布采用各种近似的分布模型，从而可以解析地得出其相应的模式行为。这种方法的缺点一方面是所设分布模型不完全如实，另一方面是不能随注入条件自动变化其分布。但它可以提供介质分布与模式行为之间的关系以及关于缓变分布对模式行为影响的某些典型规律性和概念，有利于作进一步的精确分析。因此，本章将先从各种介质分布模型入手，并由缓变条件避免作更复杂的矢量波动方程处理，逐步深入到决定这些分布的物理根源及其解析解，从而加深对缓变波导及其特有的模式行为的规律性认识。

3.1 延伸抛物型波导

在对称缓变有源波导中，介质的复折射率分布在有源区中心有一极值。因此，在极值附近必具有抛物型分布，但一般离极值越远其分布将越偏离抛物型分布。到

处都具有抛物型分布的介质，称为平方律介质。这种介质具有使光波会聚或发散的功能，如图 3.1-1A(b) 所示。由这种介质形成的波导，其模式在波导内和出射后均具有厄米-高斯分布，如图 3.1-1A(c) 和图 3.1-1B, 2B 所示。这种模式结构可以用光束宽度和等相面曲率半径来表征，因而易于进行解析处理，便于对一般缓变波导过程的典型规律性取得一些具有普遍意义的基本认识。

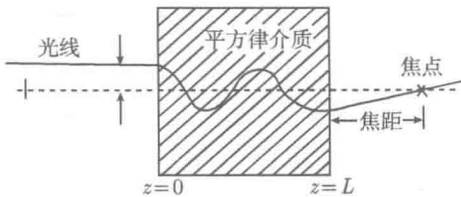


图 3.1-1A(b) 平方律介质

3.1.1 二维延伸抛物型实折射率波导^[1.17, 14.1~14.4]

1. 电磁模型

在对称分布情况下，可将介质的实介电常数 $\epsilon(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 附近展开为泰勒级数：

$$\epsilon(x, y) = \epsilon(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial x}\right)_{x_0, y_0} (x - x_0) + \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial y}\right)_{x_0, y_0} (y - y_0)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} \right)_{x_0, y_0} (x - x_0)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} \right)_{x_0, y_0} (y - y_0)^2 \\
& + \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x \partial y} \right)_{x_0, y_0} (x - x_0)(y - y_0) + \dots
\end{aligned} \quad (3.1-1a)$$

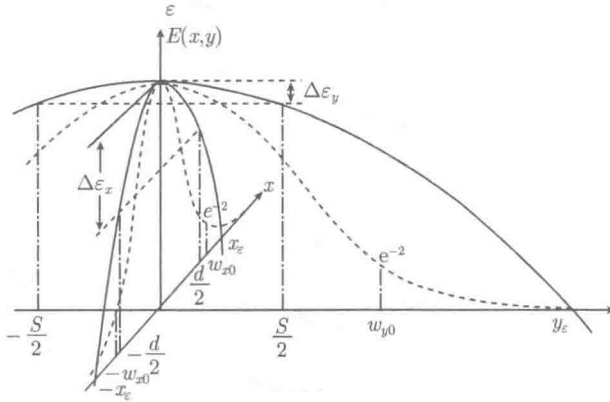


图 3.1-1A(c) 二维抛物型波导的电磁模型

如果 $\varepsilon(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处是极大值, 而且对 x, y 是对称和可分离的, 则

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)_{x_0, y_0} &= 0, & \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right)_{x_0, y_0} &= 0, & \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x \partial y} \right)_{x_0, y_0} &= 0, \\
\left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} \right)_{x_0, y_0} &< 0, & \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} \right)_{x_0, y_0} &< 0
\end{aligned} \quad (3.1-1b)$$

如果再取 (x_0, y_0) 为原点, 则在原点附近可将实介电常数近似表为

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon(x, y)}{\varepsilon_0} &= \bar{n}^2(x, y) \approx \frac{\varepsilon(0, 0)}{\varepsilon_0} + \frac{1}{2\varepsilon_0} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} \right)_{0,0} x^2 + \frac{1}{2\varepsilon_0} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} \right)_{0,0} y^2 \\
&= \frac{\varepsilon(0, 0)}{\varepsilon_0} \left\{ 1 - \left[\frac{-1}{2\varepsilon(0, 0)} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} \right)_{0,0} \right] x^2 - \left[\frac{-1}{2\varepsilon(0, 0)} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} \right)_{0,0} \right] y^2 \right\}
\end{aligned} \quad (3.1-1c,d)$$

或写成

$$\bar{n}^2(x, y) = \bar{n}_0^2 \left[1 - \left(\frac{x}{x_\varepsilon} \right)^2 - \left(\frac{y}{y_\varepsilon} \right)^2 \right] \quad (3.1-1e)$$

$$\bar{n}_0^2 = \frac{\varepsilon(0, 0)}{\varepsilon_0}, \quad x_\varepsilon \equiv \frac{\bar{n}_0}{\sqrt{\frac{-1}{2\varepsilon_0} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} \right)_{0,0}}}, \quad y_\varepsilon \equiv \frac{\bar{n}_0}{\sqrt{\frac{-1}{2\varepsilon_0} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} \right)_{0,0}}} \quad (3.1-1f)$$

式 (3.1-1c,e) 成立的条件是

$$x < x_\varepsilon, \quad y < y_\varepsilon \quad (3.1-1g)$$

如将上述在原点附近才成立的性质无限推广, 认为到处适用, 则得二维延伸抛物型实折射率分布模型, 如图 3.1-1A(c)、(d)所示。显然, 这是对实际情况的一种近似, 它适用于模式光场比较集中在上述原点附近, 而且光强不太强的情况, 否则将可能得出不正确的结果。

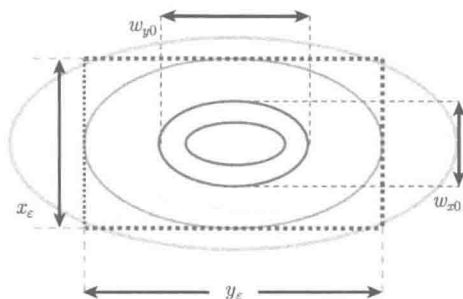


图 3.1-1A(d) 二维延伸抛物型波导的等效矩形波导

2. 近似标量波动方程及其导波模式解

设模式的场强在 x 和 y 方向上的特征半宽度分别为 w_{x0} 和 w_{y0} (图 3.1-1A(d)), 则式 (3.1-1g) 要求

$$w_{x0} \ll x_\varepsilon, \quad w_{y0} \ll y_\varepsilon \quad (3.1-1h)$$

因而在

$$|x| \leq w_{x0} \ll x_\varepsilon, \quad |y| \leq w_{y0} \ll y_\varepsilon \quad (3.1-1i)$$

范围内有

$$\frac{\nabla \varepsilon(x, y)}{\varepsilon(x, y)} = \frac{-2 \left(\frac{x}{x_\varepsilon^2} \mathbf{a}_x + \frac{y}{y_\varepsilon^2} \mathbf{a}_y \right)}{1 - \left(\frac{x}{x_\varepsilon} \right)^2 - \left(\frac{y}{y_\varepsilon} \right)^2} \approx 0 \sim \frac{\pm 2 \left(\frac{w_{x0}}{x_\varepsilon^2} \mathbf{a}_x + \frac{w_{y0}}{y_\varepsilon^2} \mathbf{a}_y \right)}{1 - \left(\frac{w_{x0}}{x_\varepsilon} \right)^2 - \left(\frac{w_{y0}}{y_\varepsilon} \right)^2} \approx 0 \sim \pm 0 \quad (3.1-1j)$$

在无自由电荷 ($\rho=0$) 的 ε 介质中, 电位移矢量的散度为零的式 (1.1-1a) 化为

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \nabla \cdot \varepsilon \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon E_x + \frac{\partial}{\partial y} \varepsilon E_y + \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon E_z \\ &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} E_x + \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} E_y + \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} E_z + \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial z} \\ &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} E_x + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} E_y + \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} E_z + \varepsilon \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

$$= \nabla \varepsilon \cdot \mathbf{E} + \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = -\mathbf{E} \cdot \left[\frac{\nabla \varepsilon(x, y)}{\varepsilon(x, y)} \right] \quad (3.1-1k)$$

在缓变介质中, 虽然介电常数不是均匀的, 但只要其变化足够缓变 ($|\nabla \varepsilon| \ll \varepsilon$), 则 $\nabla \varepsilon / \varepsilon \approx 0$, 由式 (3.1-1k), $\nabla \cdot \mathbf{E} \approx 0$, 而且在 $|x| > w_{x0}$, $|y| > w_{y0}$ 处, 模式光场很弱(图 3.1-1A), 因此标量波动方程 (1.1-2g,j) 及其亥姆霍兹方程 (1.1-2n) 近似成立。对于 $E, H \propto e^{i\omega t}$, $k_0 = \omega/c_0 = 2\pi/\lambda_0$:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \varepsilon(x, y) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -k_0^2 \bar{n}^2(x, y) \mathbf{E}, \quad \nabla^2 \mathbf{H} = \mu_0 \varepsilon(x, y) \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -k_0^2 \bar{n}^2(x, y) \mathbf{H} \quad (3.1-1l)$$

在二维直腔缓变波导中, 仍然有 E_{mn}^y 的准 TE 模和 E_{mn}^x 的准 TM 模两种混合模式。对 E_{mn}^y 模式, 其主要模式场分量为

$$E_y(x, y, z, t) = E_y(x, y) e^{i(\omega t - \beta_z z)}, \quad E_y(x, y) = X(x)Y(y) \quad (3.1-1m)$$

代入式 (3.1-1l), 得

$$\frac{\partial^2 E_y(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y(x, y)}{\partial y^2} = \left\{ \beta_z^2 - k_0^2 \bar{n}_0^2 \left[1 - \left(\frac{x}{x_\varepsilon} \right)^2 - \left(\frac{y}{y_\varepsilon} \right)^2 \right] \right\} E_y(x, y) \quad (3.1-1n)$$

为进行分离变量处理, 按变量移项后, 再遍除以 XY , 得

$$\beta_z^2 - k_0^2 \bar{n}_0^2 \left[1 - \left(\frac{x}{x_\varepsilon} \right)^2 \right] - \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} - k_0^2 \bar{n}_0^2 \left(\frac{y}{y_\varepsilon} \right)^2 = -B \quad (3.1-1o)$$

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - k_0^2 \bar{n}_0^2 \left(\frac{x}{x_\varepsilon} \right)^2 = B + \beta_z^2 - k_0^2 \bar{n}_0^2 = -A \quad (3.1-1p)$$

故得

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \left[A - k_0^2 \bar{n}_0^2 \left(\frac{x}{x_\varepsilon} \right)^2 \right] X = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} + \left[B - k_0^2 \bar{n}_0^2 \left(\frac{y}{y_\varepsilon} \right)^2 \right] Y = 0 \quad (3.1-1q, q')$$

令

$$\xi \equiv \left(\frac{k_0 \bar{n}_0}{x_\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} x \equiv \frac{\sqrt{2}}{w_{x0}} x, \quad \eta \equiv \left(\frac{k_0 \bar{n}_0}{y_\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} y \equiv \frac{\sqrt{2}}{w_{y0}} y, \quad w_{x0} \equiv \frac{\sqrt{\lambda_0 x_\varepsilon}}{\pi \bar{n}_0}, \quad w_{y0} \equiv \frac{\sqrt{\lambda_0 y_\varepsilon}}{\pi \bar{n}_0} \quad (3.1-1r, r')$$

则式 (3.1-1q) 化为

$$\frac{d^2 X}{dx^2} \frac{x_\varepsilon}{k_0 \bar{n}_0} + \left(\frac{A x_\varepsilon}{k_0 \bar{n}_0} - \frac{k_0 \bar{n}_0}{x_\varepsilon} x^2 \right) X = 0 \rightarrow \frac{d^2 X}{d\xi^2} + \left(\frac{A x_\varepsilon}{k_0 \bar{n}_0} - \xi^2 \right) X = 0 \quad (3.1-1s)$$

式 (3.1-1q') 化为

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} \frac{y_\varepsilon}{k_0 \bar{n}_0} + \left(\frac{B y_\varepsilon}{k_0 \bar{n}_0} - \frac{k_0 \bar{n}_0}{y_\varepsilon} y^2 \right) Y = 0 \rightarrow \frac{d^2 Y}{d\eta^2} + \left(\frac{B y_\varepsilon}{k_0 \bar{n}_0} - \eta^2 \right) Y = 0 \quad (3.1-1s')$$

式 (3.1-1s,s') 是厄米函数的微分方程, 其导波模式解的条件是 (见 3.1.2, 5. 节)

如要求

$$x \rightarrow \infty \text{ 时, } X(x) \text{ 为有限; } y \rightarrow \infty \text{ 时, } Y(y) \text{ 为有限} \quad (3.1-1t, t')$$

则要求

$$\frac{A x_\varepsilon}{k_0 \bar{n}_0} = 2m + 1, m = 0, 1, 2, \dots; \quad \frac{B y_\varepsilon}{k_0 \bar{n}_0} = 2n + 1, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1-1u, u')$$

由式 (3.1-1m,o,p) 求出厄米函数的微分方程的本征值和本征函数 (厄米多项式与高斯函数) 为

$$\begin{aligned} \beta_z^2 &= k_0^2 \bar{n}_0^2 - A - B = k_0^2 \bar{n}_0^2 \left(1 - \frac{2m+1}{k_0 \bar{n}_0 x_\varepsilon} - \frac{2n+1}{k_0 \bar{n}_0 y_\varepsilon} \right) \\ &= k_0^2 \bar{n}_0^2 - \left(\frac{2m+1}{x_\varepsilon} - \frac{2n+1}{y_\varepsilon} \right) k_0 \bar{n}_0 \equiv \beta_{mn}^2 \end{aligned} \quad (3.1-1v)$$

$$X_m = e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_m(\xi) = e^{-\left(\frac{x}{w_{x0}}\right)^2} H_m\left(\sqrt{2} \frac{x}{w_{x0}}\right),$$

$$Y_n = e^{-\frac{\eta^2}{2}} H_n(\eta) = e^{-\left(\frac{y}{w_{y0}}\right)^2} H_n\left(\sqrt{2} \frac{y}{w_{y0}}\right) \quad (3.1-1w, w')$$

$$\begin{aligned} E_{mn}(x, y, z, t) &= \tilde{E}_{mn} e^{-\left(\frac{x}{w_{x0}}\right)^2 - \left(\frac{y}{w_{y0}}\right)^2} H_m\left(\sqrt{2} \frac{x}{w_{x0}}\right) \\ &\quad H_n\left(\sqrt{2} \frac{y}{w_{y0}}\right) e^{i(\omega t - \beta_{mn} z)} \end{aligned} \quad (3.1-1x)$$

其中, $\tilde{E}_{mn} \equiv \mathcal{E}$ 是由光功率决定的归一化常数, 其中各阶厄米多项式分别为

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0(\xi) = 1, \quad H_1(\xi) = 2\xi, \quad H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2; \\ H_0(\eta) = 1, \quad H_1(\eta) = 2\eta, \quad H_2(\eta) = 4\eta^2 - 2 \\ H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi, \quad H_4(\xi) = 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12; \\ H_4(\eta) = 16\eta^4 - 48\eta^2 + 12, \quad H_3(\eta) = 8\eta^3 - 12\eta \\ H_5(\xi) = 32\xi^5 - 160\xi^3 + 120\xi; \\ H_5(\eta) = 32\eta^5 - 160\eta^3 + 120\eta \\ H_6(\xi) = 64\xi^6 - 480\xi^4 + 720\xi^2 - 120; \\ H_6(\eta) = 64\eta^6 - 480\eta^4 + 720\eta^2 - 120 \\ H_7(\xi) = 128\xi^7 - 1344\xi^5 + 3360\xi^3 - 1680\xi; \\ H_7(\eta) = 128\eta^7 - 1344\eta^5 + 3360\eta^3 - 1680\eta \end{array} \right. \quad (3.1-1y)$$

其迭代关系为

$$H_{m+1}(\xi) - 2\xi H_m(\xi) + 2mH_{m-1}(\xi) = 0, \quad H_{n+1}(\eta) - 2\eta H_n(\eta) + 2nH_{n-1}(\eta) = 0 \quad (3.1-1z)$$

并分别有 m 和 n 个零点。高斯函数 $e^{-\left(\frac{x}{w_{x0}}\right)^2}$ 和 $e^{-\left(\frac{y}{w_{y0}}\right)^2}$ ，分别在 $x = w_{x0}$ 和 $y = w_{y0}$ 处减小到 e^{-1} 。因而 w_{x0} 和 w_{y0} 分别是模式的场强在 x 和 y 方向上的 e^{-1} 半宽度。具有厄米函数形式的振幅分布和光强分布分别如图 3.1-1B(a),(b) 所示。其光强分布即近场图(near field pattern)，可在其端面上测出。显然，式 (3.1-1x) 的等相面为平面。由式 (3.1-1v)，这种缓变波导几乎完全没有模式的截止功能，其选模作用主要是依靠各阶模式之间的增益差来实现的。

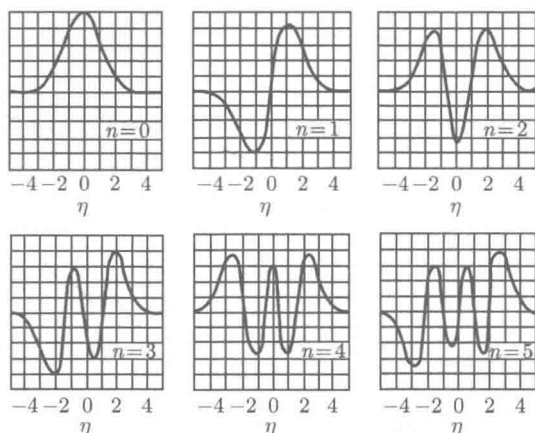


图 3.1-1B(a) n 阶厄米函数 (厄米多项式与高斯函数乘积) 的图形 —— 振幅分布 [2.16]

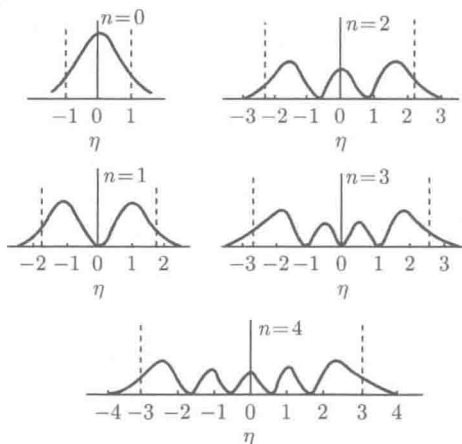


图 3.1-1B(b) n 阶厄米函数幅值平方的图形 —— 近场 (光强) 分布 [2.16]

峰值数 $N_p = n + 1$

3. 模式的谱结构

如果上述波导因具有相距为 L 的两个垂直于腔轴 z 方向的端面而形成谐振光腔, β_z 必须满足式 (2.6-2b,c), 则式 (3.1-1v) 将因腔长必须满足谐振条件: $L = q\lambda_z/2$ (q 是正整数), 而分立化为

$$\beta_z^2 \equiv \left(\frac{2\pi}{\lambda_z}\right)^2 = \left(\frac{q\pi}{L}\right)^2 \rightarrow k_0^2 \bar{n}_0^2 - \left(\frac{2m+1}{x_\varepsilon} + \frac{2n+1}{y_\varepsilon}\right) k_0 \bar{n}_0 - \left(\frac{q\pi}{L}\right)^2 = 0 \quad (3.1-2a)$$

解出

$$k_0 \bar{n}_0 = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{2m+1}{x_\varepsilon} + \frac{2n+1}{y_\varepsilon}\right) + \sqrt{\left(\frac{2m+1}{x_\varepsilon} + \frac{2n+1}{y_\varepsilon}\right)^2 + 4\left(\frac{q\pi}{L}\right)^2} \right\} > 0 \quad (3.1-2b)$$

即

$$\frac{\bar{n}_0}{\lambda_{mnq}} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \left(\frac{2m+1}{x_\varepsilon} + \frac{2n+1}{y_\varepsilon}\right) + \sqrt{\left(\frac{2m+1}{x_\varepsilon} + \frac{2n+1}{y_\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{2q\pi}{L}\right)^2} \right\} \equiv \sqrt{B_{mnq}} \quad (3.1-2c)$$

对于实际波导

$$\frac{2\pi q}{L} = \frac{4\pi}{\lambda_z} \cong \frac{4\pi \bar{n}_0}{\lambda_{z,0}} \approx 50\mu\text{m}^{-1}, \quad q = \frac{2L}{\lambda_z} \cong \frac{2\bar{n}_0 L}{\lambda_{z,0}} \approx \frac{2 \times 3.6 \times 300}{0.9} \approx 2400 \quad (3.1-2d)$$

测得

$$w_{x0} \approx 1\mu\text{m}, \quad w_{y0} \approx 10\mu\text{m} \rightarrow \frac{1}{x_\varepsilon} \ll \frac{1}{w_{x0}} \approx 1\mu\text{m}^{-1}, \quad \frac{1}{y_\varepsilon} \ll \frac{1}{w_{y0}} \approx 0.1\mu\text{m}^{-1} \quad (3.1-2e)$$

在 $m \leq 2$ 和 $n \leq 20$ 的情况下, 总有

$$\left(\frac{2m+1}{x_\varepsilon} + \frac{2n+1}{y_\varepsilon}\right)^2 \ll \left(\frac{2q\pi}{L}\right)^2 \quad (3.1-2f)$$

故式 (3.1-2c) 近似为

$$\frac{\bar{n}_0}{\lambda_{mnq}} \approx \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2m+1}{x_\varepsilon} + \frac{2n+1}{y_\varepsilon} + \frac{2q\pi}{L}\right) \equiv \sqrt{B'_{mnq}} \quad (3.1-2g)$$

在不太宽的波长范围内, 微分式 (3.1-2g), 得

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{\bar{n}_0}{\lambda_{mnq}}\right) &= \left(\frac{\lambda_0 \Delta \bar{n}_0 - \bar{n}_0 \Delta \lambda_0}{\lambda_0^2}\right)_{mnq} \\ &= - \left[\frac{\Delta \lambda_0}{\lambda_0^2} \left(\bar{n}_0 - \lambda_0 \frac{\Delta \bar{n}_0}{\Delta \lambda_0}\right)\right]_{mnq} = - \left[\frac{\Delta \lambda_0}{\lambda_0^2} \bar{n}_e\right]_{mnq} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\Delta m}{x_\varepsilon} + \frac{\Delta n}{y_\varepsilon} + \frac{\pi \Delta q}{L}\right) \end{aligned} \quad (3.1-2h)$$