希望丛书

昝瑞 著

初中 CHUZHONG
代数 DAISHU
总复习指导
ZONGFUXI ZHIDAO

中国工人出版社

初中代数总复习指导

昝瑞 著

中国工人出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中代数总复习指导/昝瑞著. -北京:中国工人出版社,1998
ISBN 7-5008-2074-7

Ⅰ.初… Ⅱ.昝… Ⅲ.代数课-初中-教学参考资料
Ⅳ.G633.623

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 21772 号

出版发行:	中国工人出版社 (北京鼓楼外大街)
印　　刷:	通州区鑫欣印刷厂
经　　销:	新华书店北京发行所
版　　次:	1998 年 9 月第 1 版 1998 年 9 月第 1 次印刷
开　　本:	787×1092 毫米　1/32
字　　数:	319 千字
印　　张:	11.125
印　　数:	1~4000 册
定　　价:	15.50 元

编 者 的 话

《初中代数总复习指导》是根据国家教委颁布的九年制义务教育初中代数教学大纲的要求编写的，是一本可供初中各年级学生和自学青年使用的课外自学读物，也可供初中数学教师在教学中参考.

本书按照教材的知识结构，将初中代数（含统计初步）分为五章，每一章又分为若干个单元进行专题讲解，共23讲. 每一讲的主要内容有“复习要求”、“内容解析”、“例题精选”、“能力训练”四个部分.

“复习要求”是针对每一讲的有关内容，根据九年制义务教育初中代数教学大纲，从升学考试的角度，对学生提出的学习要求.

“内容解析”是每一讲的基础知识部分. 系统介绍本讲所涉及的有关概念、公式、定理、方法等内容. 同时，还针对这些内容中的重点和疑难，作了详细的解释和说明，力求把问题讲清、讲透，引导学生掌握这些知识的内在联系，使学生获得系统、清晰的知识.

“例题精选”是基础知识的升华部分. 例题的选择和解答，不仅立足于基础知识和基本方法的训练，更注意培养学生分析问题和解决问题的能力，突出了解题思路的指导，加强了数学思想的渗透. 同时，在有关例题的后面又增添了“想一想”的内容，旨在培养学生独立思考问题和探索问题的能力.

“能力训练”是对基础知识和基本技能的巩固部分. 能力训练题分为A、B两组，题量较大，在程度上有不同的要求，注重基础知识和基本技能的考查. 同时，每一组习题又具有“题型全面、灵活性强、由浅入深、逐渐拔高”等特点. 因此，教师在使用本书时，必须从学生的实际情况出发，对习题内容可作适当的取舍或补充，以取得

良好的复习效果.

另外，在书后附有一组题量较大、难度较高的综合训练题，目的在于帮助学生在系统复习的基础上，进一步巩固初中代数的重点内容和提高解决综合问题的能力. 同时，将每一讲的能力训练题及综合训练题的参考答案或提示附于书后，以便读者查对.

由于水平有限，仓促成书，书中的疏漏之处在所难免，恳请读者批评指正.

编　者

1998 年 3 月

目　　录

第一章 实 数

本章的主要内容有实数的有关概念、数的开方、实数大小的比较和运算.

随着数学自身的发展和解决实际问题的需要,人们对数的概念的认识在不断地深化.在初中代数中,首先引入负数的概念,从而把数的概念由小学的正数和零扩展到有理数;继而又在数的开方的基础上,引入无理数的概念,使数的范围又从有理数扩展到实数.从知识结构来看,实数这部分知识是初中代数的重要基础,它与代数式(包括整式、分式和根式)构成了初中代数的两块基石.切实掌握这部分知识,不仅能够为今后在实数范围内进一步研究各种数学问题作好准备,而且还能够为解决其他学科的有关问题奠定良好的基础.

本章的复习重点是实数的有关概念、运算性质和运算律,其中,有理数的运算更为重要.

第一讲 实数的有关概念

一、复习要求

1. 理解有理数、无理数、实数等概念;了解实数的分类,会把给出的实数按要求进行分类.

2. 理解数轴、相反数、倒数、绝对值这几个重要概念,能够熟练地求出有关实数的相反数、倒数、绝对值,并进一步加深对字母表示数的意义的理解.

二、内容解析

1. 实数的概念及其分类

(1)有理数:整数和分数统称有理数.

说明:①有理数包括整数和分数,只能说整数是有理数,分数是有理数,但不能说有理数是整数,有理数是分数.②任何有理数都可以表示成$\frac{p}{q}$(p、q 均为互质的整数,且 $q\neq0$)的形式;整数可以看成是分母为1的分数.③任何有理数都可以写成有限小数(整数可以看成是小数部分为零的小数)或无限循环小数;反过来,任何有限小数或无限循环小数都是有理数.④根据整数的奇偶性,可把整数分为奇数和偶数,同时,奇数和偶数又都有正、负之分.奇数一般表示为 $2n+1$ 或 $2n-1$(n 为整数)的形式,偶数一般表示为 $2n$(n 为整数)的形式.

(2)无理数:无限不循环的小数叫做无理数.

说明:①无理数是小数,但只有同时满足无限和不循环两个条件的小数才是无理数,并不是所有的小数都是无理数.②"不尽方根(如$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$等)是无理数",但不能认为无理数就是不尽方根.如圆周率 π 和 0.1010010001…这样具有特定结构的数都是无理数,但都不是不尽方根.③判断一个数是有理数还是无理数,需先化简后判断,不能被其表面现象所迷惑,如$\sqrt{9}$、$(\pi-1)^0$、$(\sqrt{2}-1)^0$ 都是有理数;所以不能认为带根号或带有 π 的数都是无理数.

(3)实数:有理数和无理数统称实数.

(4)实数的分类:

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left.\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}\right\}\text{有限小数或无限循环小数}\\\text{无理数}\left.\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\right\}\text{无限不循环的小数}\end{cases}$$

说明:①实数还可以按正数、零、负数来分类.请读者自己完成.②

由于各类数集的包含关系,所以同一个数可以属于几个不同范畴的数集,如 -2 属于负数集合,也属于负整数集合,也属于整数集合,同时还属于有理数集合.③正整数就是自然数,它是表示物体个数或事物次序的数.在大于 1 的自然数中,只能被 1 和它本身整除的数叫做质数(素数),除了能被 1 和它本身整除外,还能被其他数整除的数叫做合数.1 既不是质数,也不是合数;最小的质数是 2,最小的合数是 4.

2. 有关实数的几个重要概念

(1)数轴:规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴.

说明:①数轴的三要素是原点、正方向和单位长度,在画数轴时三者缺一不可;同时,在画数轴时,原点的位置、单位长度的大小、直线的方向都没有绝对的规定,可以根据实际需要来确定.②实数与数轴上的点是一一对应关系,即任何一个实数都可以用数轴上唯一的一个点来表示;反之,数轴上的每一个点都表示唯一的一个实数.③数轴是一个很重要的数学概念,它是我们以后学习数学的常用工具,如利用数轴可以直观地理解有关实数的其他概念,利用数轴可以判断数的正负、比较数的大小、确定数的绝对值,利用数轴可以表示任何一个实数及数的范围,利用数轴可以确定不等式组的解集,同时在数轴的基础上还可以建立平面直角坐标系,等等.

(2)相反数:只有符号不同的两个数叫做互为相反数.零的相反数是零.一般地说,数 a 的相反数是 $-a$(这里 a 可正、可负,也可以是零).

说明:①"只有符号不同的两个数"是指"符号相反而绝对值相等的两个数".由于零不符合这一点,所以对零的相反数作了特殊的规定.②在数轴上原点两旁,离开原点距离相等的两个点表示的两个数,是互为相反数——相反数的几何意义.③在一个数的前面添上一个负号,得到的数就是这个数的相反数,但带负号的数不一定都是负数,如 $-(-2)$ 是正数,$-a$ 可能是负数,也可能是正数,还可能是零.因此,不能认为一个数的相反数必为负数.④如果 a、b 互为相反数,那么 $a+b=0$;反之,如果 $a+b=0$,那么 a、b 互为相反数.⑤如 a、b 互为相反数,且 a、

b 均不为零,那么$\frac{a}{b}=-1$;反之,如$\frac{a}{b}=-1$,则 a、b 互为相反数.

(3)绝对值:一个正数的绝对值是它本身;一个负数的绝对值是它的相反数;零的绝对值是零,即

$$|a|=\begin{cases}a & (a>0),\\ 0 & (a=0),\\ -a & (a<0).\end{cases} \text{ 或 } |a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0),\\ -a & (a\leqslant 0).\end{cases}$$

说明:①在数轴上表示一个数的点离开原点的距离,就是这个数的绝对值——绝对值的几何意义.②由绝对值的几何意义可知,一个实数 a 的绝对值是正数或零(非负数),即$|a|\geqslant 0$.③一个实数有且只有一个绝对值$|a|$,但绝对值为$|a|$($a\neq 0$)的数有两个,即 a 和 $-a$(它们互为相反数),绝对值为零的数只有一个,即零.④如果两个数相等或互为相反数,那么这两个数的绝对值相等;反之,如果两个数的绝对值相等,那么这两个数相等或互为相反数.⑤在使用绝对值的概念时,一定要注意"零"的作用:绝对值等于它本身的数是正数或零(非负数);绝对值等于它的相反数的数是负数或零(非正数);绝对值最小的实数是零.⑥在进行绝对值的化简时,必须把绝对值符号内的代数式看成一个整体,先判断这个整体的正负性,再根据绝对值的定义化去绝对值符号,如

$$|x-1|=\begin{cases}x-1, & (\text{当 } x\geqslant 1 \text{ 时})\\ 1-x. & (\text{当 } x\leqslant 1 \text{ 时})\end{cases}$$

(4)倒数:1 除以一个不为零的数所得的商,叫做这个数的倒数,即当 $a\neq 0$ 时,a 的倒数是$\frac{1}{a}$.

说明:①由于零不能作除数,所以说"零没有倒数",或者说"零的倒数不存在".②如果 a、b 互为倒数,那么 $ab=1$;反之,如果 $ab=1$,那么 a、b 互为倒数.③如果 a、b 互为负倒数,那么 $ab=-1$;反之,如果 $ab=-1$,那么 a、b 互为负倒数.

三、例题精选

例 1 a 为实数,下列结论是否正确,若不正确,应加什么条件才能成立?

(1) $-a$ 是负数; (2) $2a$ 是偶数;

(3)$|a|$是正数；　　(4)$3a>2a$；

(5)$|a|=a$；　　(6)a^2 是正数；

(7)$(-a)^2=-a^2$；　　(8)$a-|a|$不可能为正数.

解：(1)错误，$a>0$；　　(2)错误，a 为整数；

(3)错误，$a\neq0$；　　(4)错误，$a>0$；

(5)错误，$a\geqslant0$；　　(6)错误，$a\neq0$；

(7)错误，$a=0$；　　(8)正确.

说明：本题主要考查对字母表示数的意义的理解.解答这类题目时，一定要考虑周全，尤其要注意数“零”的作用.对于第(8)小题，应分 $a>0$，$a=0$，$a<0$ 三种情况进行讨论.

例2　在数3.14，$\frac{\pi}{2}$，$\sqrt[3]{8}$，$\sqrt[3]{9}$，$\sqrt{144}$，$\frac{22}{7}$，$\sin60°$，$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^0$，2×10^{-2}，0.1010101…，0.1010010001…中，属于无理数的是______.

解：$\frac{\pi}{2}$，$\sqrt[3]{9}$，$\sin60°$，0.1010010001….

说明：在判断数的类别时，没有化简的要先化简，然后再根据化简结果进行分类.但在填写数的类别时，只能填原形，而不能填化简结果.

例3　(1)______的相反数的倒数与1的和是$\frac{1}{3}$；

(2)若$|a-3|-3+a=0$，则 a 的取值范围是______.

解：(1)$\because$ $\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$；$-\frac{2}{3}$的倒数是$-\frac{3}{2}$；$-\frac{3}{2}$的相反数是$\frac{3}{2}$.　　$\therefore\frac{3}{2}$的相反数的倒数与1的和是$\frac{1}{3}$.

(2)由$|a-3|-3+a=0$，得$|a-3|=-(a-3)$.

由绝对值的意义，得 $a-3\leqslant0$.　　$\therefore a\leqslant3$.

说明：本题主要考查对相反数、倒数、绝对值意义的理解.解答第(1)小题所用的方法是逆推法.

想一想：①解答第(1)小题时，能否采用设未知数的办法，根据相反数和倒数的意义，通过列方程求解？

②解答第(2)小题时，能否根据绝对值的非负性求出 a 的取值范围？

例 4 已知：$|a|=3, |b|=2$，且 $|a-b|=b-a$. 求 $a+b$ 的值.

解：$\because |a|=3, |b|=2$，$\therefore a=3$ 或 -3；$b=2$ 或 -2.

又 $\because |a-b|=b-a$，$\therefore b \geqslant a$.

$\therefore$ 当 $b=2$ 时，$a=-3, a+b=-1$；

当 $b=-2$ 时，$a=-3, a+b=-5$.

说明：本题主要考查绝对值概念的正确应用. 在由 $|a|=3, |b|=2$ 求 a 和 b 时，不能丢解；同时在求 $a+b$ 的值时，要注意由 $|a-b|=b-a$ 得出 $b \geqslant a$ 这一条件的限制，否则将会多解.

想一想：在本题中，如果将 $|a-b|=b-a$ 这一条件去掉，那么 $a+b$ 和 $|a+b|$ 的值分别为多少？

例 5 已知：a、b 互为相反数，m、n 互为倒数，e 是绝对值最小的实数，f 是数轴上与原点的距离为 1 的点表示的数. 求 $f^2+(a+b)f+e-mn+1998$ 的值.

分析：由于 a、b 互为相反数，所以 $a+b=0$；m、n 互为倒数，所以 $mn=1$；e 是绝对值最小的实数，所以 $e=0$；f 是数轴上与原点的距离为 1 的点表示的数，所以 $f=\pm 1$. 把上述分析所得，代入所要求值的代数式，即可求出结果.

解：由已知条件，得

$$a+b=0, mn=1, e=0, f=\pm 1.$$

$\therefore f^2+(a+b)f+e-mn+1998$

$=(\pm 1)^2+0\times(\pm 1)+0-1+1998=1998.$

说明：本题主要考查对相反数、倒数、绝对值、数轴等概念的理解和灵活运用. 对于互为相反数的和为零，互为倒数的积为 1 以及它们的逆命题(都是真命题)，在解决有关问题时，经常要用到，应牢固掌握.

例 6 如图 1-1，实数 a、b、c 在数轴上的对应点分别为 A、B、C. 试化简 $|a+b|-|a-c|+|c-b|-2|b|$.

解：由观察，得

$a<b<0<c$.

$\therefore a+b<0, a-c<0,$

$c-b>0,$

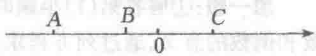

图 1-1

$\therefore |a+b|-|a-c|+|c-b|-2|b|$

$=-(a+b)-[-(a-c)]+(c-b)-2(-b)$

$=-a-b+a-c+c-b+2b=0.$

说明:本题属于典型的数形结合的绝对值的化简问题.解答这类问题时,首先要进行观察,以确定数轴上所给出的点对应的实数的正负性;然后再分别确定每个绝对值符号里的数的正负性;最后再根据绝对值的定义逐一化简.同时,在化简过程中,还要防止有关符号的错误.

四、能力训练(一)

A 组

1. 填空题:

(1) $-\frac{1}{4}$的相反数是______,倒数是______,绝对值是______.

(2)若$|x|=5$,则 $x=$______;$|\pi-3.1416|=$______.

(3) $-(-2)-|-5|=$______;$-|-2|$的倒数是______.

(4)在数 $3.14,\pi,0.\dot{3},\sqrt{2},\sin60^\circ,\frac{1}{7},\sqrt{9}$当中,属于无理数的是______.

(5)已知:$2.468^2=6.091$,那么$24.68^2=$______.

(6)如果 $a+b=0$,那么 b 是a 的______;如果 a、b 互为负倒数,那么$\frac{1}{2}ab=$______.

(7)______与数轴上的点是一一对应关系.

(8)在实数中,最小的正整数是______;最大的负整数是______;绝对值最小的数是______.

(9) $-2\frac{1}{2}$的倒数的相反数是______.

(10) $-\frac{1}{2}$的倒数与 3 的相反数的绝对值的和是______.

(11)一个数是它的倒数的 4 倍,这个数是______.

(12)当 $a\geqslant0$ 时,$|a|=$______;当$|a|=-a$ 时,a ______ 0.

(13)在数轴上离开原点 3 个单位的点表示的数是______.

(14)如果$|x|=|y|$,那么x与y的关系是______.

(15)当$x\leqslant 5$时,化简$|x-5|=$______.

(16)若$|x-1|=1-x$,则x的取值范围是______.

(17)$a-b$的相反数是______;$(-a)^2$的相反数是______.

(18)______的相反数比它本身大,______的相反数比它本身小.

(19)若m、n互为相反数,且均不为零,则$\frac{m}{n}=$______.

(20)$\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$的相反数是______.

2. 选择题:

(1)已知实数:$\frac{1}{2}$,$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^0$,$0$,$\sqrt{5}$,$\frac{\pi}{3}$,$\cos30^\circ$,$0.1010010001\cdots$(每两个1之间依次多1个零),其中无理数的个数有(　　).

(A)2个;　(B)3个;　(C)4个;　(D)5个.

(2)下列说法中,正确的是(　　).

(A)无限小数都是无理数;　(B)带根号的数都是无理数;

(C)无理数都是带根号的数;　(D)无理数都是无限小数.

(3)全体小数的集合是(　　).

(A)分数集合;　(B)有理数集合;

(C)无理数集合;　(D)实数集合.

(4)下列判断正确的是(　　).

(A)一个数的相反数一定是负数;　(B)比正数小的数都是负数;

(C)最大的负数是-1;　(D)非负数中最小的数是零.

(5)绝对值不大于3的整数有(　　).

(A)1个;　(B)3个;　(C)5个;　(D)7个.

(6)下列结论不正确的是(　　).

(A)互为相反数的绝对值相等;

(B)一个数的相反数的相反数是它本身;

(C)负数的绝对值一定是正数;

(D)零的绝对值是最小的实数.

(7)下列说法中,正确的是(　　).

(A)相反数等于本身的数只有零;

(B)倒数等于本身的数只有 1;

(C)绝对值等于本身的数都是正数;

(D)任何数的倒数都等于 1 除以这个数.

3. 解答题:

(1)已知:$|2x-1|=5$. 求 x.

(2)已知:a、b 互为相反数,c、d 互为倒数,m 的绝对值为 1,求下列各式的值.

①$\dfrac{|a+b|}{m}-cd+m^2$;　　②$a+b+m^2-cdm$.

(3)实数 a、b、c 在数轴上的对应点如图 1-2 所示,试化简下列各式:

①$|a-b|+|a+b|$;

②$|a-c|+|a+c|$;

③$|c-b|-|a-c|+|b+c|$.

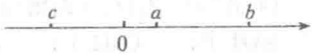

图 1-2

B　组

1. 填空题:

(1)-0.125 的倒数的相反数是______.

(2)$3-2\sqrt{2}$的相反数是______;倒数是______;绝对值是______.

(3)若 a 的倒数的相反数是 $2+\sqrt{3}$,则 $a=$______.

(4)$\sqrt{2}+1$ 的倒数与$\sqrt{2}-\sqrt{3}$的相反数的和为______.

(5)$2-\sqrt{3}$的相反数与它的倒数的差为______.

(6)在数 $\sqrt{2}$, 1.414, 0.10101, π, $\sqrt{16}$, $\sqrt[3]{-8}$, $|-2|$, $\operatorname{ctg}30^\circ$, $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}$, $(\sqrt{3}-2)^0$ 中,属于有理数的有______个.

(7)绝对值不大于 1998 的所有整数的和为______.

(8)若 $|x+1|=1$,则 $x=$______;若 $x<0$,则 $|2x-3|=$______.

(9)若 $x=\left(\dfrac{\cos 60^\circ}{\operatorname{ctg}45^\circ}\right)^{-2}$,则 $|x-3|+|2x-9|+|x-5|=$______.

(10)若 $a<0$,化简 $\left| a-|a| \right|=$______.

2. 选择题:

(1)下列说法中,正确的是(　　).

(A)$|-a|$是正数;　　(B)$|a|$等于 a;

(C)$-|a|$是负数;　　(D)$|-a|$是非负数.

(2)下列说法中,正确的是(　　).

(A)a 的倒数是$\frac{1}{a}$;　　(B)a 是 $-a$ 的绝对值;

(C)$-a$ 是a 的相反数;　　(D)$-a<a$ 一定正确.

(3)若$\left|-\frac{1}{b}\right|=-\frac{1}{b}$,则 b 的取值范围是(　　).

(A)$b>0$;　(B)$b<0$;　(C)$b\geqslant 0$;　(D)$b\leqslant 0$.

(4)若$|a|=2$,$|b|=3$,则$|a+b|$的值有(　　).

(A)1 个;　(B)2 个;　(C)3 个;　(D)4 个.

(5)下列命题中,正确的是(　　).

(A)若 a、b 互为相反数,则$\frac{a}{b}=-1$;

(B)若$\frac{a}{|a|}=-1$,则 $a<0$;

(C)若$|a-b|=b-a$,则 $a<b$;

(D)若$|a+1|=|b+1|$,则 $a=b$.

(6)若$|a+b|=|a|+|b|$,则(　　).

(A)$a>0$,且 $b>0$;　　(B)$a<0$,且 $b<0$;

(C)$ab\geqslant 0$;　　(D)$ab\leqslant 0$.

(7)若 a 为任意实数,则下列各式一定成立的是(　　).

(A)$|a|>a$;　　(B)$a>-|a|$;

(C)$a\geqslant -|a|$;　　(D)$-a\geqslant |a|$.

(8)若 $m<0$,$n<0$,且 $m-n=-6$,则$|m|-|n|$的值为(　　).

(A)6;　(B)-6;　(C)6 或 -6;　(D)以上都不对.

(9)化简$|a-2|-2+a$ 得(　　).

(A)$2a-4$;　　(B)$4-2a$;