当代经济学系列丛书
Contemporary Economics Series
主编 陈昕

国家“十二五”重点图书

经济数学引论

当代经济学
教学参考书系

[美] 迪安·科尔贝
马克斯韦尔·B.斯廷奇库姆 尤拉伊·泽曼 著
童乙伦 译

格致出版
格致出版社
上海三联书店
上海人民出版社

当代经济学系列丛书
Contemporary Economics Series
主编 陈昕

经济数学引论

[美] 迪安·科尔贝
马克斯韦尔·B.斯廷奇库姆　尤拉伊·泽曼 著
童乙伦 译

当代经济学
教学参考书系

格致出版
格致出版社
上海三联书店
上海人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学引论/(美)科尔贝,(美)斯廷奇库姆,(美)泽曼著;童乙伦译.—上海:格致出版社:上海人民出版社,2015

(当代经济学系列丛书/陈昕主编.当代经济学教学参考书系)

ISBN 978-7-5432-2570-1

Ⅰ.①经… Ⅱ.①科… ②斯… ③泽… ④童… Ⅲ.①经济数学-研究 Ⅳ.①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 265409 号

责任编辑 王 萌

装帧设计 敬人设计工作室

吕敬人

经济数学引论

[美]迪安·科尔贝 马克斯韦尔·B.斯廷奇库姆 尤拉伊·泽曼 著

童乙伦 译

出 版 格致出版社·上海三联书店·上海人民出版社 (200001 上海福建中路 193 号 www.ewen.co) 编辑部热线 021-63914988 市场部热线 021-63914081 www.hibooks.cn 发 行 上海世纪出版股份有限公司发行中心	印 刷 浙江临安曙光印务有限公司 开 本 787×1092 1/16 印 张 21.25 插 页 3 字 数 482,000 版 次 2015 年 11 月第 1 版 印 次 2015 年 11 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5432-2570-1/F·884

定价:58.00 元

主编的话

上世纪80年代，为了全面地、系统地反映当代经济学的全貌及其进程，总结与挖掘当代经济学已有的和潜在的成果，展示当代经济学新的发展方向，我们决定出版“当代经济学系列丛书”。

“当代经济学系列丛书”是大型的、高层次的、综合性的经济学术理论丛书。它包括三个子系列：(1)当代经济学文库；(2)当代经济学译库；(3)当代经济学教学参考书系。本丛书在学科领域方面，不仅着眼于各传统经济学科的新成果，更注重经济学前沿学科、边缘学科和综合学科的新成就；在选题的采择上，广泛联系海内外学者，努力开掘学术功力深厚、思想新颖独到、作品水平拔尖的著作。“文库”力求达到中国经济学界当前的最高水平；“译库”翻译当代经济学的名人名著；“教学参考书系”主要出版国内外著名高等院校最新的经济学通用教材。

20多年过去了，本丛书先后出版了200多种著作，在很大程度上推动了中国经济学的现代化和国际标准化。这主要体现在两个方面：一是从研究范围、研究内容、研究方法、分析技术等方面完成了中国经济学从传统向现代的转轨；二是培养了整整一代青年经济学人，如今他们大都成长为中国第一线的经济学家，活跃在国内外的学术舞台上。

为了进一步推动中国经济学的发展，我们将继续引进翻译出版国际上经济学的最新研究成果，加强中国经济学家与世界各国经济学家之间的交流；同时，我们更鼓励中国经济学家创建自己的理论体系，在自主的理论框架内消化和吸收世界上最优秀的理论成果，并把它放到中国经济改革发展的实践中进行筛选和检验，进而寻找属于中国的又面向未来世界的经济制度和经济理论，使中国经济学真正立足于世界经济学之林。

我们渴望经济学家支持我们的追求；我们和经济学家一起瞻望中国经济学的未来。

陈昕

2014年1月1日

译者序

本书为美国几大知名高校的经济类数学教材，英文原书名为"*An Introduction to Mathematical Analysis for Economic Theory and Econometrics*"，若要直译，应为《经济学与计量经济学数学分析引论》，之所以翻成《经济数学引论》，是考虑到原书编写的三个显著特点：

第一，逻辑严谨、体系完整，且自成一体。这当然是迪安·科尔贝、马克斯韦尔·B.斯廷奇库姆和尤拉伊·泽曼三位作者进行边际意义的创新所得，也是他们吸收杜冈迪(J.Dugundji)、托普基斯(D.M.Topkis)、宾莫尔(K.Binmore)、内伯(G.Naber)及博德(K.C.Border)等前人优秀工作的成果。的确，作为一门古老学科，任意数学理论都有几百年历史，创新不易；但不同老师的授课、不同教材的编著，一定存在着明显的教学效果差异。本书没有按照传统数学专业进行如数学分析、线性代数、概率统计、数学规划、拓扑分析等分类布局。反之，是以经济分析所需要的数学逻辑为主轴，将各专科数学知识互融互通、贯穿一体。一方面，传统教材常见的工程、物理学等无关实例便被省略；另一方面，所有例题与练习也具备了恰当的经济逻辑与理论背景，成为一本独具经济学风格的数学教科书。

第二，内容涵盖全面，具有理论性工具书的特点。通常的数学工具书有两种编写方式：一是以计算逻辑和公式为中心展开；二是以基本概念为重点铺陈。本书将与经济分析相关的分析数学理论数囊括，使得读者能够依据一本书来理解、查实相关数学理论的逻辑和重点，是一本属于第二种类型的工具书籍。

第三，理论语境起点高。本书以集合论、空间及其度量等现代分析数学的语境为基础，实现了与经济学逻辑的高度契合。比如，第 4 章基于度量空间的连续性、收敛等概念展开解的最优分析；第 5 章基于泛函的可分离凸分析，将三大不动点定理融贯一体，使得经济学的一般均衡、纳什均衡、完美均衡等基本概念得以统一的理解；第 6 章基于勒贝格测度及其概率空间的完备性，给出了行为及博弈的全景描述，等等。如此，居高而下、提纲

契领。就译者从事数理经济学教学的实践来看，这种以经济学逻辑为主的深层次刻画，不仅省略了不相关知识的赘述，对于学习对应的数学知识大有裨益，同时，对于学生理解为什么要用数学方法阐释经济现象及其逻辑也不无帮助，这是一般工科类数学教材不具备的。

上述三个特点决定了本书适合于作为经济类专业的硕士、博士生的基本教材，也可以为高年级本科生强化训练提供帮助。当然，对于有志于经济学研究，或者有兴趣于经济数学的学生，本书也不失为一本良好的自学参考书。这也是该书深得美国高校学生喜爱的原因。

这里还需要说明，本书英文原书共有11章。我们根据国内教学的实际情况，选译了其中的前6章，整体布局与顺序安排不变。如果本书市场反响良好，我们将继续翻译余下的后5章，作为本书的下卷出版。原书后5章以测度空间的完备性扩张为基础，进行了有限和无限维空间的凸分析和动态规划分析，是基于前6章基础数学的逻辑展开。

译者在试用本书教学的过程中，得到了东北财经大学跨学科中心和湖南科技大学商学院众多学生的帮助。他们根据自己学习过程中的困难，积极提问、参与讨论，提供翻译的意见，对于本书成稿做出贡献。特此致谢。

最后，特别感谢王萌编辑和谷雨编辑，他们的辛勤工作提高了本书整体质量。当然，因译者水平所限，翻译不当及错误之处在所难免，责任当属本人。这里，敬请读者们批评指正，并及时返回信息，以便纠正。

童乙伦乙未夏于莲城

2015年11月

前言

本书目的是要提供一个关于数学分析在经济学理论与经济学家研究应用中全面的基础性介绍。函数分析与实分析在经济学中的应用已经越来越普遍,但介绍这些内容的入门水平的书并不多。我们编入本书的基本原理,将试图填补在基本数理经济学(大都包含微积分、线性代数与约束的最优化理论)与高级数理经济学之间的空缺,后者如斯托基(Stokey)与卢卡斯(Lucas)的《经济动态的递归方法》(*Recursive Methods in Economic Dynamics*),其关联知识的难度之大,使得这些教材本身就可以作为关于函数分析与测度论研究的基础性著作。

我们采用一种统一的方法,试图运用度量的完全化定理,来理解基本或者高级的空间概念。关于这种概念的运用,比如通过实数来完全化有理数集合、通过测度空间完全化可测集的域等方法,是十分重要的。就本书与一般数学教材的关系而言,我们有三个主要的创新尝试:(1)我们选取的材料来源于完全不同的数学领域,只要它们对于经济学家进行回归分析,展开静态或者动态选择行为分析,乃至策略与竞争的均衡分析,彼此逻辑关系密切、理论意义重大,我们都会引入,比如从格、凸分析及测度论直到函数分析等等;(2)我们试图用经济学家都熟悉的定义——比如近似逼近与解的存在性概念——去理解分析数学与测度理论;(3)从教学上讲,我们从经济学理论与实际研究中选取了大量而简单的例题,以有利于读者抓住一些最困难的思想。最重要的是,我们一直都坚持这样的目标,即使为了本书内容能够尽可能地被人们接受,我们也没有排除经济学家运用中所必要的数学概念,除了一些例题得假设读者具有经济学本科生水平的背景知识。严格地讲,本书是自成体系的(几乎所有用来证明给定结论的定理,都可以在本书找到它自身的证明)。

我们在匹兹堡大学和得克萨斯大学的第一学期博士生的核心课程中,讲授过本书的前半部分,我们是从为期一个月的紧张、突击性夏季数学课程开始的,这个教学项目主要集中在微积分与线性代数的内容。本书的大部分内容是在基础班讲授,但

我们相信这些章节的内容也适合本科生高年级经济学学生。我们曾经在一个研讨班上使用过本书的初稿，我们希望本书会有助于研究者的工作，比如，任何读过斯托基与卢卡斯《递归方法》的读者一定会理解本教材中的基础性概念。实际上，正是由于本书的一位作者在高级宏观经济学课程中发现，普通的学生在理解斯托基与卢卡斯的教材时还存在困难，才有了撰写这本书的想法。

总体上讲，我们致力于将与经济学直接相关的数学内容发展成一个体系。这意味着在有些情形下，还有更直接的方法来达到同样的数学结论。我们希望本书为经济学研究者所做的这些考虑，是值得读者花费成本学习的。

阅读指南

我们力图确保本书能够覆盖大学高年级、研究生初级的相关数学课程，同时，也包含了大多数经济学博士生应该掌握的基本内容；我们潜在的读者是经济学家，由此，我们也试图确保所应用的经济学例题尽可能地具有前沿性，并强调其尽可能的类比性。

在这种思路下，对于如何实现本书这种整体性构建，我们设想应该这样达成。首先，我们给出各个章节内容的总体概述与主要理论点。我们相信，本书第 1 章至第 5 章的内容，能够构成一个经济数学高年级课程的基础。相关的教学经验表明，如果再加上 6.1 节和 6.5 节的内容，将能够为研究生的培养提供一个非常丰富、更加完善的数学基础。本书余下的部分，对于数理经济学的高级课程教学，特别是那些有志于成为计量经济学家或相关经济学领域理论家的学生，应该是一个不错的设计。

各章概要

第 1 章：逻辑

本章主要讨论如何将一般的逻辑陈述归纳为一种关于集合关系的命题系统，比如，我们要说明为什么“如果有 A，则 B”的命题就等价于“A 是 B 的一个子集”，或者“存在一个 A 中的 x 使得 B 关于它的命题为真”的陈述等价于“A 与 B 具有非零的交集”。如果本书像我们所希望的，达到了编写立意的目标，学生就能够对于经济学文献中的结论得出一种清晰的解析，以至于洞识潜藏在这些逻辑背后的子集合之间的关系。

第 2 章：集合论

本章将解释如何对于集合进行运算和比较。具体地，我们将从关系的概念先开始讨论，关系就是一个集合的子集；函数、对应与等价关系只是特殊关系的简单案例。我们还要证明理性选择理论如何被形式化为偏好关系上的诸种条件（如完备性、传递性等）。关系，可以用不同的方式对集合进行排序，比如，格就

是如此。运用格的概念，我们引入了单调比较静态分析，还有归功于塔尔斯基(Tarski)的“单调”不动点定理。随后，我们将转向集合的大小，以及区分无限可数与不可数集合的研究。基于无限、极限的相关概念，我们要试图去掌握相关的应用，而这里的关键性假设便是著名的选择性公理。这实质上等价于某一类最大(最小)元素的存在性问题，一个著名的结论则是佐恩引理。

第3章：实数空间

一维的实数线(记为$\mathbb{R}$)是数学中(即使低年级的数学专业学生也要理解的)最基本的空间，它是我们用来测度数量的工具。与沿袭经典的公理化构建实数的方法不同，我们强调由于有理数具备了所谓的“稠密性”，即使有理数空间之中就存在着许多“洞”，它也为测度数量提供了一个绝对优良的体系。在有理数空间中，我们采用通常的方法来测度距离，即欧几里得定义的，通过差$|q-q'|$的绝对值来度量距离。然后，我们将证明：如何通过给有理数空间增加新的点，来表达一个绝对完美的近似的结论，即一个被称为“完备性”的性质。要表达一个问题的解概念，完备性是一个绝对关键的性质。特别是，我们可以构建一个近似解的序列，如果空间是完备的，由于序列变得越来越紧密(比如一个柯西列)，该序列的极限是存在的，以至于这个近似序列的极限就是原问题的一个解。对于经济学而言，实数完备性的另一个重要的性质，便是最大化元素的存在性。

第4章：实向量的有限维度量空间

对于年轻的经济学人来说，本书有两章任务较重，这就是其中的第一章。这里隐含的集合便是在第3章构建的维度为ℓ的实数向量的集合(记为$\mathbb{R}^{\ell}$)。这里，有许多“常用的方法”测度两点之间的距离，但其内涵的共同特性，即某种“度量”或者说一个距离函数的概念，将我们带入了一个新的领域。后者，则是我们在本书其余部分要贯穿研究的主题——如何度量距离。除了类比于ℓ维欧几里得距离的概念，基于对应元素的差的平方和的平方根，我们给出了距离函数，或者说度量的另一种关于距离的对应定义：“对应元素差的绝对值之和”，这也被称为L^1度量；并且，“对应元素差的绝对值的最大值”被称为上确界范数度量。除了第3章一直强调的完备性，这一章还要聚焦于紧致性与连续性。对于经济学家们常常考虑的最优规划问题，无论是静态还是动态的数学模型，这些性质都能够确保解的存在性。实际上，许多关于解的存在性结论，都可以在一种涉及中值定理的简洁应用中得以更简单的理解。

第5章：有限维凸分析

这是对于年轻的经济学人来说较难掌握的两章学习内容中的第二章。许多经济学问题都被归纳为，求解某个被一系列等式给予很好定义的经济最优化问题的解。最优化问题也由此往往被写成如何在一个紧凸集上(比如预算约束)最大化一个连续函数(比如效用函数)的数值问题。我们的讨论将从最基本的可分离性定理(其对于证明第二福利经济学定理是充分的)开始，它给出了一种恰当的方法，如何用一个处于“对偶空间”(或者共轭空间)的线性函数来将不相交的凸集彼此分离。我们还要运用分离定理的结论，去证明最优规划的库恩—塔克定理，并讨论角谷不动点定理。当然，这些都是研究经济行为中均衡存在性的主要数学工具。

第 6 章:度量空间

第 6 章构成了经济学专业博士研究生课程的核心内容。第 6 章将介绍一个度量空间一般概念——简单地讲,即一个隐性的集合 M 与一种距离的概念,这常常被称为一个度量。在这一章中,我们要研究集合之间的距离,这是一个在比较静态最优规划的最优值研究中的关键性要素;我们接着研究累积分布函数之间的距离,它构成了计量经济学的渐进分析以及不确定性行为选择理论的基础;还有连续函数之间的距离,运用这种距离的概念,我们才能进行动态最优规划问题的值函数分析。基于函数空间分析的一些基础性近似结论(即斯通—威尔斯特拉斯定理的代数或者格的理论表述),我们会给出一个将回归分析作为近似理论的扩展性的表述;还有回归分析本身、无限序列之间的距离,这些是经济学家模拟重复博弈的博弈序列与策略集合的重要工具;我们还要给出随机过程与其他动态系统的收益序列,以及动态规划问题的回报等表达。紧接着,我们转向两类连续函数的扩展定理,这些结论给出了在什么条件下连续函数的一些有价值的性质将是成立的,由此,也就逻辑地告诉我们连续函数具有十分强大的近似分析的功能。最后,考虑到完备性对于解的存在性的重要意义,我们给出了有理数完备化、度量完全化定理的一般性描述,这将有助于读者理解如何对于任意给定的度量空间增加一个最小元素的集合,以使其变成完备的空间。

符号标记系统

我们假设读者或者学生已经专修了以微积分为基础的微观经济学课程以及线性代数课程。在第 4 章以前，我们不会使用线性代数，从第 4 章开始，才会涉及矩阵的乘法和维度等概念的运用。第 5 章，在微分性质的研究中，我们将运用这些概念进行一种更严谨的凹与凸性质的分析。然而，在能够正式地介绍它们之前，我们将十分谨慎，而不会在相关具体知识还没有正式地形成之前，就给出重要的结论。但谨慎也不能确保万事大吉。既为了便于参考，也为了避免我们在正式定义之前错误地使用某个标记符号，这里我们将本书使用的主要标记符号及其含义集中地陈述如下。

空间、集合与集合的类

$\mathbb{N}=\{1, 2, 3, \cdots\}$ 表示自然数或者用于“计数”的数。

$\mathbb{Z}=\{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ 表示整数；$\mathbb{Z}_+=\{0, 1, 2, \cdots\}$ 表示非负整数。

$\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}: m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$ 表示分数或者有理数。

$\mathfrak{C}(\mathbb{Q})$表示有理数柯西列的集合。

$\mathbb{R}$ 表示“实数”的集合，即本书第 3 章通过增加无理数，并作为有理数柯西列的等价类而构建的一个集合。

$\mathbb{R}^\ell$ 表示实数的 ℓ 维向量的集合。

(M, d)表示一个度量空间，M 是一个非空集合，d 是一个 M 上的距离函数。

$C(M)$与 $C_b(M)$表示在一个度量空间(M, d)上，连续函数的集合与连续有界 $\mathbb{R}$ 值函数的集合。

$\mathcal{P}(A)$表示 A 的幂集，也即，所有 A 的子集的集合。

$\mathcal{D}(\mathbb{R})$表示 $\mathbb{R}$ 上累积分布函数的集合。

$\mathfrak{X}$表示一个 $\mathbb{R}$ 上的向量空间。

$\mathbb{H}$ 表示一个希尔伯特空间。

$\mathcal{F}^\circ \subset \mathcal{P}(\Omega)$ 表示一个子集的域。

$\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ 表示一个子集的 σ 域。

$(\Omega, \mathcal{F})$表示一个测度空间。

$(\Omega\ \mathcal{F}, P)$表示一个概率空间。

$L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$与 ℓ^p, $p \in [1, \infty]$ 表示 p 阶矩的随机变量空间与绝对可加性 p 次幂的序列空间。

$\Delta(S)$表示一个有限集 S 上的概率空间。

ΔM 表示一个度量空间(M, d)上可数加性的波勒尔概率的集合。

$(\varphi, (M', d'))$表示一个度量空间的紧致化。

$(f, (X', d'))$表示一个度量空间的紧嵌入。

$(f, (M', d'))$或$(\hat{M}, \hat{d})$表示一个度量空间的完全化。

函数与关系

$1_A(x)$表示一个集合 A 的指示函数。

$\{x \in X : \mathbb{A}(x)\}$表示所有 X 中的 x 的集合，使得$\mathbb{A}(x)$为真。

$A \times B$ 表示集合 A 与 B 的笛卡尔积。

$\mathbf{x} \leqslant \mathbf{y}$ 表示“小于或等于”，对于向量 $x_i \leqslant y_i$，其中 $i=1, 2, \cdots, \ell$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^\ell$。

$\mathbf{x} \ll \mathbf{y}$ 表示“严格小于”，对于向量 $x_i < y_i$，其中 $i=1, 2, \cdots, \ell$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^\ell$。

$\succsim$表示一个二元关系，二元关系的一般性质由表 2.7 给出。

$f: A \to B$ 或者 $a \mapsto f(a)$表示一个从集合 A 到集合 B 的函数。

$\Gamma: A \twoheadrightarrow B$ 表示一个从集合 A 到集合 B 的对应。

$f^{-1}: B \twoheadrightarrow A$ 表示一个函数 $f: A \to B$ 的逆。

$\Gamma^+: B \twoheadrightarrow A$ 与 $\Gamma^-: B \twoheadrightarrow A$ 表示对应 $\Gamma: A \twoheadrightarrow B$ 的上逆与下逆。

$g \circ f$ 表示一个函数 $f: A \to B$ 与函数 $g: B \to C$ 的复合。

$n \mapsto x_n$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 或(x_n)表示一个序列。

$k \mapsto x_{nk}$ 表示一个序列 $n \mapsto x_n$ 的子列。

$x_n \to x$ 表示一个序列 x_n 收敛于$\mathbb{R}$或(M, d)中的一点 x。

$X_n \to_w X$ 表示 L^p 上一个序列的弱收敛。

$\lim_n x_n$ 表示一个$\mathbb{R}$或(M, d)中的序列 x_n 的极限。

$\sum_{n=0}^{N} r_n$ 表示数或者向量 $r_1, r_2, \cdots, r_N$ 的和。

$\pm\infty$表示无限。

$\sum_{n=0}^{\infty} r_n$ 表示序列 $s_N = \sum_{n=0}^{N} r_n$ 的极限（如果该极限存在的话）。

$\mathbb{A}_n$i.o.与$\mathbb{A}_n$a.a.表示“总是无限成立”与“几乎处处成立”。

$\arg\max_{x \in X} f(x)$ 表示对于最优规划问题“当 x 为 X 的元素时，$\max f(x)$”的解的集合。

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{\ell} x_i y_i$ 表示$\mathbb{R}^\ell$上向量 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 的内积。

$\mathrm{cl}(E)$与$\partial(E)$表示一个度量空间上一个子集 E 的闭包与边界。

$\mathrm{co}(E)$与$\overline{\mathrm{co}}(E)$表示一个集合 E 的凸包与闭凸包。

$\mathcal{A}(S)$表示由函数 S 的一个集合生成的代数。

$x \vee y$ 与 $x \wedge y$ 表示一个格上点 x，y 的最小上确界与最大下确界，也可以记为 $\sup(\{x, y\})$与 $\inf(\{x, y\})$。

$\sup(E)$与 $\inf(E)$表示一个实数集合 E 的上确界与下确界。

$\limsup_n x_n$ 与 $\liminf_n x_n$ 表示序列上下确界的极限。

$\|\mathbf{x}\|$表示在$\mathbb{R}^\ell$或更一般向量空间上一个向量的范数。

$X = Y$ a.e. 表示随机变量 X 和 Y“几乎处处”相等。

$\alpha(X, Y)$表示随机变量的樊畿伪度量。

$L^0 = L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$表示$\mathbb{R}$值随机变量的向量空间。

$M_s = M_s(\Omega, \mathcal{F}, P) \subset L^0$ 表示简单$\mathbb{R}$值随机变量的向量空间。

目　录