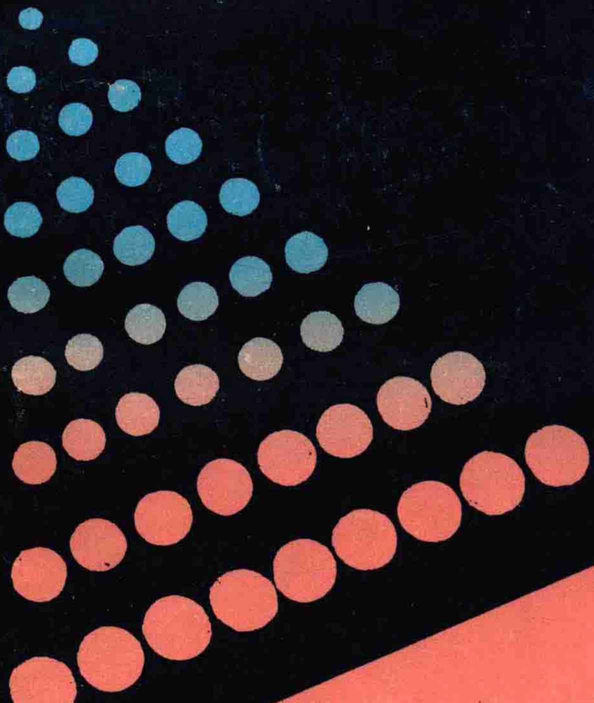
数列通项的发现

SHULIETONGXIANGDEFAXIAN



浙江教育出版社

数列通项的发现

罗庭金　杨德平

浙江教育出版社

数列通项的发现
罗廷金　杨德平
*
浙江教育出版社出版
（杭州武林路125号）
浙江省新华书店发行
上虞汤浦印刷厂排版
湖南常德市振兴科技印刷厂印刷
*
开本787×1029　1/32　印张6.25　字数144000
1989年12月第　1　版
1989年12月第1次印刷
印数：00001－3250
*
ISBN 7-5338-0321-3/G·322
定　价：2.00元

出版说明

为了使中学数学教育适应"面向现代化、面向世界、面向未来"的需要，为了开发学生的智力、培养能力，以达到早出人才、快出人才的目的，我们请熟悉中学数学教学的罗庭金、杨德平俩同志编写了这本小册子，将它奉献给广大中学生。

数列及数列的通项公式是中学数学教学中的重点和难点之一，中学生往往对求解各类复杂数列的通项公式感到束手无策。本书则根据中学生知识结构的特点，主要介绍了高阶等差数列、高阶差等比数列、递归数列、周期数列、分群数列、循环数数列、素数数列通项公式的有关理论、应用及求解方法，提出了有关数列研讨的新课题。本书起点较低，但知识梯度较大，覆盖面较宽，使读者既易于入门，又得以窥其全貌。

本书文字流畅，写得深入浅出，注意了数学内容的系统性和科学性，一些定义、定理的引出十分自然，比较引人入胜，它对开拓中学生的知识面，发展思维能力有较大的帮助。

此书既可以作为中学生第二课堂的辅助读物，又可作为数学教师的教学参考资料，还可作为数学爱好者的自学材料。

本书由王祖樾副教授审稿，在此谨表示感谢。

1987年10月

目　录

第一章　引　言

发现不限于那种寻求人类尚未知晓之事物的行为，正确地说，发现包括着用自己头脑亲自获得知识的一切形式。

——布鲁纳

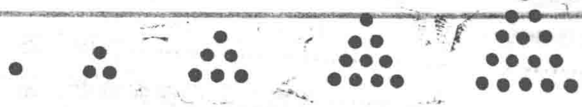
我们伟大的祖国是世界四大文明古国之一，有着悠久的历史和光辉灿烂的文化。其中数学是中国文化的一个重要组成部分，它在中国和世界文化历史的宝库中闪耀着人类智慧的光芒。我国古代有不少数学家勇于发现，敢于创造，积累了极其丰富的知识，作出了许多杰出的贡献。

关于数列问题的研究，我国早在公元前一百多年的《周髀算经》和《九章算术》就开始涉及和探讨。此后，历代学者所著的数学书中都有对数列问题的研究。如《孙子算经》；宋朝沈括的《梦溪笔谈》；元朝数学家朱世杰的《算学启蒙》(1299)，《四元玉鉴》(1303)；数学家丁巨的《丁巨算法》(1355)和贾亨的《算法全能集》等，都对数列问题进行了讨论。

数学家梅文鼎(1633～1721)的《授时平立定三差详说》，独具一格地发现了利用图形说明招差术原理的方法，同时，还对平方数和立方数作了很直观的解释。

又如在《数理精蕴》(1723)中，首先阐述了数列的计算方法，即将原图形扩补成虚形，以便于计算，如

三角尖锥　$1+3+6+\cdots\cdots+\dfrac{n(n+1)}{2}$ 的原形为



虚形为

由此可见，虚形为原形的三倍，该书解释说：两个三角面相合，比原位数多一行；令两个三角体相合，故必比原位数多二面。

设三角尖锥的面积为 S，则

$$\frac{n(n+1)}{2}\cdot(n+2)=3S$$

即
$$S=\frac{n(n+1)(n+2)}{2\cdot 3}.$$

我国数学家在那样的时代里就发现了数列求和的一些方法，并且具有这样高度的空间想象能力，实在是难能可贵。

清朝数学家陈世仁(1676～1722)著有《少广补遗》一卷，对数列问题的讨论共分七节，研究了46个数列问题。

在这个时期，还有数学家罗士琳(1774～1853)，他在1837年完成了对《四元玉鉴》的修复工作，并对《四元玉鉴》中的数列问题作了解说。

我国近代数学家李善兰(1811～1882)在这方面也作出了杰出贡献，他发明了"尖锥术求积"，并在1845年发表的《方圆阐幽》、《弧矢启秘》、《对数探源》等著作中对此都作了阐述。

李善兰的"尖锥术"继承了我国古代数学善于用代数方法处理几何问题的传统，提出了近似解析几何的思想方法，并且用极限的原理，得到了相当于定积分

$$\int_0^x ax^n dx = \frac{1}{n+1} ax^{n+1}$$

的"尖锥求积术"的公式。而后，又由面积相加原理，得到了相当于逐项积分公式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^x a_n x^n dx\right) = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right) dx$$

的结果。进而，他应用"尖锥术"得到了二项平方根展开式

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4!!} x^4 - \frac{3!!}{6!!} x^6 - \frac{5!!}{8!!} x^8 - \cdots$$

以及各种三角函数、反三角函数的幂级数展开式。其中正切、正割、反正切、反正割的解析式在我国也是他最早发现的。"尖锥术"应用中最有创造性的结果是得出了对数的幂级数展开式

$$\ln N = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{N-1}{N}\right)^n.$$

除了"尖锥术"外，李善兰还提出了"垛积术"与"素数论"。

"垛积术"属于高阶等差数列的求和问题，它是我国古代数学的传统问题之一，李善兰在这方面取得了更进一步的成就。例如，他在《垛积比类》中，提出了著名的"李善兰恒等式"，

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}^2\binom{n+2k-i}{2k} = \binom{n+k}{k}^2.$$

目前，国内外数学家又从组合数学的角度对它重新评价。

当前人类已进入"知识爆炸"时代，这就要求人们在接受旧

的文化遗产的同时，在新的知识领域里不断有所发现和创新。因此，我们在传授知识的同时必须突出发展学生的智力，培养其能力，不仅要培养学生的逻辑思维和抽象思维能力，而且还要培养学生创造性思维的能力。

本书就是本着以上目的，为读者创造了一个有利于进行发现学习的环境，在数列通项的问题上进行探索和创造，使读者开阔眼界、掌握知识，达到培养能力、促进身心发展之目的。这本小册子通俗易懂，它既可以作为中学生的课外读物，也可以作为中学数学教师的参考资料。

第二章 数列通项公式的意义

概念这种东西已经不是事物的现象，不是事物的各个片面，不是它们的外部联系，而是抓着了事物的本质，事物的全体，事物的内部联系了。

——毛泽东

我们首先要给读者讲一个有趣的故事。在数学的发展进程中，一些有价值的数学发现有时竟是出自于对图形、表格的漫不经心的填写。据说数学家乌勒姆在参加一次会议时，毫无目的地在一张方格纸上按照螺线的图形填上自然数 1,2,3…，他偶然发现大多数质数都在几条斜线上，这个现象引起了他的注意，经过多次的研究后，他发现不论起始基数为何值，其后的质数总是呈某一规律出现(读者不妨试一试)。例如，我们从41开始填起。如图 1 所示，从左下角到右上角的斜线上，有连续40个数都是质数。

后来，瑞士数学家里昂纳德·欧拉(1707～1783)研究了乌勒姆图形，发现这条斜线上的数可用式子

$$f(n)=n^2+n+41$$

来表示，其中，当 $n=0$，1，2，3，…，39 时，$f(n)$都是质数。从而找到了一个连续给出的 40 个质数的函数表达式。

122	121	120	119	118	117	116	115	114	113
123	90	89	88	87	86	85	84	83	112
124	91	66	65	64	63	62	61	82	111
125	92	67	50	49	48	47	60	81	110
126	93	68	51	42	41	46	59	80	109
127	94	69	52	43	44	45	58	79	108
128	95	70	53	54	55	56	57	78	107
129	96	71	72	73	74	75	76	77	106
130	97	98	99	100	101	102	103	104	105
131									

那么，这个函数式是怎么找到的呢？这首先要从数列的通项公式谈起。

我们知道，数列的一般形式可以写成：

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

其中 n 为自然数，a_n 是数列的第 n 项，有时我们把上面的数列简记作 $\{a_n\}$。例如，把数列

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$$

简记作 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$。

如果一个数列的第 n 项 a_n 与 n 之间的函数关系可以用一个公式来表示，就把这个公式叫做这个数列的通项公式。

怎样理解数列的通项公式呢？为此，让我们先来看下面的一个简单例子：

若数列 $\{a_n\}$ 是 1，3，5，7，9，11，…，试求它的第 n 项。

这个数列是把奇数从 1 开始排列起来的，所以当由某一个奇数求下一个奇数时，只要在此奇数上加 2 就行了。[illegible]

列的第 n 项是在 1 的基础上加 $(n-1)$ 个 2 所得到的数。也就是 $1+2(n-1)=2n-1$。

反之，在以自然数为定义域的函数 $f(n)=2n-1$ 中，取 $n=1, 2, 3 \cdots$，就得到 1，3，5，7，9，…一组数列。

由此可见，数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n，是项数 n 的函数。因此对于任何一个函数，如果它的自变量可以依次取 1，2，3，…，则对应的函数值就构成一个数列；反之，如果我们给出一个数列开始的 k 项，假若我们能够把它的第 n 项 $(n\geqslant k)a_n$ 与项数 n 之间的函数关系用公式表示出来，这个公式就叫做数列的通项公式。

对于理解数列的通项公式，还应注意如下几点：

1．数列的通项公式是一个函数解析式，该函数的定义域是自然数集 N，将它的值域"序化"，即按自变量依次取 1，2，…，所得函数值依次排列起来，就构成数列。

2．对于任一实数的集合，其函数关系并非都能用解析式来表达。例如，求 $\sqrt{2}$ 的不足近似值和过剩近似值，分别可得以下两个数列：

$$1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ \cdots,$$
$$1.5,\ 1.42,\ 1.415,\ 1.4143,\ \cdots.$$

对于这两个数列，我们至今还不能给出它们各自的通项公式。但对它们的每一项，我们都可以借助于开平方的法则而得到。

因此，某数列的通项公式不论是否可以求得，只要我们能够把这个数列的任意一项写出来，那么这个数列就是已知的或已给的。

3．数列和函数一样，它的通项公式有时不是单一的式子。例如：

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & (n\text{为奇数}),\\ 1+\dfrac{1}{3^n} & (n\text{为偶数}).\end{cases}$$

这个通项公式给出的数列，就是

$$1,\ 1\frac{1}{9},\ \frac{1}{3},\ 1\frac{1}{81},\ \frac{1}{5},\ 1\frac{1}{729},\ \cdots.$$

4. 已知数列的通项公式，必定可以写出这个数列的任意一项来；但有了数列的前 n 项，却未必能唯一地确定这个数列的通项。即已知数列的前 n 项，我们有时无法求得它的通项公式，而有时求得的通项公式又不止一个。例如，已知数列的前四项为1，3，5，7，…。则下面的几个式子都有可能作为它的通项公式(当然，也都可以不是它的通项公式)：

$a_n=2n-1$；

$a_n=n^4-10n^3+35n^2-48n+23$；

$a_n=2n^4-20n^3+70n^2-98n+47$；

…… ……

由这些公式，分别得到相应的数列：

1，3，5，7，9，11，…；

1，3，5，7，33，131，…；

1，3，5，7，57，251，…；

…… ……

因此，通常我们说"已知一数列的前 n 项，求其通项公式"，指的是求适合这 n 项的很自然的或很简单的通项公式。这里的"很自然的"和"很简单的"概念是比较模糊的，但通过一些实例的考察，我们还是可以体会到它的实际意义的。如数列$\{a_n\}$：1，-1，1，-1，1，-1，…的通项公式，通常认为是：

$$a_n=(-1)^{n+1}\ \text{或}\ a_n=\cos(n+1)\pi.$$

数列$\{b_n\}$：1，1，1，1，1，…的通项公式通常认为是

$$b_n=1 \text{ 或 } b_n=(-1)^{2n} \text{ 或 } b_n=\cos 2n\pi。$$

数列的通项公式是研究数列的重要问题之一。有的数列是用通项公式给出的，有的数列则是用其他方法给出的.对于用其他方法给出的数列，我们总是希望找出它的通项公式，以便研究数列的性质与求它的和。为此，下面我们就专门来研究数列通项公式的发现与探求。

练　习　一

1．已知数列$\{a_n\}$的通项a_n，试写出数列$\{a_n\}$的前五项：

(1) $a_n=3n+1$；　　(2) $a_n=\sin\dfrac{n}{2}\pi$。

2．已知数列$\{a_n\}$的通项a_n，试写出数列$\{a_n\}$：

(1) $a_n=\left[\dfrac{n}{3}\right]$；　　(2) $a_n=[\sqrt{n}]$。

其中$[x]$表示不超过x的最大整数。

3．已知数列$\{a_n\}$的通项a_n，试写出数列$\{a_n\}$：

(1) $$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n+1} & (n\text{ 为奇数}),\\ 1+\dfrac{1}{2^n} & (n\text{ 为偶数});\end{cases}$$

(2) $$a_n=\begin{cases}n & (n=3m+1),\\ n+2 & (n=3m+2),\\ n+4 & (n=3m+3)。\end{cases}$$

4．下列各式，它们的前面多少项是彼此相同的？

数列$\{b_n\}$：1，1，1，1，1，…的通项公式
$b_n = 1$ 或 $b_n = (-1)^{2n}$
数列的通项公式是研究数列的重要问题之一。有的数列是用通项公式给出的，有的数列则是用其他方法给出的。对于用其他方法给出的数列，我们总是希望找出它的通项公式，以便研究数列的性质与求它的和。为此，下面我们就专门来研究数列通项公式的发现与探求。

练 习 一

1. 已知数列$\{a_n\}$的通项a_n，试写出数列$\{a_n\}$的前五项：

(1) $a_n = 3n+1$；　(2) $a_n = \sin\frac{n}{2}\pi$。

2. 已知数列$\{a_n\}$的通项a_n，试写出数列$\{a_n\}$：

(1) $a_n = \left[\frac{n}{3}\right]$；　(2) $a_n = [\sqrt{n}\,]$。

其中$[x]$表示不超过x的最大整数。

3. 已知数列$\{a_n\}$的通项a_n，试写出数列$\{a_n\}$：

(1) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & (n\text{为奇数})，\\ 1+\frac{1}{2^n} & (n\text{为偶数})；\end{cases}$

(2) $a_n = \begin{cases} n & (n = 3m+1)，\\ n+2 & (n = 3m+2)，\\ n+4 & (n = 3m+3)。\end{cases}$

4. 下列各式，它们的前面多少项是彼此相同的？

第三章 高阶等差数列通项的探求

良好的方法能使我们更好地发挥运用天赋的才能，而拙劣的方法则可能阻碍才能的发挥。因此，科学中很多可贵的创造性才华，由于方法拙劣可能被削弱，甚至被扼杀；而良好的方法则会增长、促进这种才华。

——贝尔纳

一、定义和判定方法

形如：

$$1,4,7,10,13,\cdots,3n-2,\cdots \quad (3\text{-}1)$$

$$1^2,2^2,3^2,4^2,5^2,\cdots,n^2,\cdots \quad (3\text{-}2)$$

$$1^3,2^3,3^3,4^3,5^3,\cdots,n^3,\cdots \quad (3\text{-}3)$$

$$2\cdot1,3\cdot3,4\cdot5,5\cdot7,\cdots,(n+1)(2n-1),\cdots \quad (3\text{-}4)$$

的数列，都是高阶等差数列。下面，我们一起来讨论这种类型的数列的特征和性质。先看看数列(3-1)，即

$$1,4,7,10,13,\cdots$$

如果我们从第二项起，把它的各项均依次减去其前一项，所得的差就会构成常数列：

$$3,3,3,3,3,\cdots.$$

如果一个数列从第二项起，依次减去它的前一项，将它们的差排列起来，便得到第二个数列，此数列就叫做原数列的一阶差数列；若对一阶差数列再次按上面方法求两项差，所得到的第三个数列叫做原数列的二阶差数列；依此类推，可得原数列的 r 阶差数列（$r>0, r\in N$）。如

数列$\{a_n\}$：$1^3,2^3,3^3,4^3,5^3,6^3,\cdots$，

一阶差数列：$7,19,37,61,91,\cdots$，

二阶差数列：$12,18,24,30,\cdots$，

三阶差数列：$6,6,6,\cdots$，

四阶差数列：$0,0,\cdots$。

定义 如果一个数列的 r 阶差数列是常数列，则称该数列为 r 阶等差数列。

根据这个定义不难判定：(3-1)是一阶等差数列（即普通等差数列）；(3-2)和(3-4)是二阶等差数列，(3-3)是三阶等差数列。为了方便，我们也把常数列叫做零阶等差数列。

我们可以用定义来判定一个数列是不是 r 阶等差数列，但如果遇到阶次较高的等差数列时，就会碰到不少麻烦。因此，我们再介绍一个较为简捷的判定定理。

判定定理 如果一个数列的通项公式是关于自然数 n 的 r 次多项式，这个数列就是 r 阶等差数列。

引理 如果一个数列的一阶差数列是 $r-1$ 阶等差数列，那么这个数列是 r 阶等差数列。

该引理的证明是不难的，请读者自己完成它。现在，我们根据这个引理来证明上述判定定理。

证明：设数列$\{a_n\}$的通项公式为

$$a_n=b_rn^r+b_{r-1}n^{r-1}+b_{r-2}n^{r-2}+\cdots+b_1n+b_0(b_r\neq0)$$