高等学校“十三五”规划教材

Discrete
Mathematics

离散数学

李小南　乔胜宁　编著

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

高等学校“十三五”规划教材

离散数学

李小南　乔胜宁　编著

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书介绍离散数学的基础知识. 全书共5章，内容包括集合与关系、格与布尔代数、排列组合、图论、数理逻辑、生成函数等. 书中在每节后均配有一定数量的习题. 为便于学生自学，书末附有部分习题的参考答案.

本书论述严谨、条理清楚，注重培养学生严格的逻辑推理能力，可作为本科数学和计算机相关专业的教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/李小南，乔胜宁编著. —西安：西安电子科技大学出版社，2016.2
高等学校"十三五"规划教材
ISBN 978-7-5606-4001-3

Ⅰ. ①离… Ⅱ. ①李… ②乔… Ⅲ. ①离散数学—高等学校—教材
Ⅳ. ①O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第021615号

策　　划　戚文艳
责任编辑　戚文艳　王　静
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)
电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071
网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com
经　　销　新华书店
印刷单位　陕西华沐印刷科技有限责任公司
版　　次　2016年2月第1版　2016年2月第1次印刷
开　　本　787毫米×1092毫米　1/16　印张9.875
字　　数　231千字
印　　数　1～3000册
定　　价　20.00元
ISBN 978-7-5606-4001-3/O
XDUP 4293001-1

前　　言

离散数学是现代数学的重要分支，是计算机科学理论的基础. 现在国内外已经出版了非常多的离散数学教材，其中不乏像方世昌编著的《离散数学》这样优秀的教材，那么我们为什么还要编写本书呢？原因主要有二：

首先，现在国内绝大部分离散数学的教材由数理逻辑、集合论、图论和抽象代数四部分构成，内容过于繁杂. 考虑到数学相关专业会在高年级学习抽象代数课程，加之现在国内也有非常好的抽象代数及其应用方面的入门教程(例如王殿军的《应用近世代数》)，因此本书略去了这部分内容，省出篇幅来介绍现今在编程及算法设计方面有着重要应用的生成函数理论.

其次，现在的离散数学教材往往为了强调“应用”、突出“通俗易懂”而忽视了数学学科的严谨性，而纯数学的相关教材则“理论味”太浓，有一种“拒人于千里之外”的感觉，本书力图在二者之间找到平衡.

上述两点也可以看作本书的特点. 此外，为了便于学生理解和自学，书中提供了较多的例子，且每节后面都安排有一定数量的习题，书末还给出了部分习题参考答案. 全书共5章:第1章是基础知识，主要介绍集合及关系、排列与组合、偏序集与布尔格、鸽巢原理与抽屉原理;第2、3章介绍图论中的基本概念及结论(这两章内容合起来是一个很好的30个学时左右的图论入门教程)；第4章是数理逻辑基础；第5章介绍生成函数。书后还有附录，附录1介绍了无限集的知识;附录2介绍了代数系统的知识.

本书在内容选材、申请立项等多方面得到了刘三阳教授的大力支持和帮助，在此表示深深的谢意. 还要感谢西安电子科技大学数学与统计学院杨有龙教授，他对本书内容提出了诸多建议. 李立峰副教授、张欣副教授、许文艳副教授、张鹏鸽副教授、宁万涛博士阅读了部分书稿并提出了修改意见，在此亦表示感谢. 本书的编写还得到了西安电子科技大学教材基金的资助.

由于编者水平有限，书中难免存在不妥之处，恳请读者指正.

编　者

2015年10月

目　　录

第1章　基础知识

本章主要介绍一些零散的但又是学习本课程必备的数学知识，其中不少内容对于读者来说并不陌生，例如集合、关系、排列和组合等知识，在中学数学或高等数学课程中已出现过. 本章并不打算像传统的离散数学教材那样详述这些内容，而是突出重点，有所取舍.

1.1　集合和关系

集合(set)是现代数学的一个基本概念. 一般地，所谓集合(或集)，是指具有某些特定性质的对象或事物的全体. 构成集合的事物称为集合的元素(或元)(element). 例如，26个英文字母是一个集合，中国的56个民族也是一个集合，而每一个字母和每一个民族都分别是这两个集合中的元素. 通常用大写字母 A、B 等表示集合，用小写字母 a、b 等表示集合中的元素. $a\in A$ 表示 a 是集合 A 中的元素，读作“a 属于 A”；$a\notin A$ 表示 a 不是集合 A 中的元素，读作“a 不属于 A”.

常用的几个数集符号：$\mathbf{N}$ 表示全体非负整数即自然数的集合；$\mathbf{Z}$ 表示全体整数的集合；$\mathbf{R}$ 表示全体实数的集合；$\mathbf{Z}^+$ 表示全体正整数的集合.

两个集合 A、B 相等，即 $A=B$，是指它们具有相同的元素. 例如，设

$$A_1=\{x\mid x^2-2x+1=0\},\ A_2=\{1\}$$

则 $A_1=A_2$.

下面介绍子集的概念.

定义1.1.1　设有 A、B 两个集合，如果 A 中的每一个元素都是 B 中的元素，则称 A 是 B 的子集(subset)，记为 $A\subseteq B$(读作“A 包含于 B”). 若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的真子集，记为 $A\subset B$(读作“A 真包含于 B”).

例如：$\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}$，$\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{R}$. 不含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$. 显然，对于任何集合 A，均有 $\varnothing\subseteq A$.

正整数集合 $\mathbf{Z}^+$ 有下面的性质：

良序原则(well-order principle)　正整数集合的每一个非空子集都包含最小元素.

例如：最小的正偶数为2. $\mathbf{Z}$、$\mathbf{R}$ 都没有这个性质. 由上述良序原则可以推导出非常重要的数学归纳法原理(mathematical induction).

数学归纳法原理　设命题 $P(n)$ 与每个正整数 n 有关(当然它或者正确或者不正确). 如果

(1) $P(1)$ 是正确的；

(2) 对任何正整数 k，由 $P(k)$ 正确推出 $P(k+1)$ 正确；

那么 $P(n)$ 对于一切正整数 n 都是正确的.

证明　设使 $P(k)$ 不正确的那些正整数 k 组成的集合为 S. 只需证明 S 是空集. 假设 S 非空，则由良序原则可知，S 含有最小元素(设为 m). 由于 $P(1)$ 是正确的，所以 $m>1$. 显

然 $m-1\in\mathbf{Z}^+$，且由 m 的定义可知 $P(m-1)$ 是正确的. 由于 $m-1+1=m$，故由数学归纳法原理中(2) 可知，$P(m)$ 是正确的，由此得到矛盾，因此 S 是空集，证毕.

数学归纳法原理告诉我们在证明 $P(n+1)$ 时，可以假定 $P(n)$ 正确；其实可以对一切 $k\leqslant n$ 假定 $P(k)$ 正确，于是有如下原理.

数学归纳法第二原理 设命题 $P(n)$ 与每个正整数 n 有关. 如果对任意正整数 m，由对一切满足 $k<m$ 的 $P(k)$ 是正确的，可推出 $P(m)$ 是正确的，那么 $P(n)$ 对于一切正整数 n 都是正确的.

例 1.1.1 证明：$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

证明 当 $n=1$ 时，因为 $1=\frac{1}{6}\times2\times3$，所以等式成立.

假设当 $n=k$ 时等式成立，即 $1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$，则

$$\begin{aligned}1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2&=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2\\&=(k+1)\left[\frac{1}{6}k(2k+1)+k+1\right]\\&=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)\\&=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)\end{aligned}$$

也即 $n=k+1$ 时等式成立. 由数学归纳法原理，命题得证.

下面介绍集合的运算. 设 A 和 B 是两个集合，则 A 和 B 的并集(union)、交集(intersection)、差集(difference)、对称差(symmetric difference)及集合的补集(complement)分别定义如下：

A 和 B 的并集，记为 $A\cup B$，定义为 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.

A 和 B 的交集，记为 $A\cap B$，定义为 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$.

A 和 B 的差集，记为 $A-B$，定义为 $A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$.

A 和 B 的对称差，记为 $A\oplus B$，定义为 $A\oplus B=\{x\mid x\in B-A$ 或 $x\in A-B\}$.

A 的补集，记为 $\sim A$ 或 $\overline{A}$，定义为 $\sim A=\{x\mid x\in E$ 且 $x\notin A\}$.

注意 补集定义中的 E 称为全集(universal set). 全集取决于所讨论具体问题的范围，因此是个相对的概念. 例如所讨论的对象是班里的男生，则全集可以是班里的所有学生，也可以是全校的所有学生.

例 1.1.2 证明集合恒等式：$A-B=A-A\cap B$.

证明 设 $x\in A-B$，即 $x\in A$ 且 $x\notin B$. 由 $x\notin B$ 可知 $x\notin A\cap B$. 由差集的定义有 $x\in A-A\cap B$，即

$$A-B\subseteq A-A\cap B$$

又设 $x\in A-A\cap B$，则 $x\in A$ 且 $x\notin A\cap B$. 若 $x\in B$，则由 $x\in A$ 可知 $x\in A\cap B$，矛盾，故 $x\notin B$. 由差集的定义可知 $x\in A-B$. 这样就说明了

$$A-A\cap B\subseteq A-B$$

因此

$$A-B=A-A\cap B$$

证毕.

注意　上述定理中说明两个集合相互包含是证明集合恒等式的常用方法，习题1.1中给出了更多的集合恒等式.

定义1.1.2　设A和B是两个集合，则分别取自A和B的元素组成的有序对的全体构成的集合称为A和B的笛卡儿积(cartesian product)，记为$A\times B$，也即

$$A\times B=\{\langle x, y\rangle \mid x\in A, y\in B\}$$

例1.1.3　设$A=\{a, b\}$，$B=\{1, a, 5\}$，则

$A\times B=\{\langle a, 1\rangle, \langle a, a\rangle, \langle a, 5\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, 5\rangle\}$

$B\times A=\{\langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle 5, a\rangle, \langle 5, b\rangle\}$

$A\times A=\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$

$B\times B=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, a\rangle, \langle 1, 5\rangle, \langle a, 1\rangle, \langle a, a\rangle, \langle a, 5\rangle, \langle 5, 1\rangle, \langle 5, a\rangle, \langle 5, 5\rangle\}$

注意　有序对中的元素是有顺序的. 在例1.1.3中$\langle a, 1\rangle\neq\langle 1, a\rangle$，故$A\times B\neq B\times A$.

因为两个集合的笛卡儿积仍是一个集合，故对于任意的正整数$n\geqslant 2$，我们可以通过如下方式定义n个集合的笛卡儿积：

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=(A_1\times A_2\times\cdots\times A_{n-1})\times A_n$$

特别地，$A\times A$可以写成A^2，…，$\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{n个A}=A^n$.

定义1.1.3　设A和B是两个集合，则称$A\times B$的子集为A到B的二元关系(binary relation). 若$A=B$，则称A^2的子集为A上的二元关系.

类似地，A^n的子集称为A上的n元关系. 本书主要讨论二元关系. 除非特别指出，书中的关系均指二元关系. 对于二元关系R(即$R\subseteq A^2$)，若$\langle a, b\rangle\in R$，则可记为aRb；若$\langle a, b\rangle\notin R$，则可记为$a\not R b$.

若两个集合A和B分别含有m和n个元素，则$A\times B$有mn个元素. 因为含有k个元素的集合一共有2^k个子集(见推论1.4.1)，所以从A到B共有2^{mn}个不同的二元关系. 特别地，若A含有n个元素，则A上的二元关系共有2^{n^2}个. 下面介绍几个重要的二元关系.

例1.1.4　设A是$\mathbf{R}$的任意非空子集，则称A上的二元关系

$$\leqslant_A=\{\langle x, y\rangle \mid x, y\in A, x\leqslant y\}$$

为小于等于关系. 若$A=\{1, 2\}$，则$\leqslant_A=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$. 按照上面的约定，$\langle 1, 1\rangle\in\leqslant_A$也常记为$1\leqslant_A 1$，在不引起混淆的情况下简单记为$1\leqslant 1$. 也就是说，我们熟知的实数集合$\mathbf{R}$上的小于等于关系“$\leqslant$”是一种常见的二元关系. 实数集上的“$\geqslant$，$>$，$<$”都是常见的二元关系.

例1.1.5　设A是$\mathbf{Z}$的任意非空子集，n为任意正整数，则称A上的二元关系

$$\{\langle x, y\rangle \mid x, y\in A, n\mid(x-y)\}$$

为模n同余关系.

注意　例1.1.5中$n\mid(x-y)$表示n整除$x-y$(也即n分别除x、y所得余数相同)，常记为$x\equiv y(\mathrm{mod}\ n)$，读作“$x$，$y$对模$n$同余”. 例如设$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，则$A$上的模4同

余关系为$\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 5,5\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 5,1\rangle\}$.

下面讨论关系的性质.

定义 1.1.4 设R是集合A上的二元关系且$\forall x, y, z\in A$，如果

(1) $\langle x, x\rangle\in R$，则称R是自反的；

(2) 当$\langle x, y\rangle\in R$时，有$\langle y, x\rangle\in R$，则称R是对称的；

(3) 当$\langle x, y\rangle$，$\langle y, z\rangle\in R$时，有$\langle x, z\rangle\in R$，则称R是传递的.

例如，实数集合$\mathbf{R}$上的小于关系"$<$"不是自反的，也不是对称的，而是传递的；三角形的相似关系是自反的、对称的、传递的；集合的包含关系是自反的和传递的，不是对称的；父子关系不是自反的，不是对称的，也不是传递的.

同时满足定义 1.1.4 中的三个性质(即自反性(reflexivity)、对称性(symmetry)、传递性(transitivity))的关系称之为等价关系(equivalence relation)，这是一类非常重要的二元关系. 例如，三角形的相似关系就是等价关系. 下面说明例 1.1.5 中模n同余关系为等价关系.

例 1.1.6 证明：$\mathbf{Z}$上的模n同余关系$R=\{\langle x, y\rangle \mid x, y\in \mathbf{Z}, x\equiv y(\bmod n)\}$为等价关系.

证明 设$x, y, z\in \mathbf{Z}$. 首先因为$n\mid(x-x)$，故$\langle x, x\rangle\in R$，这就验证了自反性. 接下来验证对称性：若$\langle x, y\rangle\in R$，由定义$n\mid(x-y)$得$n\mid(y-x)$，也即$y\equiv x(\bmod n)$，因此$\langle y, x\rangle\in R$. 最后验证传递性：若$\langle x, y\rangle$，$\langle y, z\rangle\in R$，则$x-y=nt_1$，$y-z=nt_2$(t_1，$t_2\in \mathbf{Z}$)，因此$x-z=n(t_1+t_2)$，这就说明了$\langle x, z\rangle\in R$，证毕.

设R是集合A上的等价关系，对于任意$a\in A$，称集合$[a]_R=\{x\mid x\in A, aRx\}$为以$a$为代表元的关于$R$的等价类(equivalence class)，简称a的等价类. 例如，$\mathbf{Z}$上的模 4 同余关系形成的所有等价类如下：

$$[0]_R=[4]_R=[-4]_R=\cdots=\{\cdots, -8, -4, 0, 4, 8, \cdots\}$$
$$[1]_R=[5]_R=[-3]_R=\cdots=\{\cdots, -7, -3, 1, 5, 9, \cdots\}$$
$$[2]_R=[6]_R=[-2]_R=\cdots=\{\cdots, -6, -2, 2, 6, 10, \cdots\}$$
$$[3]_R=[7]_R=[-1]_R=\cdots=\{\cdots, -5, -1, 3, 7, 11, \cdots\}$$

最后指出关于等价类有下面的性质定理(证明留作习题).

定理 1.1.1 设R是集合A上的等价关系，对于任意的a，$b\in A$，有

(1) $[a]_R\neq\varnothing$，$[a]_R\subseteq A$；

(2) 若aRb，则$[a]_R=[b]_R$；

(3) 若$a \not R b$，则$[a]_R\cap[b]_R=\varnothing$；

(4) $\bigcup\limits_{a\in A}[a]_R=A$.

习题 1.1

1. 证明数学归纳法第二原理.

2. 用数学归纳法证明($n\in \mathbf{Z}^+$)：

(1) $2^n>n^2(n\geqslant 5)$；

(2) $(1+2+\cdots+n)^2=1^3+2^3+\cdots+n^3$；

(3) $(1+p)^n>1+np$，$p>-1$，$p\neq 0$，$n\geqslant 2$.

3. 设 A、B 和 C 是 U 的任意子集，证明：

(1) $\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$；

(2) $\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$；

(3) $A-B=A\cap\sim B$；

(4) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

(5) $A\cap(B\cup C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

注意　(1)和(2)称为德·摩根律(De Morgan's law)；(4)和(5)称为分配律(distributive law).

4. 设 R 是集合 A 上的二元关系且对任意的 x，$y\in A$.

(1) 如果 $\langle x, x\rangle\notin R$，则称 R 是反自反的(anti-reflexivity)；

(2) 如果当 $\langle x, y\rangle\in R$ 和 $\langle y, x\rangle\in R$ 时有 $x=y$，则称 R 是反对称的(anti-symmetry).

设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$，构造 A 上的二元关系，使得

(1) R 是自反的，不是对称和传递的；

(2) R 是对称的，不是自反和传递的；

(3) R 是自反和传递的，但不是对称的；

(4) R 是反对称和反自反的.

5. 若集合 X 中含有 $n(n\in\mathbf{N})$ 个元素，则称 X 的基数(cardinality)为 n，记为 $|X|=n$（或 card $X=n$）[①]. 设某班有 50 名学生，选修英语的有 30 人，选修法语的有 20 人，既选修英语又选修法语的有 10 人. 令班里既没有选修英语又没有选修法语的学生构成的集合为 A，求 $|A|$.

6. 设 A、B 是两个非空集合，f 为一个 A 到 B 的二元关系且对 A 中每一个元素，都有 B 中唯一元素与之对应，则称 f 为一个 A 到 B 的映射[②](map)，记为 $f: A\to B$. 对于 $\langle x, y\rangle\in f$（即 xfy），一般记为 $f(x)=y$，称 y 为 x（在映射 f 下）的像(image)，x 为 y（在映射 f 下）的原像(preimage).

设 $A=\{a, b, c, d\}$，$B=\{1, 2, 3, 4\}$. 判断下列哪些二元关系构成映射？

(1) $R_1=\{\langle a, 1\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle c, 2\rangle, \langle d, 3\rangle\}$；

(2) $R_2=\{\langle a, 1\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle c, 3\rangle\}$；

(3) $R_3=\{\langle a, 2\rangle, \langle b, 3\rangle, \langle c, 4\rangle, \langle d, 1\rangle\}$；

(4) $R_4=\{\langle a, 4\rangle, \langle a, 3\rangle, \langle c, 1\rangle, \langle d, 1\rangle\}$.

7. 设 f 为 A 到 B 的映射. 若 B 中每一个元素都是 A 中某个元素的像，则称 f 为满射(surjective map)；若 A 中不同元素的像不同，则称 f 为单射(injective map)；既是单射又是满射的映射称为双射(bijective map)或一一对应(one-to-one correspondence).

(1) 第 6 题中的映射哪些是满射？哪些是单射？哪些是双射？

---

① 这样的集合也称为有限集合，不是有限集合的集合称为无限集合. 例如，$\mathbf{N}$、$\mathbf{Z}$、$\mathbf{R}$ 都是无限集合. 关于无限集合更多的内容可参考附录 1.

② 本书和其他一般的离散数学教材一样，对函数和映射不加以区分. 在数学中，有时将实数集合（或其子集）X 到实数集合 Y 的映射称为定义在 X 上的函数.

(2) 若 f 为有限集 A 到有限集 B 之间的单射，则$|A|$和$|B|$有什么关系？

(3) 若 f 为有限集 A 到有限集 B 之间的满射，则$|A|$和$|B|$有什么关系？

(4) 若 f 为有限集 A 到有限集 B 之间的双射，则$|A|$和$|B|$有什么关系？

8. 设 U 是全集，对于任意的 $A\subseteq U$，定义映射 $f_A: U\to\{0, 1\}$如下：

$$f_A(x)=\begin{cases}0, & x\notin A\\ 1, & x\in A\end{cases}$$

称之为集合 A 的特征函数. 常用 B^A 表示 A 到 B 的所有映射的集合，证明$\{0, 1\}^U$ 和 U 的所有子集构成的集合(称为 U 的幂集(power set))之间存在一个双射①.

9. 证明定理 1.1.1.

10. 设 A 是非空集合，$\pi=\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}\subseteq 2^A$. 对于任意的 $i, j\in\{1, 2, \cdots, m\}$，若$A_i\neq\varnothing$，$A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$且$\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i=A$，则称 π 为集合 A 的一个划分(partition). 证明集合 A 上的所有划分构成的集合和所有等价关系构成的集合之间存在一个一一对应.

1.2 关系的表示与运算

关系是一种特殊的集合，1.1 节中都是用集合形式来表示关系. 对于有限集合上的关系，还可以用矩阵或者图形形式来表示，下面给出关系矩阵和关系图的定义.

定义 1.2.1 设 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$，$Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$，$R$ 是 X 到 Y 的关系. 令

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & \langle x_i, x_j\rangle\in R\\ 0, & \langle x_i, x_j\rangle\notin R\end{cases}\quad(i=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, n)$$

则称

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n}\\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn}\end{bmatrix}$$

为 R 的关系矩阵(relational matrix).

定义 1.2.2 设 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$，$Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$，$R$ 是 X 到 Y 的关系，用点表示 X 和 Y 中的元素. 如果 x_iRx_j，则在点 x_i 和 x_j 之间连接一条有向边，由 x_i 指向 x_j，这样得到的图形称为 R 的关系图(relational graph).

例 1.2.1 设 $X=\{1, 2, 3\}$，$Y=\{3, 6, 7, 8\}$，且 X 到 Y 的关系 R 为

$$\{\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 6\rangle, \langle 2, 7\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$$

则 R 的关系矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

---

① 若用 2 表示$\{0, 1\}$这个集合，则 2^U 和 U 的幂集之间存在一个双射，因此常用 2^U 来表示 U 的幂集.

关系图如图 1.1 所示.

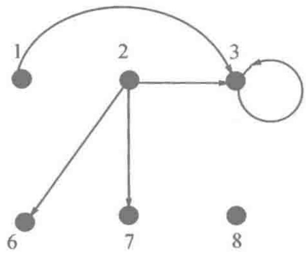

图 1.1

设 R 是 X 到 Y 的关系，并不是说 X 和 Y 中的每个元素都出现在 R 的有序对中. 例如，例 1.2.1 中的 8 就没有出现在关系 R 的有序对中. 研究关系时一般只需要关注那些参与到关系 R 中的 X 或 Y 中的元素. 下面引入关系的定义域和值域的概念.

定义 1.2.3　关系 R 的所有有序对中第一个元素构成的集合称为 R 的定义域(domain)，记为 dom R；关系 R 的所有有序对中第二个元素构成的集合称为 R 的值域(range)，记为 ran R.

例 1.2.2　设 $Y=\{3, 6, 7, 8\}$，$Z=\{7, 8, 9, 10\}$，且 Y 到 Z 的关系 S 为

$$\{\langle 3, 7\rangle, \langle 7, 8\rangle, \langle 8, 7\rangle, \langle 8, 8\rangle, \langle 8, 9\rangle\}$$

则 S 的定义域 dom $S=\{3, 7, 8\}$；值域 ran $S=\{7, 8, 9\}$. S 的关系矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

关系图如图 1.2 所示.

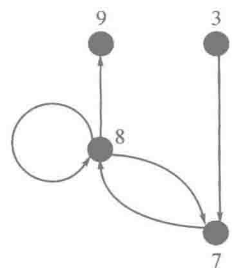

图 1.2

定义 1.2.4　设 R_1 是 X 到 Y 的关系，R_2 是 Y 到 Z 的关系，则称 X 到 Z 的如下关系

$$\{\langle x, z\rangle \mid \text{存在 } y \in Y\text{，使得}\langle x, y\rangle \in R_1, \langle y, z\rangle \in R_2\}$$

为 R_1 和 R_2 的复合(composite)，记为 $R_1 \cdot R_2$.

例 1.2.3　例 1.2.1 中关系 R 和例 1.2.2 中关系 S 的复合关系为

$$R \cdot S = \{\langle 1, 7\rangle, \langle 2, 7\rangle, \langle 2, 8\rangle, \langle 3, 7\rangle\}$$

此复合关系 $R \cdot S$ 的关系矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

注意　R 的关系矩阵和 S 的关系矩阵的乘积为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对于例 1.2.3 来说，复合关系的关系矩阵等于相应的关系矩阵的乘积. 其实这个结果不是偶然的，我们有如下定理：

定理 1.2.1　设 R_1 是 X 到 Y 的关系，关系矩阵为 $\boldsymbol{M}_1$，R_2 是 Y 到 Z 的关系，关系矩阵为 $\boldsymbol{M}_2$，则复合关系 $R_1 \cdot R_2$ 的关系矩阵为矩阵乘积 $\boldsymbol{M}_1 \cdot \boldsymbol{M}_2$.

证明留作习题. 注意这里为了保证 $\boldsymbol{M}_1 \cdot \boldsymbol{M}_2$ 仍是 0－1 矩阵，计算此矩阵乘积时用到的加法不是通常的加法. 不妨设 $\boldsymbol{M}_1 \cdot \boldsymbol{M}_2$ 的第 i 行第 j 列的元素为

$$a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$

则这里的加法为 $0+0=0$，$0+1=1$，$1+0=1$，$1+1=1$.

定义 1.2.5　设 R 为 X 上的关系，$n\in \mathbf{N}$，则 R 的 n 次幂定义如下：

(1) $R^0=\{\langle x, x\rangle \mid x\in X\}$；

(2) $R^n=R^{n-1}\cdot R$，$n\geqslant 1$.

1.1 节指出有限集合 X 上一共有 $2^{|X|^2}$ 个二元关系. 若 R 为有限集合 X 上的关系，则 R^n(对任意的自然数 n)也是 X 上的关系，这就说明 X 的不同幂只有有限个(此结论对于无限集合不成立，见习题 1.2 第 4 题).

定义 1.2.6　设 R 是 X 到 Y 的关系，关系 R 的逆关系记为 R^{-1}，是一个从 Y 到 X 的二元关系，定义如下：

$$R^{-1}=\{\langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle\in R\}$$

由逆关系的定义可知，xRy 当且仅当 $yR^{-1}x$；R 的关系矩阵和 R^{-1} 的关系矩阵互为转置矩阵. 逆关系还有下面的性质.

定理 1.2.2　设 R、R_1、R_2 是 X 到 Y 的关系，则

(1) $(R^{-1})^{-1}=R$；

(2) $(R_1\cap R_2)^{-1}=R_1^{-1}\cap R_2^{-1}$；

(3) $(R_1\cup R_2)^{-1}=R_1^{-1}\cup R_2^{-1}$；

(4) 若 $R_1\subseteq R_2$，则 $R_1^{-1}\subseteq R_2^{-1}$.

证明　仅以(2)为例进行证明.

设 $\langle x, y\rangle\in(R_1\cap R_2)^{-1}$，则 $\langle y, x\rangle\in R_1\cap R_2$，即有

$$\langle y, x\rangle\in R_1 \text{ 且 } \langle y, x\rangle\in R_2$$

由 $\langle y, x\rangle\in R_1$ 可知 $\langle x, y\rangle\in R_1^{-1}$；同理由 $\langle y, x\rangle\in R_2$ 可知 $\langle x, y\rangle\in R_2^{-1}$，故

$$\langle x, y\rangle\in R_1^{-1}\cap R_2^{-1}$$

这样就证明了

$$(R_1 \cap R_2)^{-1} \subseteq R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$$

同理可证

$$(R_1 \cap R_2)^{-1} \supseteq R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$$

因此

$$(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$$

本节最后来介绍关系的闭包.

定义 1.2.7　设 R 是非空集合 X 上的关系，R 的自反(对称或传递)闭包是 X 上的关系 R'，且 R' 满足以下条件：

(1) R' 是自反(对称或传递)的；

(2) $R \subseteq R'$；

(3) 对于任何包含 R 的自反(对称或传递)关系 R''，有 $R' \subseteq R''$.

通常将 R 的自反闭包、对称闭包和传递闭包分别记为 $r(R)$、$s(R)$ 和 $t(R)$. 由定义可知，R 的自反(对称或传递)闭包是包含 R 的最小自反(对称或传递)关系. 若 R 本身就是自反(对称或传递)关系，那么 R 的自反(对称或传递)闭包就是 R.

求关系闭包实际上是关系的一种运算，下面的定理给出了求关系闭包的方法.

定理 1.2.3　设 R 是非空有限集合 X 上的关系，则

(1) $r(R) = R \cup R^0$；

(2) $s(R) = R \cup R^{-1}$；

(3) $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$.

证明　(1)、(2)证明较易，留给读者自己完成，下面证明(3). 先证

$$t(R) \supseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

由传递闭包的定义知 $t(R) \supseteq R$. 由数学归纳法，假设 $t(R) \supseteq R^n$ $(n \geqslant 1)$，证 $t(R) \supseteq R^{n+1}$.

设 $\langle x, y\rangle \in R^{n+1} = R^n \cdot R$，故存在 $a \in X$ 使得

$$\langle x, a\rangle \in R^n \text{ 和} \langle a, y\rangle \in R$$

由假设可知 $\langle x, a\rangle \in R^n \subseteq t(R)$，再由 $\langle a, y\rangle \in R \subseteq t(R)$ 及传递闭包的定义可知 $\langle x, y\rangle \in t(R)$，所以

$$t(R) \supseteq R^{n+1}$$

故

$$t(R) \supseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

再证 $t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$.

为此只需证明 $R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$ 是传递的(因为包含 R 的任何传递关系都包含 $t(R)$). 设 $\langle x, y\rangle$，$\langle y, z\rangle \in R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$，则存在整数 m，n 使得

$$\langle x, y\rangle \in R^m，\langle y, z\rangle \in R^n$$

所以由习题 1.2 第 6(1)题的结论有

$$\langle x, z\rangle \in R^m \cdot R^n = R^{m+n} \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

这就说明了 $R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$ 是传递关系，证毕.

根据定理 1.2.3，可以由 R 的关系矩阵 $\boldsymbol{M}$ 得到 $r(R)$、$s(R)$ 和 $t(R)$ 的关系矩阵 $\boldsymbol{M}_r$、$\boldsymbol{M}_s$ 和 $\boldsymbol{M}_t$. 也就是

$\boldsymbol{M}_r=\boldsymbol{M}+\boldsymbol{E}$；

$\boldsymbol{M}_s=\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}$；

$\boldsymbol{M}_t=\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}^2+\boldsymbol{M}^3+\cdots$

关于传递闭包 $t(R)$的结果可以改进，即如下定理(证明留作习题).

定理 1.2.4 设 R 是非空有限集合 X 上的关系且$|X|=n$，则

$$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots\cup R^n$$

习题 1.2

1. 自反、对称关系的关系矩阵和关系图分别有什么特点？

2. 集合 X 上自反且对称的二元关系称为相容关系. 那么相容关系的复合、并和交是相容关系吗？

3. 证明定理 1.2.1.

4. 举例说明无限集合上的关系的不同幂可以有无限个.

5. 证明定理 1.2.2 中其余三个关系式.

6. 设 R 为 A 上的关系，m、n 为自然数，证明：

(1) $R^m\cdot R^n=R^{m+n}$；

(2) $(R^m)^n=R^{mn}$.

7. 设 $A=\{a, b, c, d\}$，且 A 上的关系 R 的关系矩阵为

$$\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

求 $R^n(n\in\mathbf{N})$.

8. 证明定理 1.2.4.

9. 设$|A|=n$，举例说明存在 A 上的关系R 使得R^1，R^2，…，R^n 两两无交(即交集为空集). 这就说明定理 1.2.4 中的结果是不可改进的.

10. 设$|A|=n$，是否存在 A 上的R，使得 R^1，R^2，…，R^n，R^{n+1}两两不同？若不存在，请说明原因；若存在，请举例并指出这种情况为什么和定理 1.2.4 不矛盾.

1.3 偏序集与布尔格

偏序集和布尔格在数学和实际应用(例如计算机学科和数字逻辑设计)中都有重要地位. 本节介绍偏序集和格论中的一些基本概念及两个重要的结论：有限偏序集的 Dilworth 定理和有限布尔格的 Stone 表示定理.

定义 1.3.1 设 R 是非空集合 X 上的关系，如果 R 同时具有自反性、反对称性和传递性，则称 R 是 X 上的偏序关系. 偏序关系常用符号“$\leqslant$”来表示，若$\langle x, y\rangle\in\leqslant$，常记作 $x\leqslant y$. $(X, \leqslant)$称为偏序集(poset). 若 X 为有限集，则称之为有限偏序集. 有时无需特别指出偏序关系，也常简单地说偏序集 X.

实数集 $\mathbf{R}$ 上的小于等于关系“$\leqslant$”[①]、集合间的包含关系“$\subseteq$”、整数集 $\mathbf{Z}$ 上的整除关系“$|$”等都是偏序关系.

例 1.3.1 设 $X=\{a, b, c, d, e\}$，令

$R_1=\{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle, \langle e, e\rangle\}$

$R_2=\{\langle a, c\rangle, \langle b, c\rangle, \langle d, e\rangle\}\cup R_1$

$R_3=\{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle a, e\rangle, \langle b, e\rangle, \langle c, d\rangle, \langle c, e\rangle, \langle d, e\rangle\}\cup R_1$

$R_4=\{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle a, e\rangle, \langle b, e\rangle, \langle c, e\rangle, \langle d, e\rangle\}\cup R_1$

$R_5=\{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle a, e\rangle, \langle b, c\rangle, \langle b, d\rangle, \langle b, e\rangle, \langle c, d\rangle\langle c, e\rangle, \langle d, e\rangle\}\cup R_1$

则可以验证集合 X 上的这 5 个关系都是偏序关系. 这 5 个偏序关系对应的偏序集分别记为 $(X, \leqslant_1)$、$(X, \leqslant_2)$、$(X, \leqslant_3)$、$(X, \leqslant_4)$ 和 $(X, \leqslant_5)$.

设 $(X, \leqslant)$ 是偏序集，$x, y\in X$. 若 $x\leqslant y$ 或 $y\leqslant x$，则称 x 和 y 是可比较的，否则称 x 和 y 是不可比较的. 若 $Y\subseteq X$，如果 Y 中任意两个元素都可比较，则称 Y 是链(chain)；如果 Y 中任意两个元素都不可比较，则称 Y 为反链(antichain). 若 $x\leqslant y$，$x\neq y$，则当 $\{z\in X \mid x\leqslant z\leqslant y, z\neq x, z\neq y\}=\varnothing$ 时就称 y 覆盖 x，记作 $x\lessdot y$.

偏序集 $(X, \leqslant)$ 可以用 Hasse 图表示. 方法如下：用实心(或空心)小圆圈表示 X 中元素；若 $x\leqslant y$ 且 $x\neq y$，则 y 画在 x 的上方；若 $x\lessdot y$，则 x 和 y 直接用线段相连. 例 1.3.1 中的 5 个偏序集的 Hasse 图如图 1.3 所示.

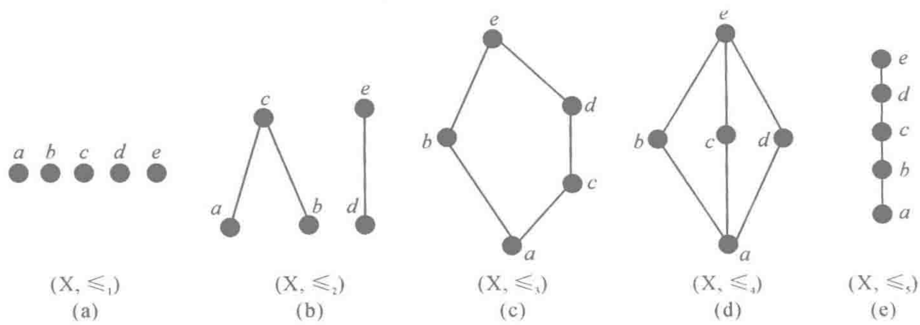

图 1.3

从图中容易看出，$\{a, b, c, d, e\}$ 是 $(X, \leqslant_1)$ 中的反链，是 $(X, \leqslant_5)$ 中的链；在偏序集 $(X, \leqslant_2)$ 中，a 和 b 不可比较；e 是偏序集 $(X, \leqslant_3)$ 中的最大元(即 $\forall x\in X, x\leqslant e$)，$a$ 是偏序集 $(X, \leqslant_3)$ 中的最小元(即 $\forall x\in X, a\leqslant x$)；当然 $(X, \leqslant_1)$ 和 $(X, \leqslant_2)$ 中都没有最大元. 偏序集 $(X, \leqslant)$ 中的极小(大)元 z 定义为：X 中不存在和 z 不同的元素 x 使得 $x\leqslant z(z\leqslant x)$. 显然最大(小)元一定是极大(小)元，反之不然. 例如，$(X, \leqslant_2)$ 中的 a 是极小元，不是最小元；c 是极大元而不是最大元. 最后注意 $(X, \leqslant_3)$ 中的最长链的大小为 4(链和反链的大小都定义为所指集合的元素个数)，而 $\{a\}, \{b, c\}, \{d\}, \{e\}$ 是 X 的由 4 个反链构成的划分；$(X, \leqslant_4)$ 中的最长链的大小为 3，而 $\{a\}, \{b, c, d\}, \{e\}$ 是 X 的由 3 个反链构成的划分. 下面指出这个结论具有一般性.

① 符号“$\leqslant$”被借用来表示一般偏序关系时，叫法也和表示实数集中大小关系时类似. 例如若 $(X, \leqslant)$ 为偏序集，$\langle x, y\rangle\in\leqslant$，则称 x 小于等于 y. $\langle x, y\rangle\in\leqslant$ 且 $x\neq y$，则记为 $x<y$，称 x 小于 y.