“十三五”普通高等教育本科规划教材

# 概率论与数理统计

GAILÜLUN YU SHULITONGJI

黄　新　罗逸平　主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

“十三五”普通高等教育本科规划教材

# 概率论与数理统计

主　编　黄　新　罗逸平
副主编　于益华　成红艳　唐　波
主　审　肖翠娥

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

## 内 容 简 介

本书针对普通高等学校非数学专业教学要求编写，共分 10 章，主要内容包括概率论的基本概念、随机变量及其分布、随机向量、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析和 MATLAB 在概率统计中的应用。每章配有习题，书后附有参考答案。

本教材力图体现如下特色：①概率论注重概念的理解，统计注重思想方法；②注重从生活实际问题中引入基本概念与统计思想；③培养学生的数据处理和数学建模能力。

本书适用于普通高等学校非数学专业使用，也可作为函授或自学者的教材或参考书。

**图书在版编目(CIP)数据**

概率论与数理统计/黄新，罗逸平主编. —北京：中国铁道出版社，2016.1

“十三五”普通高等教育本科规划教材

ISBN 978-7-113-20721-2

Ⅰ.①概… Ⅱ.①黄… ②罗… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 249595 号

**书　　名**：**概率论与数理统计**
**作　　者**：黄　新　罗逸平　主编

**策　　划**：李小军　　　**读者热线**：(010)63550836
**责任编辑**：李小军
**编辑助理**：曾露平
**封面设计**：付　巍
**封面制作**：白　雪
**责任校对**：汤淑梅
**责任印制**：李　佳

**出版发行**：中国铁道出版社(100054，北京市西城区右安门西街 8 号)
**网　　址**：http://www.51eds.com
**印　　刷**：三河市兴达印务有限公司
**版　　次**：2016 年 1 月第 1 版　　2016 年 1 月第 1 次印刷
**开　　本**：787 mm×960 mm　1/16　**印张**：13.5　**字数**：262 千
**书　　号**：ISBN 978-7-113-20721-2
**定　　价**：29.00 元

# 前　言

本书是作者结合多年的“概率论与数理统计”(非数学类)课程教学经验,并参考国内外同类教材而编写的。在编写过程中,我们充分考虑了非数学类专业对概率统计的要求,旨在培养学生应用数学理论的意识与能力,重视基本概念,强调概率统计思想,突出概率统计的应用价值。本教材的主要特点有:

(1)以应用为目标,概率注重概念,统计注重思想方法,更多地让学生体会概率统计的本质和实用价值。

(2)注重从生活中的实际问题引入基本概念与统计思想,内容通俗易懂,例题与习题的选择由浅入深,贴近实践。

(3)加强教学实践环节,结合 MATLAB 软件,培养学生的数据处理和数学建模能力。

本书由黄新和罗逸平担任主编,于益华、成红艳、唐波担任副主编,肖翠娥教授担任主审。各章编写分工如下:第 1、2 章由成红艳编写,第 3、4、5 章由罗逸平编写,第 6、7 章由于益华编写,第 8 章由唐波编写,第 9、10 章由黄新编写,最后由黄新博士统稿定稿。本书在编写过程中得到了中南大学数学与统计学院许青松教授、湖南城市学院科技处宋迎清教授、湖南城市学院数学与计算科学学院夏方礼教授、李俊锋教授及同行的帮助与支持,并且提出了许多宝贵意见,在此表示衷心感谢。

由于编者水平有限,书中难免有错误和不妥之处,恳请各位专家及读者提出宝贵意见。

编　者

2015 年 8 月

# 目 录

# 第1章 概率论的基本概念

概率论是以数量化方法研究和揭示随机现象统计规律性的数学分支，具有十分丰富的内容和广泛的应用，几乎渗透到了所有科学技术领域，如工业、农业、国防与国民经济的各个部门. 例如可以应用概率统计方法进行质量控制、工业试验设计、产品的抽样检查等. 还可使用概率统计方法进行气象预报、水文预报和地震预报等. 另外，概率统计的理论与方法正在向各基础学科、工程学科、经济学科渗透，产生了各种边缘性的应用学科，如排队论、计量经济学、信息论、控制论、时间序列分析等.

概率论主要研究常见随机模型的性质；数理统计则以概率论为基础，利用对随机现象的观察所取得的资料建立随机模型，然后研究其统计规律性. 探索随机现象的统计规律性，利用这些规律为人类服务，正是概率统计的任务.

## §1.1 随机事件

在人们的生产实践和科学实验中，我们总是可以观察到大量的现象，这些现象概括起来无非是两类现象：

(1)确定性现象：在一定的条件之下必然发生某一结果的现象，也称必然现象或非随机现象. 这类现象的一个共同点是事先可以断定其结果，如在一个标准大气压下，水加热到 100 ℃时必然沸腾；一枚硬币上抛后必然下落等等.

(2)随机现象：在一定的条件之下，有多种可能的结果，但到底出现哪一种结果事先是不能确定的现象，也称偶然现象或非确定性现象. 这类现象的一个共同点是事先不能预言多种可能结果中究竟出现哪一种，如向上抛掷一枚硬币，其落地后可能正面朝上，也可能反面朝上；一张彩票可能中奖，也可能不中奖；明天的天气情况等等.

这里的“不确定性”有两方面的含义，一是客观结果的不确定性，二是主观猜测或判断的不确定性.

一般来说，随机现象具有两重性：表面上的偶然性与内部蕴含着的必然规律性. 随机现象的偶然性又称为它的随机性，在一次试验或观察中，结果的不确定性就是随机现象随机性的一面；在相同条件下进行大量重复试验或观察时呈现出来的规律性是

随机现象必然性的一面，称随机现象的必然性为统计规律性. 如就投一次篮球而言，NBA 球星和非职业球员都有可能投进也有可能投不进，但要是在相同条件下各多次投篮，几乎肯定是 NBA 球星进球的比例高，因此随机现象是偶然性与必然性的辩证统一.

随机现象的统计规律性是随机现象本身所固有的、不随人们的意志而改变的客观属性，正是这种规律的存在，使得我们利用数学工具研究随机现象成为可能.

### 1.1.1 随机试验

人们是通过观察或试验去研究随机现象的，我们把对随机现象加以研究所进行的观察或实验，称为随机试验，简称试验. 具有以下三个特点：

(1)可重复性：可以在相同的条件之下重复进行；

(2)可观察性：每次试验的可能结果不止一个，并且事先可以明确试验的所有可能出现的结果；

(3)不确定性：在试验之前不能肯定哪一个结果会出现，但可以肯定会出现上述可能结果中的一个.

下面列举一些随机试验的例子：

$E_1$：抛一枚硬币，观察正面 $H$ 和反面 $T$ 出现的情况；

$E_2$：将一枚硬币连续抛掷两次，观察正面 $H$ 和反面 $T$ 出现的情况；

$E_3$：将一枚硬币连续抛掷两次，观察其正面 $H$ 出现的次数；

$E_4$：掷两颗骰子，观察出现的点数；

$E_5$：记录某大型超市一天内进入的人数；

$E_6$：在一批电视机中任意抽取一台，测试它的寿命；

$E_7$：向平面上某目标射击，观察弹着地的位置；

$E_8$：从一个装有两个白球，三个黑球的袋中任取两个，观察其颜色.

### 1.1.2 样本空间

由于随机试验具有可观察性，因此，任一个随机试验 $E$ 的所有可能的不可分的结果组成的集合是已知的，我们将随机试验 $E$ 的所有可能结果组成的集合称为 $E$ 的**样本空间**，记作 $\Omega$，$\Omega$ 中的元素即 $E$ 的每一个基本结果称为**样本点**，记作 $\omega$.

记 1.1.1 节中随机试验 $E_k$ 的样本空间为 $\Omega_k(k=1,2,3,4,5,6,7,8)$，则容易得到：

$\Omega_1=\{H,T\}$；$\Omega_2=\{HH,HT,TH,TT\}$；$\Omega_3=\{0,1,2\}$；

$\Omega_4=\{(i,j)\mid i,j=1,2,3,4,5,6\}$；$\Omega_5=\{0,1,2,3,\cdots\}$；$\Omega_6=\{t\mid t\geqslant 0\}$；

$\Omega_7=\{(x,y)\mid -\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty\}$，其中$(x,y)$为弹着地的坐标.

至于 $\Omega_8$，我们可以从以下两个方面考虑：

(1)若仅考虑颜色不考虑次序,则 $\Omega_8=\{$两个白球,两个黑球,一个白球一个黑球$\}$.

(2)若既考虑颜色又考虑次序,则 $\Omega_8=\{$(白球,白球),(黑球,黑球),(黑球,白球),(白球,黑球)$\}$.

值得注意的是:尽管试验 $E_2$ 和 $E_3$ 都是将一枚硬币连续抛掷两次,但由于试验的目的不同,得到的样本空间也不相同;对于同一个试验 $E_8$,由于考虑问题的角度不同,可以得到两个截然不同的样本空间. 这说明试验的目的和考虑问题的角度都会对样本空间产生影响. 样本空间中的样本点可以是数,也可以不是数;个数可以是有限多个,也可以是无穷多个,无穷又可以是无穷可列或无穷不可列.

建立样本空间事实上就是建立随机现象的数学模型. 一个抽象的样本空间可以概括许多内容不相同的实际问题,例如 $\Omega_1$ 是只包含两个样本点的样本空间,但它既可以作为掷硬币出现正面或反面的模型,也可作为产品检验中产品合格或者不合格的模型,还可用于公共事业的排队现象中有人排队或无人排队的模型,以及作为天气预报中下雨或不下雨的模型等等,这说明尽管问题的实际内容不同,但有时都能归结为相同的概率模型,因此,我们常以抛掷硬币、摸球等这样一些既典型又形象且易于理解的例子来阐明一些问题,以便使问题更明确,本质更突出.

### 1.1.3　随机事件

在随机试验中,人们除了关心试验的结果本身外,往往还关心试验的结果是否具备某一指定的可观察的特征. 在概率论中,把具有某一可观察特征的随机试验的结果称为**事件**. 常用的事件有:

基本事件:由一个样本点组成的单点集,通常用 $\omega$ 表示.

复合事件:由若干个基本事件组成的事件.

随机事件:在试验中可能发生也可能不发生的事件,通常用字母 $A,B,C$ 等表示. 它是随机试验中样本空间的子集,如果属于事件 $A$ 的某一基本事件 $\omega$ 在随机试验中出现,则称 $A$ 发生,否则,称 $A$ 不发生.

必然事件:在每次试验中都必然发生的事件,样本空间 $\Omega$ 包含了所有的样本点,它是 $\Omega$ 自身的子集,在每次试验中都必然发生,故它就是一个必然事件,因此必然事件我们也用 $\Omega$ 表示.

不可能事件:在每次试验中不可能发生的事件,即不包含任何基本事件的事件. 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点,它是样本空间的子集,在每次试验中都不可能发生,故它就是一个不可能事件,因此不可能事件我们也用 $\varnothing$ 表示.

必然事件和不可能事件是随机事件的两个特殊情况,严格地说它们已经不具有随机性,但我们仍将它们作为随机事件的两个极端情形.

**例 1.1** 记投掷一颗骰子的样本空间为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，则事件 $A=\{$出现的点数为偶数点$\}=\{2,4,6\}$；事件 $B=\{$出现的点数为 5$\}=\{5\}$；事件 $C=\{$出现的点数大于 6$\}=\varnothing$；事件 $D=\{$出现的点数小于 7$\}=\{1,2,3,4,5,6\}=\Omega$.

### 1.1.4 事件之间的关系与运算

事件是一个集合，因而事件之间的关系与运算可以用集合之间的关系与运算来处理. 下面我们来讨论事件之间的关系与运算.

(1)包含：如果事件 $A$ 发生必然导致事件 $B$ 发生，则称事件 $A$ **包含于**事件 $B$（或称事件 $B$ **包含**事件 $A$），记作 $A\subset B$（或 $B\supset A$）.

$A\subset B$ 的一个等价说法是，如果事件 $B$ 不发生，那么事件 $A$ 必然不发生.

(2)相等：若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 $A$ 与事件 $B$ **相等**，记作 $A=B$.

(3)并(和)：事件 $A$ 与 $B$ 中至少有一个发生所构成的事件为 $A$ 与 $B$ 的**并(和)事件**，记作 $A\cup B$（或 $A+B$）.

由事件并的定义，立即得到：对任一事件 $A$，有 $A\cup\Omega=\Omega$；$A\cup\varnothing=A$.

类似地，

$A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中“至少有一个事件发生”这一事件；

$A=\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}A_i$ 表示“可列无穷多个事件 $A_i$ 中至少有一个事件发生”这一事件.

(4)交(积)：事件 $A$ 与 $B$ 同时发生所构成的事件为 $A$ 与 $B$ 的**交(积)**事件，记作 $AB$ 或 $A\cap B$，$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$.

由事件交的定义，立即得到：对任一事件 $A$，有 $A\cap\Omega=A$；$A\cap\varnothing=\varnothing$.

类似地，

$B=\bigcap\limits_{i=1}^{n}B_i$ 表示“$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 这 $n$ 个事件同时发生”这一事件；

$C=\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty}B_i$ 表示 $B_1,B_2,\cdots,B_n,\cdots$ 这“可列无穷多个事件同时发生”这一事件.

(5)差：事件 $A$ 发生而 $B$ 不发生所构成的事件为 $A$ 与 $B$ 的**差事件**，记作 $A-B$.

由事件差的定义，立即得到：对任一事件 $A$，有 $A-A=\varnothing$；$A-\varnothing=A$；$A-\Omega=\varnothing$.

(6)互斥：若事件 $A$ 与 $B$ 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 $A$ 与 $B$ 是**互斥事件**或**互不相容事件**.

由定义，基本事件是两两互不相容的.

需要注意的是，如果 $A$ 与 $B$ 互不相容，并不是说 $A$ 与 $B$ 没有关系，而是有非常密切的关系，因为其中一个事件的发生会限制另一个事件的发生.

(7)对立(逆)：若事件 $A$ 与 $B$ 在一次试验中有且只有一个发生，即 $A\cup B=\Omega$，$A$

$\cap B=\varnothing$,则称事件 $A$ 与 $B$ 为**对立事件**或**互逆事件**,记作 $B=\overline{A}$.

由定义,显然有 $A\overline{A}=\varnothing$;$A\cup\overline{A}=\Omega$;$\overline{A}=\Omega-A$.

需要指出的是,对立事件必为互不相容事件,反之,互不相容事件未必为对立事件. 互斥的概念适用于多个事件,但是对立概念只适用于两个事件.

(8)完备事件组:设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是有限或可列无穷多个事件,若其满足:

①$A_i\cap A_j=\varnothing,i\neq j,i,j=1,2,\cdots$;

② $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}A_i=\Omega$.

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是一个**完备事件组**,或称 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是样本空间 $\Omega$ 的一个**有效划分**.

显然 $A$ 与 $\overline{A}$ 构成一个完备事件组.

以上事件之间的关系与运算可以用韦恩图(venn)图来直观地描述. 若用平面上一个矩形表示样本空间 $\Omega$,矩形内的点表示样本点,图 $A$ 与图 $B$ 分别表示事件 $A$ 与事件 $B$,则 $A$ 与 $B$ 的各种关系及运算如下列各图所示(见图 1.1~图 1.6).

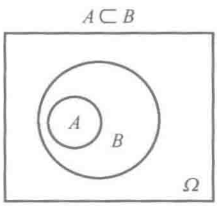


图 1.1

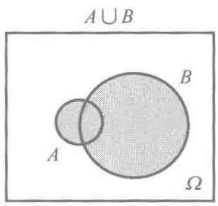


图 1.2

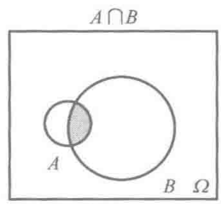


图 1.3

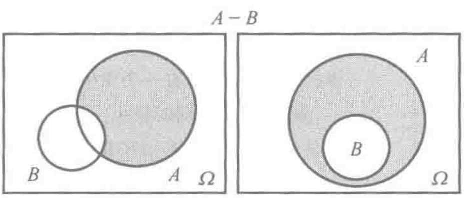


图 1.4

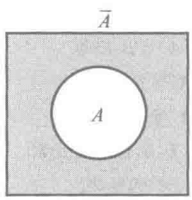


图 1.5

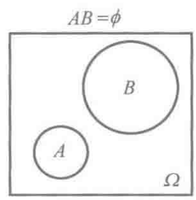


图 1.6

可以验证一般事件的运算满足如下关系:

(1)吸收律:若 $A\subset B$,则 $A\cup B=B$,　$A\cap B=A$;

(2)交换律:$A\cup B=B\cup A$,　$A\cap B=B\cap A$;

(3)结合律:$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,　$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

(4)分配律:$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

分配律可以推广到有穷或可列无穷的情形,即

$$A\cap(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\bigcup_{i=1}^{n}(A\cap A_i),\qquad A\cup(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)=\bigcap_{i=1}^{n}(A\cup A_i),$$

$$A\cap(\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i)=\bigcup_{i=1}^{+\infty}(A\cap A_i),\qquad A\cup(\bigcap_{i=1}^{+\infty}A_i)=\bigcap_{i=1}^{+\infty}(A\cup A_i);$$

(5)差化律：$A-B=A\overline{B}=A-AB$，　$A\cup B=A\cup(B-A)$；

(6)自反律：$\overline{\overline{A}}=A$；

(7)对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

对偶律也称**德·摩根律**，可以推广到有穷或可列无穷的情形，即

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i};$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{+\infty}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{+\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{+\infty}\overline{A_i}.$$

表 1.1 给出了随机事件与集合论的术语比较：

**表 1.1**

| 符号 | 集合论解释 | 概率论解释 |
|---|---|---|
| $\Omega$ | 全集 | 必然事件，样本空间 |
| $\varnothing$ | 空集 | 不可能事件 |
| $\omega$ | 元素 | 基本事件 |
| $A$ | $\Omega$ 的子集 | 事件 $A$ |
| $\omega\in A$ | $\omega$ 是 $A$ 中的元素 | 事件 $A$ 发生 |
| $\omega\notin A$ | $\omega$ 不是 $A$ 中的元素 | 事件 $A$ 不发生 |
| $A\subset B$ | $A$ 是 $B$ 的子集 | 事件 $A$ 发生必然导致 $B$ 发生 |
| $A=B$ | $A$ 与 $B$ 相等 | 事件 $A$ 与 $B$ 相等 |
| $A\cup B$ | $A$ 与 $B$ 的并集 | 事件 $A$ 与 $B$ 至少有一个发生 |
| $AB$ | $A$ 与 $B$ 的交集 | 事件 $A$ 与 $B$ 同时发生 |
| $AB=\varnothing$ | $A$ 与 $B$ 没有公共元素 | 事件 $A$ 与 $B$ 是互不相容事件 |
| $\overline{A}$ | $A$ 的补集 | 事件 $A$ 的对立事件 |
| $A-B$ | $A$ 与 $B$ 的差集 | 事件 $A$ 发生而 $B$ 不发生 |

**例 1.2**　在数学系的学生中任选一名学生，若事件 $A$ 表示被选学生是男生，事件 $B$ 表示该生是三年级学生，事件 $C$ 表示该生是运动员.

(1)叙述 $AB\overline{C}$的意义.

(2)在什么条件下 $ABC=C$ 成立？

(3)在什么条件下 $\overline{A}\subset B$ 成立？

(4)在什么条件下 $C\subset B$？

**解**　(1)该生是三年级男生但不是运动员.

(2)全系运动员都是三年级男生.

(3)全系女生都在三年级.

(4)全系运动员都是三年级学生.

## §1.2　古典概型和几何概型

在概率论的发展中,人们曾针对不同的问题从不同的角度对概率给出了不同的定义和计算方法.

### 1.2.1　古典概型

我们称满足如下条件的随机试验的数学模型为**古典概型**:

(1)有限性:样本空间的元素(即基本事件)只有有限个.

(2)等可能性:每次试验中每个基本事件出现的可能性相等.

例如,袋中装有大小相同的 4 个白球和 2 个黑球,分别标有号码 1,2,3,4,5,6,从中任取一球,若根据取到球的号码建立样本空间 $\Omega_1=\{1,2,3,4,5,6\}$,显然,它是属于古典概型的;若根据取到球的颜色建立样本空间 $\Omega_2=\{黑,白\}$,则它不是古典概型问题.

古典概型是概率论发展过程中最早被研究而且在实际应用中也是最常用的概率模型. 在概率论发展的初期,它是主要的研究对象.

设随机试验 $E$ 是古典概型,其样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$,$A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_k}\}\subset\Omega$,定义 $A$ 的概率为 $P(A)=\dfrac{k}{n}$. 如此定义的概率称为**古典概率**,这种定义概率的方法称为概率的古典定义.

由古典概率的定义,不难知道 $P(A)=1-P(\overline{A})$.

一般地,可利用排列、组合及加法、乘法原理的知识计算 $k$ 和 $n$,进而求得相应的概率.

**例 1.3**　将一枚硬币抛掷 3 次,求:

(1)恰有一次出现正面的概率;

(2)至少一次出现正面的概率.

**解**　将一枚硬币抛掷 3 次的样本空间为

$$\Omega=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\},$$

其中 $H$ 表示“正面向上”,$T$ 表示“正面向下”. $\Omega$ 中包含有限个元素,且由对称性知每个基本事件发生的可能性相同.

(1)设 $A$ 表示“恰有一次出现正面”,则

$$A=\{HTT, THT, TTH\},$$

故
$$P(A)=\frac{3}{8}.$$

(2)设 $B$ 表示“至少有一次出现正面”,由 $\overline{B}=\{TTT\}$,得

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}.$$

当样本空间的元素较多时,我们一般不再将 $\Omega$ 中的元素一一列出,而只需要分别求出 $\Omega$ 中与 $A$ 中所包含的元素的个数(即基本事件的个数),而不需知道是什么样本点.

**例 1.4** 设有 $n$ 个人,每个人都等可能地被分配到 $N$ 个房间的任意一间去住($n\leqslant N$),每个房间可住 $n$ 个人,求下列事件的概率:

(1)指定的 $n$ 个房间各住 1 人;

(2)恰好有 $n$ 个房间各住 1 人.

**解** 因为每一个人有 $N$ 个房间可供选择,所以 $n$ 个人住在 $N$ 个房间的方法共有 $N^n$ 种,它们是等可能的.

(1)指定的 $n$ 个房间各住 1 人,其可能总数为 $n!$,于是,所求概率为 $P_1=\dfrac{n!}{N^n}$.

(2)第一步,从 $N$ 个房间中选定 $n$ 个,其选法种数有 $C_N^n$ 种;第二步,对每一选定的 $n$ 个房间有 $n!$ 种分配方式,由分步相乘计数原理,恰好有 $n$ 个房间各住 1 人的基本事件总数为 $C_N^n n!$,故所求概率为 $P_2=\dfrac{C_N^n n!}{N^n}$.

这个例子常称为“分房问题”.

**例 1.5** 一个袋中装有 $N$ 个球,其中 $M$ 个是黑球,其余是白球,从袋中任取 $n$ 个球,求取到 $k(\leqslant\min(n,M))$个黑球的概率.

**解** 从 $N$ 个球中取 $n$ 个,其所有可能的取法为 $C_N^n$.

设 $A$ 表示“取到 $k$ 个黑球”这一事件,则 $A$ 中的基本事件数为 $C_M^k C_{N-M}^{n-k}$,所以

$$P(A)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}.$$

摸球模型是概率论与数理统计中常用的模型,许多实际问题都可用它来描述. 比如,欲求“抽查 $n$ 个产品,查到 $k$ 个次品的概率”,只需将上例中把黑球理解为次品,白球理解为合格品就可转化为摸球模型.

**例 1.6** 有 10 件产品,其中 5 件是次品. 从中任取 3 件,求其中有次品的概率.

**解** 设 $A$ 表示事件“取出的 3 件产品中有次品”,则 $\overline{A}$ 表示事件“取出的 3 件产品中没有次品”,且 $P(\overline{A})=\dfrac{C_5^0 C_5^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{12}$.

故所求的概率为

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}.$$

**例 1.7** 袋中有 $a$ 只白球，$b$ 只红球，$k$ 个人依次在袋中取 1 只球，分别：

(1)做放回抽样；　　　　(2)做不放回抽样.

求第 $i(i=1,2,\cdots,k)$个人取到白球的概率.

**解** 记 $B_i$ 表示“第 $i$ 个人取到白球”$(i=1,2,\cdots,k)$.

(1)放回抽样的情况下，显然有

$$P(B_i)=\frac{a}{a+b}\quad(i=1,2,\cdots,k).$$

(2)不放回抽样的情况下，将 $a+b$ 个球编号，并把它们全部取出依次排在一直线的 $a+b$ 个位置上，共有$(a+b)!$ 种方法，第 $i$ 个位置上放白球共有 $a(a+b-1)!$ 种方法，从而所求的概率为

$$P(B_i)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}\quad(i=1,2,\cdots,k).$$

我们发现：$P(B_i)$与 $i$ 无关，即与取球的顺序无关，这可以帮助我们理解自古以来抽签被认为是最公平的方法的原因.

由定义，不难知道古典概率有如下性质：

(1)设 $A$ 为任一事件，则 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2)对必然事件 $\Omega$，有 $P(\Omega)=1$；

(3)设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容，则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$.

### 1.2.2 几何概型

上述古典概率的计算，只适用于具有等可能性的有限样本空间，但现实当中有一类样本点总数为无限的等可能概型，显然不适合古典概型，但其处理方法与古典概型有相似之处，通常称其为**几何概型**.

我们称满足如下条件的随机试验的数学模型为几何概型：

(1)样本空间 $\Omega$ 是一个几何区域(如直线上的一线段、平面上的一区域或空间中的立体)，这个区域大小可以度量(如长度、面积、体积等)，并把 $\Omega$ 的度量记作 $m(\Omega)$.

(2)向区域 $\Omega$ 内任意投掷一个点，落在区域 $\Omega$ 内任一个点处都是“等可能的”，即设落在 $\Omega$ 中的区域 $A$ 内的可能性与 $A$ 的度量 $m(A)$成正比，与 $A$ 的位置和形状无关.

设随机试验 $E$ 为几何概型，样本空间为 $\Omega$，$A\subset\Omega$，同时用 $A$ 表示“掷点落在区域