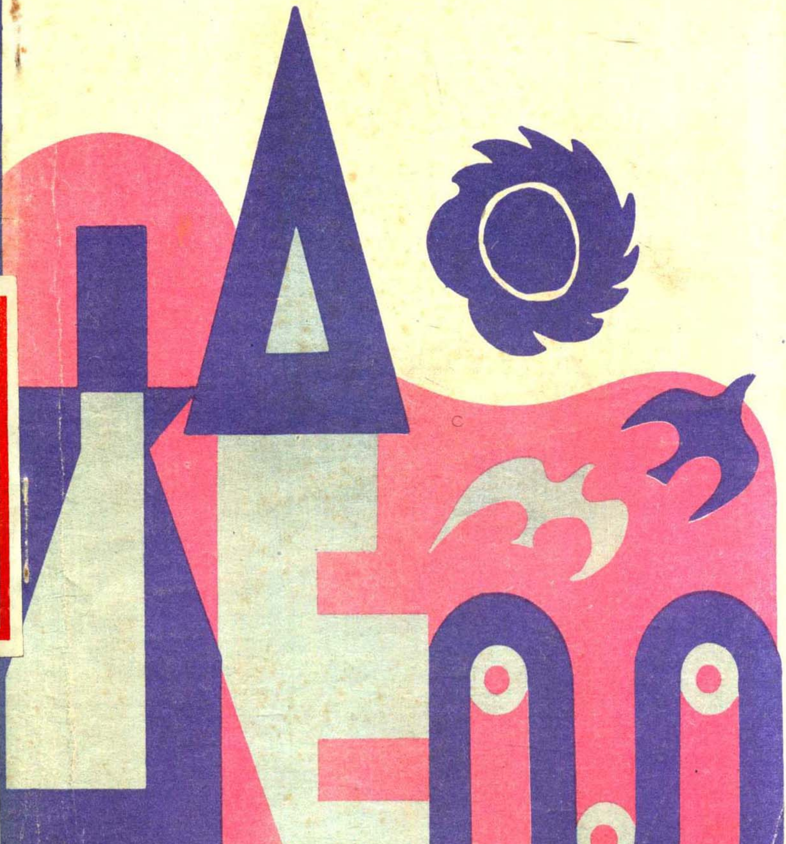
最新（二年级）

初中数学 方法·思维·训练

主编 冯士腾



光明日报出版社

学习方法·思维·训练

最新初中数学
方法·思维·训练

（二年级）

主编 冯士腾

编著 刘增佑 乔荣凝

刘长荣 张梦驹

光明日报出版社

（京）新登字101号

最新初中数学

方法·思维·训练

（二年级）

主编　冯士腾

编著　刘增佑　乔荣凝

刘长荣　张梦驹

☆

光明日报出版社出版发行

（北京永安路106号）

邮政编码：100050

电话：3017733-225

新华书店北京发行所经销

北京建外印刷厂印刷

*

787×1092　1/32　印张7.625　字数160千字

1992年4月第1版　1992年4月第一次印刷

印数：1—23200册

ISBN 7-80091-259-0/G·523

定　价：3.55元

学习方法·思维·训练丛书

主　编　余辛里
副主编　高　川
程　迟
张世鸿

前 言

《学习方法·思维·训练丛书》为中学各年级学生课外系列读物，旨在帮助学生理解教材重点、难点，掌握优良学习方法，提高思维、解题、分析、表达能力，开扩思路，将所学知识灵活运用于实际。

《丛书》各分册基本内容包括：重点难点解析、学习方法提示、典型例题精解、知识反馈和思维训练，并配有基础与疑难兼顾、典型与实用兼顾、一般与提高兼顾的适量的课外思考练习。各分册结合本学科特点和学生程度还会有独特的设计。

《丛书》的编者均系具有丰富教学经验和著述的特级或高级教师。他们遵循严格的科学性，严密的逻辑性，鲜明的典型性、启发性和实用性原则，在广泛参阅和认真钻研有关资料的基础上，集思广益，密切配合，协力编出了这套丛书。这里融进了撰稿人自己多年教学教改的心得，也汲取了本单位、本地区以及外省市中学教学研究的成界。

如何拓宽中学生的知识视野，帮助他们掌握正确的学习方法，有效地提高各种能力，是广大教育工作者和家长们十分关心的问题。本丛书的编撰同仁有志于在这方面作些探索。现在奉献给中学青少年朋友的这套丛书，是一个初步的尝试，疏漏不妥之处还望老师和同学们提出宝贵意见。

编　者

1991年9月

目　录

代数部分

几何部分

代数部分

第九章　数的开方

一、重点、难点分析

（一）重点：本章的重点是平方根、算术平方根的概念以及查表求平方根和立方根。

（二）难点：本章的难点是对算术平方根概念和实数概念的理解，及算术平方根的应用。

（三）重点、难点知识分析：

1．平方根的概念是本章的重点内容之一．首先我们应深刻地理解平方根的定义．它的定义是："如果$x^2=a$，那么x就叫做a的平方根。"这既是平方根的定义又同时给出了求平方根的推理过程。平方根概念的出现并非偶然，这是人类生产实践的需要，也是数学运算发展的必然产物．就象减法是由已知两数之和和其中一个加数来求另一加数的运算，除法是由已知两数之积及其中一个因数，求另一个因数的运算一样，我们也必须掌握"由已知一个数的二次幂，求这个数的运算"．这就是求一个数的平方根的运算，也就是开平方运算．当然这种运算的实际意义也是很明显的．如：已知正方形的面积，求正方形的一边长．

在开平方运算中我们要特别注意：一个正数的平方根有两个，它们互为相反数；零的平方根是零；负数没有平方根．

另外，一个数a（$a\geqslant 0$）的平方根的一般表示法要掌握好．我们知道，只有完全平方数的平方根可以直接写出，而

更大量的是非完全平方数，它们的平方根无法准确地求出，所以必须用恰当的形式来表示。我们用$\pm\sqrt{a}$来表示a的平方根。如：5的平方根是$\pm\sqrt{5}$，36的平方根是$\pm\sqrt{36}=\pm6$．有的同学错误地认为36的平方根是$\sqrt{36}=\pm6$，这对平方根的一般表示法有误解，须知$\sqrt{36}$只是表达了36的其中一个平方根．

2．算术平方根的概念在本章中既是重点，又是难点．

算术平方根的定义是："正数a的正的平方根叫做a的算术平方根；零的算术平方根是零。"所以我们应该明确：算术平方根是正数或零。这自然得出"算术平方根是非负数．"的结论。一个正数a的算术平方根用$\sqrt{a}$表示。那么看到$\sqrt{a}$就应马上意识到：$a\geqslant0$，$\sqrt{a}\geqslant0$．

由上面的分析我们可以总结出算术平方根与平方根概念的联系与区别：求算术平方根与求平方根都要求被开方数是非负数。但一个非负数的平方根是两个互为相反的数，而两个非负数的算术平方根是一个正数（或零）．

根据算术平方根的定义还可以得到：

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & a\geqslant0\\-a & a<0\end{cases}$$

这在化简算术平方根时经常用到．

我们之所以要规定算术平方根，是因为只要研究了算术平方根的性质，平方根的性质也就完全清楚了。这为后面二次根式的运算奠定了基础。事实上二次根式的运算可以看作是算术平方根的运算．

关于算术平方根的化简问题，我们必须注意到由于算术平方根是非负数，所以它常转化为绝对值问题加以解决．

3．查平方根表和立方根表也是本章的重点内容之一．

有些同学很不重视查表，在查表求平方根时敷衍了事，不求甚解。实际上，利用查表来求平方根是求一般数的平方根的基本方法。

查表求平方根最主要的问题是弄清小数点的移动规律。当被开方数在表上不能直接查到时，就要通过移动小数点位置来使被开方数由不可查变为可查。当被开方数需要移动一段（两位）时，平方根的小数点相应地移动一位。至于立方根表的查法，基本上与平方根表的查法一致。但需注意，在表中只能查出有三位有效数字的数的立方根。再有就是小数点的移动规律也与查平方根表不同。

4. 实数概念是本章的一个难点。需要弄清几个概念。

（1）有理数都可以表示成$\frac{m}{n}$（m、n是整数$n \neq 0$）的形式；反之能表示成上述形式的数也一定是有理数。

（2）无限不循环小数不能化为$\frac{m}{n}$的形式，我们称它为无理数。如：$0.1010010001\cdots\cdots$，π，$\sqrt{2}$等。有理数、无理数统称实数。

（3）数的范围扩充到实数后，过去学过的相反数、绝对值、倒数等概念在实数范围内仍然适用。

二、典型例题选解

例1. 求下列各式的平方根：

（1）$2x+1$；　　　（2）a^2-6a+9。

分析：根据平方根的概念，要求平方根的数必须是非负数。所以当一个代数式不能确定是否非负，就应先确定其为非负数的条件，再去求平方根。另外还须注意平方根是两个

互为相反的数。

解：

（1）当 $2x+1<0$，即 $x<-\frac{1}{2}$ 时 $2x+1$ 没有平方根。当 $2x+1\geqslant 0$，即 $x\geqslant -\frac{1}{2}$ 时，$2x+1$ 的平方根是 $\pm\sqrt{2x+1}$。

（2）a^2-6a+9 的平方根是：

$\pm\sqrt{(a-3)^2}=\pm(a-3)$。

小结：在求一个数的平方根之前首先要保证这个数是非负数，如无法确定，则要指出其非负的条件。另外一个非负数的平方根要用互为相反数的形式表示。

例 2．求：$(x^2-5x-6)^2-2(x^2-5x)+13$ 的算术平方根。

分析：根据算术平方根的概念，在求一个代数式的算术平方根时要注意两点：①要保证被开方数是非负的。②要保证算术平方根的表达式是非负的。如果无法确定平方根表达式的正负就要分类研究。

解：

$$\begin{aligned}&\sqrt{(x^2-5x-6)^2-2(x^2-5x)+13}\\&=\sqrt{(x^2-5x-6)^2-2(x^2-5x-6)+1}\\&=\sqrt{[(x^2-5x-6)-1]^2}\\&=\sqrt{(x^2-5x-7)^2}\\&=|x^2-5x-7|\end{aligned}$$

当 $x^2-5x-7\geqslant 0$ 即：$x\leqslant\frac{5-\sqrt{13}}{2}$ 或 $x\geqslant\frac{5-\sqrt{13}}{2}$ 时，所求的算术平方根是：x^2-5x-7；

当 $x^2-5x-7\leqslant 0$ 即：$\frac{5-\sqrt{13}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{5+\sqrt{13}}{2}$ 时，所求的算术平方根是：$-x^2+5x+7$。

小结：象上面这种求一个完全平方式的算术平方根时，被开方数的非负性已被保证，只需注意使被开出的代数式是非负的。这时可以利用：$\sqrt{a^2}=|a|$的结论，把算术平方根用绝对值的形式表达出来，再去分类研究。

例3．化简：$\sqrt{a^2-10a+25}+\sqrt{a^2+2a+1}$

分析：这个问题与例2有类似之处，即被开方式是完全平方式。但分类的方法却要复杂些。因为在这个式子中有两个算术平方根，这就必须保证所取的两个算术平方根的表达式同时都是非负数。这就要求分类时考虑得更细致些。

解：原式 $=\sqrt{(a-5)^2}+\sqrt{(a+1)^2}$

$$=|a-5|+|a+1|$$

当 $a<-1$ 时：

$$\text{原式}=-(a-5)-(a+1)$$

$$=-2a+4;$$

当 $-1\leqslant a\leqslant 5$ 时：

$$\text{原式}=-(a-5)+(a+1)$$

$$=6;$$

当 $a>5$ 时；

$$\text{原式}=(a-5)+(a+1)$$

$$=2a-4;$$

小结：在一个式子中有两个以上的算术平方根时，需要分类研究化简结果，在每一类中要求化简后的算术平方根的表达式都是非负的。而各类的"分界点"，都选在某一个算术平方根等于零时变量所取的值。

例4．化简：

$$\sqrt{4a-12}\cdot\frac{\sqrt{25-20a+4a^2}}{\sqrt{a-3}}.$$

分析：这道题主要考察对算术平方根的概念是否清楚，应用是否灵活．题目中有三个算术平方根：$\sqrt{4a-12}$，$\sqrt{a-3}$，$\sqrt{25-20a+4a^2}$，首先要求它们的被开方数都是非负数（其中 $a-3$ 还必须是正数）．以此确定 a 的取值范围．其次，如果某个算术平方根可以化简的话，还必须保证化简后的表达式是非负的．如果不注意上述两点，很可能按如下的步骤得出错误的结论：

$$原式 = 2\sqrt{a-3}\cdot\frac{\sqrt{(5-2a)^2}}{\sqrt{a-3}}$$

$$= 2(5-2a) = 10-4a。$$

这样做之所以会得出错误的结果，就是因为没有注意从被开方数的非负性来确定 a 的取值范围．从而在化简算术平方根$\sqrt{(5-2a)^2}$时，没能保证其非负性．正确的做法是：

解：由原题可得 $a>3$；

$$\therefore 原式 = 2\sqrt{a-3}\cdot\frac{\sqrt{(5-2a)^2}}{\sqrt{a-3}}$$

$$= 2|5-2a|$$

$$= 2(2a-5)$$

$$= 4a-10$$

小结：这个例子说明：有些算术平方根的化简题，从所给的原式中可以找出隐含的条件，这需要我们根据算术平方根的概念去挖掘这些隐含条件，作为进一步化简的根据．然而更重要的是牢牢掌握住解算术平方根问题的基本思想方法——要保证被开方数非负，要保证化简后的算术平方根的表达式非负．

例5．已知：

$$y=\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}}{x}+x$$

求：xy的值

分析：这道题看上去似乎挺难下手，但实际上在所给式子中隐含着重要的条件。这还是用算术平方根的概念来发掘稳含条件的。

解：由原式知：

$$\begin{cases}x-1\geqslant 0\\1-x\geqslant 0\end{cases}，即\begin{cases}x\geqslant 1\\x\leqslant 1\end{cases}.$$

$\therefore x=1$，可推出$y=1$

$\therefore xy=1$.

小结：如果在一个代数式中，出现两个被开方数互为相反数的算术根，那么可以断言：这两个算术根都为零.

例6．已知：

$\sqrt{a}=2.323$；　　$\sqrt{b}=232.3$

求：a与b的关系。

分析：这个问题主要是考察开平方时，被开方数与平方根之间小数点移动的规律．即：被开方数的小数点每移动两位，平方根的小数点就相应移动一位．

解：a与b的关系是：

$a\times 10^4=b$

小结：为了使平方根表可以解决求任意正实数的平方根问题．必须掌握被开方数与平方根之间的小数点移动规律．然而在一些测验中又不便使用平方根表，所以像上面这样的出题方式可以间接考察查表求平方根的方法．

例7．证明实数$\sqrt{3}$是无理数．