初中数学教学指导

数学

（初二分册）

主编　黄秀珠

配合教材
同步练习
导自学
型丰富

苏州大学出版社

初中数学教学指导

（初二分册）

主　编　黄秀珠

苏 州 大 学 出 版 社

初中数学教学指导 （初二分册）

主编　黄秀珠

苏州大学出版社出版发行
江苏省新华书店经销
宜兴市第二印刷厂印装
地址：宜兴市漕桥镇　邮编：214217

开本 787×1092　1/16　印张 14　字数 331 千
1996 年 12 月第 1 版　1997 年 3 月第 1 次印刷
印数 1-10000
ISBN 7-81037-274-2/G・117　定价：13.70 元
苏州大学出版社出版的图书若有印刷装订错误可向承印厂调换

前　言

《初中数学教学指导》是以九年义务教育全日制初级中学数学教学大纲为依据，以人民教育出版社出版的初中数学教材为蓝本编写的教学指导用书。

本书注重把握重点难点、指导学习方法和拓宽知识面同时辅以典型、精要的训练题，以切实有效地提高学生的能力，发展学生智力。它既是教师教学的参考用书，又是指导学生自学的“家庭教师”。这套书讲究科学性、系统性、新颖性，既体现知识体系，又符合教师教学和学生自学的实际，是减轻学生负担，全面提高教学质量的重要探索和尝试。

本书分册编写，每个年级一册，书末均附有参考答案，供学生翻检查对。

《初中数学教学指导》(初二分册)由黄秀珠设计并统稿，参加编写的有黄秀珠、金维冬、顾义生、尹培琳、吴学军。

编　者

1996 年 6 月

目 录

代数部分

几何部分

代数部分

第八章 因式分解

8.1 提公因式法

【学习要点】

1. 本节主要内容是因式分解的概念，以及把多项式分解因式的第一个方法——提公因式法.

2. 定义 把一个多项式化为几个整式的积的形式，叫做把这个多项式因式分解，也叫做把这个多项式分解因式.

3. 提公因式法是因式分解的最基本的也是最常用的方法. 把多项式 $ma+mb+mc$ 各项的公因式 m 提到括号外面，写成 $ma+mb+mc=m(a+b+c)$，这种分解因式的方法叫做提公因式法. 例如多项式 $3x^2(y+z)-6x(y+z)^2+21x(y+z)$ 各项的公因式是 $3x(y+z)$，分解因式后的形式为：

$$3x^2(y+z)-6x(y+z)^2+21x(y+z)=3x(y+z)(x-2y-2z+7)$$

4. 通过本节学习要了解因式分解的意义，及其与整式乘法的区别和联系，并会用提公因式法分解因式.

【学习指导】

1. 本节的难点在于正确理解因式分解的意义，能够区分因式分解与乘法运算的不同，因式分解的结果是几个整式的乘积形式，而乘法运算的结果是多项式形式.

2. 本节学习的重点是提公因式法，它的运算步骤是：

(1) 找出各项的公因式，公因式中的系数是多项式各项系数的最大公约数，字母是各项中共有字母的最低次幂，并写成积的形式；

(2) 用公因式去除这个多项式的各项，所得的商式，(它所含的项数与原多项式的项数一样多)，经过合并与化简，得到一个新的多项式；

(3) 把原多项式写成公因式与新的多项式的乘积.

3. 在运用提公因式法分解时要注意：

(1) 提出公因式后得到的新的多项式中，如果仍然有公因式，还要继续提取，直到每一个因式不能再分解为止，如多项式 $a^2(3x-y)+4a^2(x+2y)=a^2[3x-y+4(x+2y)]=a^2(7x+7y)=7a^2(x+y)$ 当第一次提出公因式 a^2 后，得到的新多项式 $7x+7y$ 又有公因式 7，故分解因式的最后结果应是 $7a^2(x+y)$；

(2) 在多项式的各项中，如果有仅仅符号不同的多项式的项可通过提出负号使之相同. 如多项式 $(y-3x)^3+(3x-y)^5$ 可以写成 $(y-3x)^3-(y-3x)^5$ 公因式是 $(y-3x)^3$.

4. 利用提公因式法分解因式，可以简化计算，如计算 $1.24\times3.28+1.24\times5.71+1.24\times2.01$，用提公因式法提出公因数 1.24 后可以得到：$1.24(3.28+5.71+2.01)=1.24\times11=13.64$.

【例题解析】

例 1 把$-14x^3y^2z+8x^2yz-2xy$分解因式，其结果应是 ( )

(A) $-2xyz(7x^2y-4x+1)$ (B) $-2xy(7x^2yz-4xz)$

(C) $2xy(-7x^2yz+4xz+1)$ (D) $-2xy(7x^2yz-4xz+1)$

解 ∵公因式是$-2xy$，故(A)错，(B)括号内多项式应当是三项，(C)括号内最后一项应为-1，应选(D).

注 如果多项式中某一项就是公因式，那么在提公因式时，括号内的多项式不能遗漏$+1$或-1.

例 2 把$(x-2y)^2(5x+3y)-2(2y-x)^2(5x-y)$分解因式.

解 $(x-2y)^2(5x+3y)-2(2y-x)^2(5x-y)=(x-2y)^2(5x+3y)-2(x-2y)^2(5x-y)=(x-2y)^2[(5x+3y)-2(5x-y)]=(x-2y)^2(5y-5x)=5(x-2y)^2(y-x)$

注 ∵$(x-2y)^2=(2y-x)^2$的指数为偶数，∴$(x-2y)^2=(2y-x)^2$，公因式应为$(x-2y)^2$. 又因$5y-5x$有公因数5，必须继续进行分解.

例 3 把$(x^2+3x)^2+(2x+6)^2-(x+3)^3$分解因式.

解 $(x^2+3x)^2+(2x+6)^2-(x+3)^3=[x(x+3)]^2+4(x+3)^2-(x+3)^3=(x+3)^2(x^2+4-x-3)=(x+3)^2(x^2-x+1)$

注 从表面上看，多项式各项之间没有公因式，但仔细观察后发现各项都隐含着因式$(x+3)^2$，故先需将各项进行整理后，再提取公因式.

例 4 把$6(2x-3y)^2-4y(3y-2x)$因式分解后，再求当$x=\frac{1}{2}$，$y=-\frac{4}{7}$时的值.

解 $6(2x-3y)^2-4y(3y-2x)=6(2x-3y)^2+4y(2x-3y)=2(2x-3y)[3(2x-3y)+2y]=2(2x-3y)(6x-7y)$

当$x=\frac{1}{2}$，$y=-\frac{4}{7}$时

$2(2x-3y)(6x-7y)=2(1+\frac{12}{7})(3+4)=38$

∴ 当$x=\frac{1}{2}$，$y=-\frac{4}{7}$时，多项式的值为38.

注 从本题的计算结果看出，分解因式后再求值较简便.

例 5 利用因式分解计算：

$2.157\times3.14-0.231\times3.14-1.055\times3.14-0.871\times3.14$

解 $2.157\times3.14-0.231\times3.14-1.055\times3.14-0.871\times3.14$

$=3.14(2.157-0.231-1.055-0.871)=3.14\times0=0.$

例 6 把$-\frac{1}{2}x^{2m-1}+\frac{1}{4}x^{m+1}-\frac{1}{8}x^{m-1}(m\geqslant2)$分解因式.

分析 ∵$m\geqslant2$，∴$2m-1\geqslant m+1>m-1$各项中x的最低次幂是$m-1$，故公因式为x^{m-1}

解 $-\frac{1}{2}x^{2m-1}+\frac{1}{4}x^{m+1}-\frac{1}{8}x^{m-1}$

$=x^{m-1}(-\frac{1}{2}x^m+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8})=-\frac{1}{8}x^{m-1}(4x^m-2x^2+1)$

注 1. 当多项式首项系数是负值时，常提出负号放在括号外面.

2. 括号内多项式的各项分数系数常化为整系数.

【练习与思考】

(A 组)

1. 判断下列各式从左到右的变形,是否是因式分解:

(1) $2m^2-4m=2m(m-2)$ ( )　　(2) $3x^2-2x-1=x(3x-2)-1$ ( )

(3) $2(b+c)(b-c)+2=2(b^2-c^2+1)$ ( )

(4) $-3a(a^2+a-1)=-3a^3-3a^2+3a$ ( )

(5) $x^2-2x+1=(x-1)^2$ ( )

2. 选择题:

(1) 多项式 $4x^3y^2-10y^3z^2+6x^2yz^2$ 各项的公因式是 ( )

(A) x^2yz^2　(B) $2x^2yz^2$　(C) $2y$　(D) $x^3y^3z^2$

(2) 多项式 $3a^2y-6ay^2-3y$ 分解因式的结果是 ( )

(A) $3y(a^2-2ay)$　(B) $3y(a^2-2ay-1)$

(C) $3(a^2y-2ay^2-y)$　(D) $3ay(a-2y-1)$

(3) 多项式 $-13(a-b)^3x^2+39(b-a)x^3$ 分解因式的结果是 ( )

(A) $-13(a-b)x^2[(a-b)^2-3x]=-13(a-b)x^2(a^2-2ab+b^2-3x)$

(B) $-13(b-a)x^2[(a-b)^2-3x]=-13(b-a)x^2(a^2-2ab+b^2-3x)$

(C) $-13(a-b)x^2[(a-b)^2+3x]=-13(a-b)x^2(a^2-2ab+b^2+3x)$

(D) $-13(b-a)x^2[(a-b)^2+3x]=-13(b-a)x^2(a^2-2ab+b^2+3x)$

(4) 多项式 $(7x-2y)^2(7x+3y)-2(2y-7x)^2(7x-2y)$分解因式的结果是 ( )

(A) $(7x-2y)^2(21x-y)$　(B) $7(7x-2y)^2(3x+y)$

(C) $(7x-2y)^2(-y-7x)$　(D) $7(7x-2y)^2(y-x)$

3. 在以下各题的括号内,填上适当的式子,使等式成立.

(1) $m(a+1)-(a+1)^2=(a+1)(\quad)$

(2) $p(m+2n)-(\quad)=(m+2n)(p-q)$

(3) $3(2a+b)(a-b)+(2a+b)(\quad)=(2a+b)(4a+b)$

(4) $(x-y)(\quad)-(3x-y)(x-y)=-2x(x-y)$

4. 把下列各式分解因式:

(1) $9x(x-2y)-6y(2y-x)-(3x-6y)$

(2) $(4x+3y)(7y-2x)+(x-6y)(2x-7y)$

(3) $-\frac{1}{2}x^3y+\frac{1}{4}x^2y^2-\frac{1}{8}x^3y^3$

(4) $2x^m+x^{m-1}$ $(m\geqslant 2)$

5. 利用提公因式法计算:

(1) 999^2+999　(2) $31.72\times 4.5+0.29\times 4.5-8.28\times 4.5-13.73\times 4.5$

6. 以下各式先分解因式,再求值:

(1) $(3x-4y)(4x-5y)-2(4y-3x)(7x-2y)$　　$x=\frac{1}{2}, y=3$

(2) $(7a+b)(5a-2b)+b(2b-5a)$　　$a=\frac{4}{5}, b=-\frac{1}{2}$

(B组)

1. 把下列各式分解因式：

(1) $-2x(x-y)+3y(y-x)+(4x+7y)(x-y)$

(2) $-2m^2(a-3b)+4mn(a-3b)-2mn^2(9b-3a)$

(3) $(m+3n)(2m-5n)-(\frac{1}{3}m+n)(n-m)$

(4) $(\frac{x}{2}-\frac{y}{3})(7x-8y)+(2y-3x)(\frac{1}{6}x-\frac{2}{3}y)$

2. 利用提公因式法计算：

(1) $0.999^2+0.999\times0.001$

(2) $3.279\times1.25-1.585\times1.25+0.238\times1.25-0.021\times1.25+0.089\times1.25$

(3) $1.375\times\frac{1}{4}+1.375\times0.25+1.375\times0.125+1.375\times0.375$

3. 以下各式先分解因式，再求值.

(1) $(4x-3)^2-8x(3-4x)$ $\quad x=\frac{1}{4}$

(2) $(3a-2b)(a+b)+(6b-9a)(2a-b)$ $\quad a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{3}$

(3) $8x(2x-y)^2-5(2x-y)^3$ $\quad x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{3}$

4. 把$-\frac{1}{3}(4x-5y)^{m+1}+\frac{1}{6}x(4x-5y)^m-\frac{1}{9}(4x-5y)^{m-1}$ $(m\geqslant2)$分解因式.

8.2 运用公式法

【学习要点】

1. 本节学习的主内容是逆向运用乘法公式把简单的多项式分解因式，这种分解因式的方法叫做公式法.

2. 因式分解运用的公式有：

(1) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$；　(2) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$；

(3) $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$；　(4) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$；

(5) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

这些公式的名称与原来相同，只是顺序不同而已.

3. 要深刻理解各个公式的特点，熟练地运用公式分解因式.

【学习指导】

1. 本节学习的重点是运用公式法分解因式，其关键是从公式的项数、次数、系数(特别是符号)等方面去掌握公式的特点，从而熟悉公式.

2. 运用公式分解因式之前，要观察所给多项式的各项有没有公因式，如有，则需先提取公因式后再考虑运用公式；如果得到的新多项式有三项，先考虑运用完全平方公式，如果是两项，再根据其次数是奇数次还是偶数次选择用平方差公式还是用立方和(或立方差)公式.

3. 要正确理解公式中的字母 a,b，它可以代表数、单项式或多项式. 如 $16a^2x^2-9b^2=(4ax)^2-(3b)^2$ 可看出平方差公式中的 a 是代表 $4ax$，b 是代表 $3b$. 又如 $\frac{1}{2}a^3-4b^3$ 就不能直

接运用立方差公式，应写成$\frac{1}{2}a^3-4b^3=\frac{1}{2}(a^3-8b^3)=\frac{1}{2}[a^3-(2b)^3]$后才可运用立方差公式分解因式，也就是说，要把原多项式的各项与选用公式中的各项“对号入座”. 才能运用公式去分解因式.

【例题解析】

例 1 把以下各式写成两数的平方差形式：

(1) $-9(x-1)^2+(y-2)^2$ (2) $\frac{9}{16}(m-2n)^2-\frac{4}{25}(2m-3n)^2$

(3) $-1.44x^2+6.25y^2$ (4) $\frac{49}{121}(x-y)^2-4(3y+4x)^2$

解 (1) 原式$=(y-2)^2-[3(x-1)]^2$

(2) 原式$=[\frac{3}{4}(m-2n)]^2-[\frac{2}{5}(2m-3n)]^2$

(3) 原式$=(2.5y)^2-(1.2x)^2$

(4) 原式$=[\frac{7}{11}(x-y)]^2-[2(3y+4x)]^2$

注 需熟记 1～20 的平方数，1～10 的立方数.

例 2 以下各式分解因式，正确的是 ( )

(A) $16a^2x^2-\frac{1}{16}b^2y^2=\frac{1}{16}(16ax+by)(16ax-by)$

(B) $a^3b^4-ac^4=a(a^2b^2+c^2)(a^2b^2-c^2)$

(C) $c^4-0.25a^2=(c^2+0.05a)(c^2-0.05a)$

(D) $-\frac{1}{4}x^2+\frac{4}{9}y^2=(\frac{2}{3}y+\frac{1}{4}x)(\frac{2}{3}y-\frac{1}{4}x)$

解 (B)中在提公因式 a 后，应有 $a(a^2b^4-c^4)=a[(ab^2)^2-(c^2)^2]$，括号内第一项错误.
$\because 0.25=(0.5)^2$故(C)错，(D)中 x^2 的系数应是$(\frac{1}{2})^2$ 应选(A).

例 3 把$-4(p-q)^2+(2p+q)^2$ 分解因式.

解 原式$=(2p+q)^2-[2(p-q)]^2=[2p+q+2(p-q)][2p+q-2(p-q)]$
$=3q(4p-q)$

注 因式分解的结果，如果遇到的因式是单项式或数字，必须写在多项式因式的前面.

例 4 把 $3a(x-y)^3-12a^3(x-y)$分解因式

解 原式$=3a(x-y)[(x-y)^2-4a^2]$

$=3a(x-y)(x-y+2a)(x-y-2a)$

注 因式如能继续分解，必须继续分解，直到每一个因式不能再分解为止.

例 5 在多项式①$x^2+2xy-y^2$；②$a^4+4b^2-4a^2b$；③$x^2+x+\frac{1}{4}$；④$-x^2+2xy-y^2$；⑤$1-y+y^2$；⑥$-6(a+b)+9+(a+b)^2$ 中能运用完全平方公式分解因式的是 ( )

(A) ①②④⑥ (B) ①②③⑤ (C) ②③④⑥ (D) ③④⑤⑥

解 在给出的 6 个式子中，①⑤不是完全平方式，②③⑥是完全平方式，④在提出负号后成为完全平方式，应选(C).

例 6 多项式$-m^2n^2-6mn^2-9n^2$ 分解因式的正确结果是 ( )

(A) $-(mn+3n^2)^2$ (B) $-n^2(m+3n)^2$

(C) $-(mn-3n^2)^2$ (D) $-n^2(m-3n)^2$

解 (A)(C)没有分解完，半途而废.(D)的符号有错，应选(B).

例 7 把$\frac{75}{4}m^3n-15m^2n^2+mn^3$分解因式

解 原式$=3mn(\frac{25}{4}m^2-5mn+n^2)=3mn(\frac{5}{2}m-n)^2$

或 原式$=\frac{3}{4}mn(25m^2-20mn+4n^2)=\frac{3}{4}mn(5m-2n)^2$

注 遇到分数系数的多项式常常把它化成整系数多项式后，再进行分解因式.

例 8 把$x^m+x^{m-2}-2x^{m-1}$分解因式 $(m\geqslant 2)$

分析 $\because$ $x^m=x^{2+m-2}=x^2\cdot x^{m-2}$，$x^{m-1}=x^{1+(m-2)}=x\cdot x^{m-2}$，各项都含有$x^{m-2}$，$m-2$是最低次数.

解 原式$=x^{m-2}(x^2+1-2x)=x^{m-2}(x-1)^2$.

例 9 把$3x^4+x(3x^2-6x)+3(\frac{x}{2}-1)^2$分解因式

解 原式$=3x^4+3x^2(x-2)+3(\frac{x}{2}-1)^2=3[x^4+x^2(x-2)+(\frac{x}{2}-1)^2]$

$$=3\{(x^2)^2+2\cdot x^2\cdot\frac{1}{2}(x-2)+[\frac{1}{2}(x-2)]^2\}$$

$$=3[x^2+\frac{1}{2}(x-2)]^2=3(x^2+\frac{1}{2}x-1)^2$$

注 在提出公因数 3 后，括号中的多项式有三项，其中x^4可以看成x^2的平方，$(\frac{x}{2}-1)^2$可以看成$\frac{1}{2}(x-2)$的平方，这样，就可以明确地判定这三项是x^2与$\frac{1}{2}(x-2)$两项和的完全平方式.

例 10 多项式$x^3(x^2-y^2)+y^3(y^2-x^2)$因式分解的正确结果是 ( )

(A) $(x^2-y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2)$ (B) $(x+y)(x-y)^2(x^2-xy+y^2)$

(C) $(x+y)(x-y)^2(x^2+xy+y^2)$ (D) $(x+y)^2(x-y)(x^2-xy+y^2)$

解 原式$=x^3(x^2-y^2)-y^3(x^2-y^2)=(x^2-y^2)(x^3-y^3)$

$$=(x+y)(x-y)(x-y)(x^2+xy+y^2)=(x+y)(x-y)^2(x^2+xy+y^2)$$

应选(C)正确.

注 遇到相同因式相乘，应把它们写成幂的形式.

例 11 以下各式：①$2x^3-27y^3$；②$0.0001a^3+8b^3$；③$24m^3-3n^3$；④a^6b^3+1；⑤$\frac{1}{125}x^3-\frac{1}{8}y^3$；⑥$7a^6+56b^6$中能够运用立方和或立方差公式分解因式的是 ( )

(A) ①②④ (B) ③④⑤⑥ (C) ②④⑥ (D) ③④⑤

解 ①与②式中字母前系数 2 与 0.0001 都不是立方数，⑥不能写成立方和的形式，只有③④⑤符合条件，应选(D).

例 12 把$4a^6b^4-(a^6+b^4)^2$分解因式

解 原式$=(2a^3b^2)^2-(a^6+b^4)^2=[2a^3b^2+(a^6+b^4)][2a^3b^2-(a^6+b^4)]$

$$=(2a^3b^2+a^6+b^4)(2a^3b^2-a^6-b^4)=-(a^3+b^2)^2(a^3-b^2)^2.$$

例 13 把$27^{3m}-216b^{3n}$分解因式

分析 由幂的运算法则知 $a^{3m}=(a^m)^3$，$b^{3n}=(b^n)^3$

解 原式$=27(a^{3m}-8b^{3n})=27[(a^m)^3-(2b^n)^3]$

$=27(a^m-2b^n)[(a^m)^2+(a^m)(2b^n)+(2b^n)^2]=27(a^m-2b^n)(a^{2m}+2a^mb^n+4b^{2n})$

注　在运算过程中，正逆两方面使用幂的运算法则.

例 14　利用因式分解，计算以下各式的值

(1) 99999^2-1；　　　(2) $0.433^2-0.567^2$.

解　(1) $99999^2-1=(99999+1)(99999-1)=9999800000$；

(2) $0.433^2-0.567^2=(0.433+0.567)(0.433-0.567)=-0.134$.

【练习与思考】

(A 组)

1. 以下各式：①$3a^2-12b^6$；②$2x^2-25y^2$；③$(7x-3y)^2+1.44(2y-x)(x-2y)$；④$9a^2x^2+(-4)b^2y^4$；⑤$(x+y)^2+(-a-b)^2$；⑥$-8y^2+x^2$ 中能够用平方差公式分解因式的是　　(　　)

(A) ①②③　　(B) ①③④　　(C) ②④⑤　　(D) ④⑤⑥

2. 把以下各式写成平方差的形式：

(1) $0.04x^2-0.16y^2=(\qquad)^2-(\qquad)^2$

(2) $\frac{1}{4}m^2n^4-(\frac{5}{2}m-1)^4=(\qquad)^2-(\qquad)^2$

(3) $1.69(x-3)^4+(3y-x)(x-3y)=(\qquad)^2-(\qquad)^2$

(4) $0.49(y-x)^6-\frac{1}{9}(3x+1)^4=(\qquad)^2-(\qquad)^2$

(5) $9x^{2m}-16y^{4n}=(\qquad)^2-(\qquad)^2$

3. 把下列各式分解因式：

(1) $9(5m-4p)^2-64m^2$　　　(2) $(n+3q)^2-4(q-n)^2$

(3) $a^8x^8-b^8y^8$　　　(4) $75a^6b-12a^2b^5$

(5) $4a^2b^4-(a^2+b^4)^2$

4. 判断以下各式是否完全平方式：

(1) $x^2-4xy^2+y^4$　(　　)　　(2) $a^6+2a^3b^3+b^6$　(　　)

(3) $8x^4-x^2+\frac{1}{324}$　(　　)　　(4) $0.25a^2-ab+b^2$　(　　)

(5) $x^{m-2}-2x^my^n+y^{n-2}$　(m、n 为自然数)

5. 在以下各题的空格内，填上适合的式子，使之运用完全平方公式分解因式的等式成立.

(1) $4x^4+$________$=(2x^2-3y)^2$　　　(2) ________$+25b^2=(4a-5b)^2$

(3) $9x^2y^2-6xy+$______$=(\qquad)^2$　　　(4) $\frac{4}{25}m^2n^2-$______$+1=(\qquad-1)^2$

(5) $x^{2a}-$________$+y^{2b}=(\qquad)^2$　(a、b 为自然数)

6. 把以下各式分解因式：

(1) $4x^2-12xy+9y^2$　　　(2) $81a^2b^2-180abcd+100c^2d^2$

(3) $(m+5n)^2-2(m+5n)(3m-n)+(3m-n)^2$　　　(4) $\frac{4}{9}x^2+\frac{16}{25}y^2-\frac{16}{15}xy$

(5) $x^4-2x^2y^2+y^4$

7. 判断下列各式能否写成立方和或立方差的形式，如不能，请在题后的括号内打“×”，如能够，请写在括号内.

(1) $8x^3-27y^8$　(　　　　　　)

(2) $\frac{1}{27}(x-2)^3+\frac{1}{128}(2y-4)(y-2)^2$　(　　　　　　)

(3) $a(\frac{m^3}{a^4}-\frac{n^6}{am^3})$　(　　　　　　)

(4) $a^{3m+6}-b^{3n+9}$　(　　　　　　)

(5) $x^{m+3}-y^{m+3}$　(　　　　　　)

(6) $0.027-0.216$　(　　　　　　)

8. 把以下各式分解因式：

(1) $27(3m-4n)^3-64m^3$　　(2) $(3n+2q)^3-8(q-n)^3$

(3) $a^6x^6-b^{12}y^{12}$　　(4) $(7b-7a)(a-b)^2-56(2a-3b)^3$

(5) $64x^{3m}+\frac{1}{64}y^{3n}$

9. 选用适合的公式，把下列各式分解因式：

(1) $3x^3+12x^2y+12xy^2$　　(2) $2a^3b-16b^4$

(3) $(3m-2n)^3+(n-2m)^3$　　(4) $32x^2(x-1)^4-4x^5(x-1)$

(B 组)

1. 利用因式分解法计算：

(1) 100001^2-1　　(2) $0.977^2-0.023^2$

(3) $2.09^2+4.18\times1.91+1.91^2$　　(4) $1.37^2-0.74\times1.37+0.37^2$

2. 将以下各式分解因式：

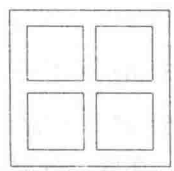
(1) $\frac{4}{3}x^2-\frac{1}{3}$　　(2) $1-4(a+b)^2$

(3) $-a^6-a^3$　　(4) $\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}b^2$

(5) $18(m+n)^2+24(m+n)+8$　　(6) $(2x+3)^3-27(x-1)^3$

(7) $(am+bm)^4+(a+b)m$　　(8) $a^{3m}-a^{3m+3}$

3. 为要制造某种零件，需将一个边长为 b 的正方形铁片当中，挖去四个边长为 a 的小正方形(如图)，若 $a=25.75mm$，$b=148.5mm$，求剩余部分的面积.



第3题

8.3　分组分解法

【学习要点】

1. 本节学习的主要内容是分组分解法，分组分解法是为提公因式或运用公式分解因式创造条件.即先把多项式的各项适当分组，使分解因式后的各组之间可以有公因式可提；或可以运用某个乘法公式分解因式，例如 $am+an+bm+bn=(am+an)+(bm+bn)=a(m+n)+b(m+n)=(a+b)(m+n)$；又如 $a^2-b^2+2bc-c^2=a^2-(b^2-2bc+c^2)=a^2-(b-c)^2=(a+b-c)(a-b+c)$. 都是分组后为整个多项式分解因式创造条件的.

2. 分组分解法解决两种类型的问题

(1) 分组后能直接提公因式，如 $am+an+bm+bn$；

(2) 分组后能直接运用公式，如 $a^2-b^2+2bc-c^2$.

3. 在运用分组分解法分解因式的同时，还要继续用提公因式法和运用公式法分解因式，因而通过本节学习除要求掌握分组分解法外，还要求能熟练地运用前面学过的两种方法分解因式，而且能综合应用学过的几种方法.

【学习指导】

1. 分组分解法不是一种独立的分解因式的方法，是经过适当分组以后可以转化为用提公因式法或运用公式分解因式. 因此，合理的分组是解决问题的关键，在分组前必须仔细地进行观察，要使分组后的各组之间有公因式可提或有公式可用，如 $8x^2-2y^2-2x+y$ 两项一组的分两组，就可有三种分法，但只有其中一种分组方法，即 $(8x^2-2y^2)+(-2x+y)=2(4x^2-y^2)-(2x-y)=2(2x+y)(2x-y)-(2x-y)=(2x-y)[2(2x+y)-1]=(2x-y)(4x+2y-1)$ 可以达到目的.

2. 分组分解法没有固定的模式，必须根据问题的具体情况采取相应的分组方法. 对于一个四项式，有两种分组方法，一种是两两分组，另一种是一、三分组，如 $2y+y^2-2z-z^2=(2y-2z)+(y^2-z^2)=2(y-z)+(y+z)(y-z)=(y-z)(y+z+2)$；$4x^2-4xy+y^2-4=(4x^2-4xy+y^2)-4=(2x-y)^2-4=(2x-y+2)(2x-y-2)$，五项式常用二、三分组，六项式可以三、三分组或二、二、二分组，都应视具体问题而定.

3. 有时按照问题的需要，可以拆项进行分组，如 $x^4-3x^2y^2+y^4$，可以把 $-3x^2y^2$ 拆成 $-2x^2y^2-x^2y^2$，这样就可以得到 $x^4-3x^2y^2+y^4=x^4-2x^2y^2-x^2y^2+y^4=(x^4-2x^2y^2+y^4)-x^2y^2=(x^2-y^2)^2-(xy)^2=(x^2-y^2+xy)(x^2-y^2-xy)$.

【例题解析】

例 1 把多项式 $3ab+3cd-bc-9ad$ 分解因式

解 原式 $=(3ab-bc)+(3cd-9ad)=b(3a-c)+3d(c-3a)$

$=b(3a-c)-3d(3a-c)=(3a-c)(b-3d)$

注 本题的分组方法不唯一，请读者考虑用其他的分组方法来解.

例 2 把多项式 $3a^3+6a^2b+3ab^2-12a$ 分解因式.

解 原式 $=3a(a^2+2ab+b^2-4)=3a[(a^2+2ab+b^2)-4]$

$=3a[(a+b)^2-2^2]=3a(a+b+2)(a+b-2)$

注 在分组之前先要观察所给的多项式有无公因式，如有公因式，必须先提公因式后再分组，这是分解因式的重要步骤之一. 经提公因式后的多项式，分组起来更加明确.

例 3 把多项式 $3a^2-2ac+2bc-3b^2$ 分解因式

解 原式 $=(3a^2-3b^2)+(-2ac-2bc)=3(a^2-b^2)-2c(a+b)$

$=3(a+b)(a-b)-2c(a+b)=(a+b)[3(a-b)-2c]$

$=(a+b)(3a-3b-2c)$

注 最后的结果要写成最简形式.

例 4 把多项式 $8m^3x+n^3x-8m^3xy^2-n^3xy^2$ 分解因式

解 原式 $=x(8m^3+n^2-8m^3y^2-n^3y^2)=x[(8m^3+n^3)-(8m^3y^2+n^3y^2)]$

$=[(8m^3+n^3)-y^2(8m^3+n^3)]=x(8m^3+n^3)(1-y^2)$

$=x(2m+n)(4m^2-2mn+n^2)(1+y)(1-y)$

或 原式 $=x[(8m^3-8m^3y^2)+(n^3-n^3y^2)]=x[8m^3(1-y^2)+n^3(1-y^2)]$

$=x(1-y^2)(8m^3+n^3)=x(1+y)(1-y)(2m+n)(4m^2-2mn+n^2).$

例 5 把多项式 $x^3+x^2-2xy+y^2-y^3$ 分解因式

解 原式 $=(x^3-y^3)+(x^2-2xy+y^2)=(x-y)(x^2+xy+y^2)+(x-y)^2$

$=(x-y)[(x^2+xy+y^2)+(x-y)]=(x-y)(x^2+xy+y^2+x-y).$

例 6 把 $2am-3an+2bm-3bn+2cm-3cn$ 分解因式

解 原式 $=(2am+2bm+2cm)+(-3an-3bn-3cn)$

$=2m(a+b+c)-3n(a+b+c)=(a+b+c)(2m-3n).$

或 原式 $=(2am-3an)+(2bm-3bn)+(2cm-3cn)$

$=a(2m-3n)+b(2m-3n)+c(2m-3n)=(2m-3n)(a+b+c).$

例 7 把多项式 $8x^3+8x^2-27y^3-18y^2$ 分解因式

解 原式 $(8x^3-27y^3)+(8x^2-18y^2)=(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)+2(4x^2-9y^2)$

$=(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)+2(2x+3y)(2x-3y)$

$=(2x-3y)[(4x^2+6xy+9y^2)+2(2x-3y)]$

$=(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2+4x-6y).$

例 8 把多项式 $x^2+11x+28$ 分解因式

解 $x^2+11x+28=x^2+4x+7x+28=(x^2+4x)+(7x+28)$

$=x(x+4)+7(x+4)=(x+4)(x+7).$

注 当所给的多项式的三项不能运用公式或提公因式分解因式时，可考虑用拆项法化成四项后，用分组分解法.

例 9 把多项式 $16x^4+4$ 分解因式

分析 把 $16x^4+4$ 改写成 $16x^4+0+4$，再把 0 拆成两项 $+4x^2-4x^2$.

解 $16x^4+4=16x^4+0+4=4(4x^4+0+1)=4(4x^4+4x^2+1-4x^2)$

$4[(4x^4+4x^2+1)-4x^2]=4[(2x^2+1)^2-(2x)^2]=4(2x^2+2x+1)(2x^2-2x+1).$

【练习与思考】

(A 组)

1. 利用分组法把多项式 $4xy+16ay^2-7xz-49az^2$ 分解因式，正确的分组是 (　　)

(A) $(4xy+16ay^2)+(-7xz-49az^2)$　(B) $(4xy-7xz)+(16ay^2-49az^2)$

(C) $(4xy-49az^2)+(16ay^2-7xz)$　(D) $(4xy+16ay^2-49az^2)-7xz$

2. 把多项式 $a^2-m^2-2ab-2mn+b^2-n^2$ 分解因式，正确的分组应是 (　　)

(A) $(a^2-m^2)+(-2ab-2mn)+(b^2-n^2)$ (B) $(a^2-2mn-n^2)+(b^2-2ab-m^2)$

(C) $(a^2-2ab+b^2)+(-m^2-2mn-n^2)$　(D) $(a^2-n^2)+(b^2-m^2)+(-2ab-2mn)$

3. 在下列多项式：①$n^2x^2+m^2y^2-2mnxy$、②$x^3-y^3+x^2+y^2-2xy$、③$8ax-10ay+12abx$、④$1-4a^2+12ab-9b^2$、⑤$3amx-3bnx-4amy^2+4bny^2+5amz^2-5bnz^2$ 中，用到分组法分解因式的是 (　　)

(A) ①②③　(B) ②③④　(C) ③④⑤　(D) ②④⑤

4. 下列多项式：①$4x^2-4x+2ax-2a$、②$4x^2-12xy+9y^2-1$、③$32y^3-16y^2-50y+25$、④$9x^2+3x-6xy^2-2y$

⑤$m^6-n^3+m^4-2m^2n+n^2$ 中分组后直接运用公式分解因式的是 (　　)

(A) ②⑤　(B) ②③　(C) ①④　(D) ④⑤