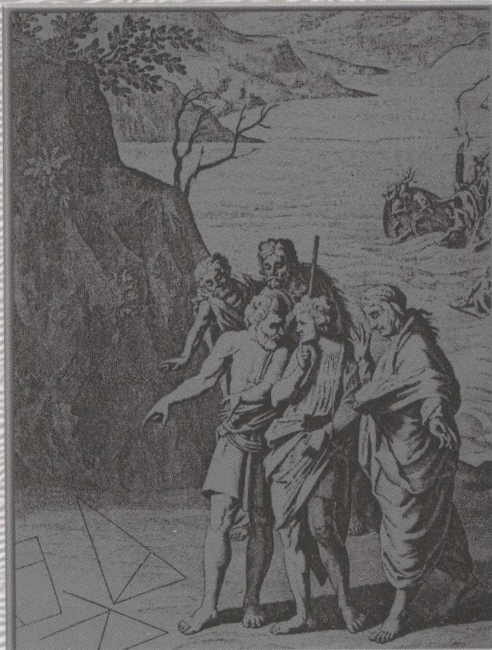
三角级数

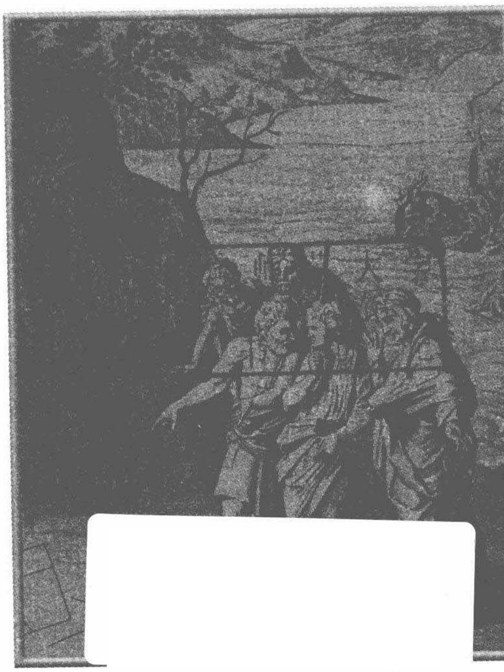


李遥观 编著

- 三角级数
- 各角成等差数列的各正弦函数之和
- 各角成等差数列的各余弦函数之和
- 通项为几个三角函数之积的三角级数
- 通项可以拆成正负两项的三角级数
- 复数在三角级数中的应用

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

三角级数



李遥观 编著

◎三角级数

◎各角成等差数列的各正弦函数之和

◎各角成等差数列的各余弦函数之和

◎通项为几个三角函数之积的三角级数

◎通项可以拆成正负两项的三角级数

◎复数在三角级数中的应用

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书详细介绍了三角级数的相关知识及应用.全书共分六章,分别介绍了三角级数、各角成等差数列的各正弦函数之和、各角成等差数列的各余弦函数之和、通项为几个三角函数之积的三角级数、通项可以拆成正负两项的三角级数、复数在三角级数中的应用等知识.读者可以较全面地了解这类问题的实质,并且还可以认识到它在其他学科中的应用.

本书适合中学师生以及数学爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

三角级数/李遥观编著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2015.7

ISBN 978-7-5603-5439-2

Ⅰ.①三… Ⅱ.①李… Ⅲ.①三角级数 Ⅳ.①O174.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 132849 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 聂兆慈
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16 印张 13.75 字数 154 千字
版　　次 2015 年 7 月第 1 版 2015 年 7 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-5439-2
定　　价 28.00 元

⊙ 前言

三角级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ 是一类极为重要的级数. 由于三角函数所固有的周期性，这样就决定了这类级数在研究具有周期变化的物理现象中所独有的特殊地位. 如：物体在做简谐振动时位移 y 与时间 x 的关系为

$$y=A\sin(\omega x+\varphi)$$

A 为振幅，ω 为角速度，φ 为初相角.

这是一个最简单的周期函数，其几何意义为一正弦曲线（以 A 为振幅，$T=\frac{2\pi}{\omega}$ 为周期）. 如果说有无数个频率各不相同的简谐振动组合在一起就组成了一个复杂的周期性振动. 其关系式为

$$A_0+A_1\sin(\omega t+\alpha_1)+A_2\sin(2\omega t+\alpha_2)+\cdots$$

这类三角级数在微积分学教程中有专门研究的章节——傅里叶级数. 由于它远远超出了中学数学范围，在此不讨论. 本书试图用中学的数列、三角函数、复数等知识来介绍有限项三角级数求和等方面的一些问题.

⊙ 目录

三角级数

第一章

一、什么样的级数叫三角级数

我们知道,在一个数列里,如果它的后项与前项之差总是某一个常数,那么这个数列叫等差数列. 如果它的后项与前项之比总是某一个常数,那么这个数列叫等比数列.

如果要问:什么样的数列叫作三角数列?首先让我们看看下面几个例子.

① 各角成等差数列的正弦函数组成的数列

$\sin\alpha, \sin(\alpha+\beta), \sin(\alpha+2\beta), \cdots \sin(\alpha+(n-1)\beta)$

② 各角成等比数列的余割函数组成的数列

$$\csc 2\alpha, \csc 4\alpha, \csc 8\alpha, \cdots, \csc 2^n\alpha$$

③反正切符号里按照公式$\frac{x}{1+k(k+1)x^2}(k=1, 2, \cdots, n)$的反正切函数组成的数列

$$\arctan\frac{x}{1+1\cdot 2x^2}, \arctan\frac{x}{1+2\cdot 3x^2}$$

$$\arctan\frac{x}{1+3\cdot 4x^2}, \cdots, \arctan\frac{x}{1+n\cdot(n+1)x^2}$$

上面三个数列的组成虽然各有差异,但其共同点是:它们的通项都是由三角函数或者是反三角函数来表示. 这三个数列我们都叫作三角数列.

一般地说,在一个数列里,如果它的通项是由三角函数或者反三角函数组成,那么这个数列叫作三角数列,用加号连接三角数列的式子叫作三角级数. 如

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\cdots+\sin(\alpha+(n-1)\beta)$$

$$\csc 2\alpha+\csc 4\alpha+\csc 8\alpha+\cdots+\csc 2^n\alpha$$

$$\arctan\frac{x}{1+1\cdot 2x^2}+\arctan\frac{x}{1+2\cdot 3x^2}+\cdots+\arctan\frac{x}{1+n\cdot(n+1)x^2}$$

等都是三角级数.

二、怎样求三角级数的和

三角级数是一类特殊的级数,因此它的求和问题可以转化为一般数列求和问题. 当然数列的形式多种多样,千变万化,但其中有一类数列的各项之间存在着某种特殊关系. 人们就是从这种关系中由表及里、由此

及彼地分析研究,从而圆满而胜利地到达了彼岸.

例　求数列 $\frac{3}{1!+2!+3!}$, $\frac{4}{2!+3!+4!}$, $\frac{5}{3!+4!+5!}$, $\cdots$, $\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}$ 前 n 项之和.

解　此数列的通项

$$a_k=\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}$$

设前 n 项和为 S_n,即

$$S_n=\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\frac{5}{3!+4!+5!}+\cdots+\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}$$

$$\begin{aligned}a_k&=\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}\\&=\frac{k+2}{k!(1+(k+1)+(k+1)(k+2))}\\&=\frac{k+2}{k!(k+2)(1+k+1)}\\&=\frac{k+2}{k!(k+2)^2}\\&=\frac{1}{k!(k+2)}=\frac{k+1}{(k+2)!}\\&=\frac{1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+2)!}\end{aligned}$$

令 $k=1,2,3,\cdots,n$ 依次代入 a_k,则

$$a_1=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}$$

$$a_2=\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}$$

$$a_3=\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}$$

$$\vdots$$

$$a_n=\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}$$

将以上 n 式相加,得

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\\&\quad\frac{5}{3!+4!+5!}+\cdots+\\&\quad\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}\\&=\frac{1}{2!}-\frac{1}{(n+2)!}\end{aligned}$$

上面这个例子的解答过程可以归纳如下:

① 找出数列的通项 a_k;

② 将通项拆成与项数有关的正、负两项;

③ 在求和的运算中,利用正、负两项绝对值相等的关系而抵消中间各项,那么数列的和就显露出来了.

一般地说:如果一个数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_k 可以拆成正、负两项(这两项都是以项数为其自变量的函数),即

$$a_k=b_k-b_{k+1} \text{ 或 } a_k=b_{k+1}-b_k \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

那么这个数列 $\{a_n\}$ 前 n 项的和

$$\begin{aligned}S_n&=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n\\&=(b_1-b_2)+(b_2-b_3)+(b_3-b_4)+\cdots+(b_n-b_{n+1})\\&=b_1-b_{n+1}\end{aligned}$$

其中通项 $a_k=b_k-b_{k+1}$(或 $a_k=b_{k+1}-b_k$)是拆项的一条重要原则.

三角级数的通项如果能按照上述原则拆成正、负

两项,那么三角级数前 n 项和就可以用上述方法求出.

三角级数的组成形式比较复杂. 除几类简单三角级数求和有公式直接利用外,更多的三角级数求和问题不能直接套公式,要经过分析、研究逐步加以解决.

在下面几章里,我们按照各种不同的类型对三角级数求和问题加以研究.

本书里所谈的三角级数求和都是指有限项(即前 n 项) 三角级数的求和.

各角成等差数列的各正弦函数之和

第二章

若各正弦函数的角依次为

$\alpha, \alpha+\beta, \alpha+2\beta, \alpha+3\beta, \cdots, \alpha+(n-1)\beta$

则各正弦函数的和为

$$S_n = \sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \sin(\alpha+3\beta) + \cdots + \sin(\alpha+(n-1)\beta)$$

$$= \frac{\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)\sin\frac{n}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}\beta} \quad (1)$$

证明　此三角级数的通项为

$$a_k = \sin(\alpha+(k-1)\beta)$$

为了将通项 a_k 拆成正负两项,我们只有利用三角函数的积化和差的形式. 因此用 $2\sin\frac{1}{2}\beta$ 乘以 a_k,即得如下关系式

$$\begin{aligned}(2\sin\frac{1}{2}\beta)\cdot a_k &= 2\sin(\alpha+(k-1)\beta)\sin\frac{1}{2}\beta\\ &= \cos(\alpha+(k-\frac{3}{2})\beta)-\\ &\quad\cos(\alpha+(k-\frac{1}{2})\beta)\end{aligned}$$

令 $k=1,2,3,4,\cdots,n$,依次代入此式,得

$$(2\sin\frac{1}{2}\beta)\cdot a_1 = \cos(\alpha-\frac{1}{2}\beta)-\cos(\alpha+\frac{1}{2}\beta)$$

$$(2\sin\frac{1}{2}\beta)\cdot a_2 = \cos(\alpha+\frac{1}{2}\beta)-\cos(\alpha+\frac{3}{2}\beta)$$

$$(2\sin\frac{1}{2}\beta)\cdot a_3 = \cos(\alpha+\frac{3}{2}\beta)-\cos(\alpha+\frac{5}{2}\beta)$$

$$(2\sin\frac{1}{2}\beta)\cdot a_4 = \cos(\alpha+\frac{5}{2}\beta)-\cos(\alpha+\frac{7}{2}\beta)$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}(2\sin\frac{1}{2}\beta)\cdot a_n &= \cos(\alpha+\frac{2n-3}{2}\beta)-\\ &\quad\cos(\alpha+\frac{2n-1}{2}\beta)\end{aligned}$$

将以上 n 式相加,得

$$\begin{aligned}&2\sin\frac{1}{2}\beta(a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_n)\\ &=\cos(\alpha-\frac{1}{2}\beta)-\cos(\alpha+\frac{2n-1}{2}\beta)\\ &=2\sin(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta)\sin\frac{n}{2}\beta\end{aligned}$$

所以
$$S_n = \frac{\sin(\alpha + \frac{n-1}{2}\beta)\sin\frac{n}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}\beta}$$

故

$$\begin{aligned} S_n &= \sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \\ &\quad \sin(\alpha+3\beta) + \cdots + \sin(\alpha+(n-1)\beta) \\ &= \frac{\sin(\alpha + \frac{n-1}{2}\beta)\sin\frac{n}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}\beta} \end{aligned}$$

实践证明，利用此公式来解有限项三角级数求和的问题时，可以删繁就简、化险为夷，在解题方面给人们带来很大好处.

例 1　求证：$\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \cdots + \sin(2n-1)\alpha = \frac{\sin^2 n\alpha}{\sin\alpha}$.

证明　经过观察、分析和比较，令 $\beta = 2\alpha$. 则

$$\begin{aligned} &\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \cdots + \sin(2n-1)\alpha \\ &= \frac{\sin(\alpha + \frac{n-1}{2}\cdot 2\alpha)\sin(\frac{n}{2}\cdot 2\alpha)}{\sin(\frac{1}{2}\cdot 2\alpha)}. \\ &= \frac{\sin^2 n\alpha}{\sin\alpha} \end{aligned}$$

所以原式成立.

例 2　求证：$\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \cdots + \sin n\theta + \frac{1}{2}\sin(n+1)\theta$ 在区间$(0,\pi)$ 内是非负的.

证明

$$\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta+\cdots+\sin n\theta+\frac{1}{2}\sin(n+1)\theta$$

$$=\frac{1}{2}(2\sin\theta+2\sin 2\theta+2\sin 3\theta+\cdots+2\sin n\theta+\sin(n+1)\theta)$$

$$=\frac{1}{2}(\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta+\cdots+\sin n\theta+\sin(n+1)\theta)+\frac{1}{2}(\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta+\cdots+\sin n\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\theta+\frac{n}{2}\theta)\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}+\frac{\sin(\theta+\frac{n-1}{2}\theta)\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{n+2}{2}\theta\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}+\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta(\sin\frac{n+2}{2}\theta+\sin\frac{n}{2}\theta)}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\sin^2(\frac{n+1}{2}\theta)\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$=\sin^2(\frac{n+1}{2}\theta)\cot\frac{\theta}{2}$$

因为 $\theta\in(0,\pi]$，则 $\frac{\theta}{2}\in(0,\frac{\pi}{2}]$，所以

$$\cot\frac{\theta}{2}\geqslant 0$$

对于任何自然数 n，皆有 $\sin^2\frac{n+1}{2}\geqslant 0$，所以

$$\sin^2\frac{n+1}{2}\theta\cot\frac{\theta}{2}\geqslant 0$$

故在 $(0,\pi]$ 内，原式是非负的.

例3 求 $\sin\alpha-\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)-\sin(\alpha+3\beta)+\cdots+(-1)^{n-1}\sin(\alpha+(n-1)\beta)$ 的值.

解 虽然各正弦函数的各角依次组成了一个等差数列，然而各正弦函数的符号为正、负相间，因此不能直接应用公式(1)，应对原式作某些变形. 经过观察，不难发现可以利用诱导公式作如下变形

$$\sin\alpha=\sin\alpha-\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+(\beta+\pi))$$

$$\sin(\alpha+2\beta)=\sin(\alpha+2(\beta+\pi))$$

$$-\sin(\alpha+3\beta)=\sin(\alpha+3(\beta+\pi))$$

$$\vdots$$

$$(-1)^{n-1}\sin(\alpha+(n-1)\beta)=\sin(\alpha+(n-1)(\beta+\pi))$$

将以上 n 式相加，得

$$\begin{aligned}&\sin\alpha-\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)-\sin(\alpha+3\beta)+\cdots+(-1)^{n-1}\sin(\alpha+(n-1)\beta)\\&=\sin\alpha+\sin(\alpha+(\beta+\pi))+\sin(\alpha+2(\beta+\pi))+\sin(\alpha+3(\beta+\pi))+\cdots+\sin(\alpha+(n-1)(\beta+\pi))\\&=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}(\beta+\pi)\right)+\sin\frac{n}{2}(\beta+\pi)}{\sin\frac{1}{2}(\beta+\pi)}\end{aligned}$$

$$= \frac{\sin\left(\alpha + \frac{n-1}{2}(\beta + \pi)\right) + \sin\frac{n}{2}(\beta + \pi)}{\cos\frac{1}{2}\beta}$$

例 4　求证

$$\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} + \frac{2\tan 2\alpha}{1+\tan^2 2\alpha} + \frac{2\tan 3\alpha}{1+\tan^2 3\alpha} + \cdots +$$
$$\frac{2\tan n\alpha}{1+\tan^2 n\alpha} = \frac{\sin n\alpha\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$$

证明　很明显,此题还不是公式(1)的形式,因此不可能马上用公式(1),为了使式子的左边变成公式(1)的形式,必须作适当的三角恒等变形. 经过观察和分析,左边级数的通项为

$$a_k = \frac{2\tan k\alpha}{1+\tan^2 k\alpha} = 2\sin k\alpha\cos k\alpha = \sin 2k\alpha$$

令 $k = 1,2,3,\cdots,n$,依次代入此式,得

$$a_1 = \sin 2\alpha$$
$$a_2 = \sin 4\alpha = \sin(2\alpha + 2\alpha)$$
$$a_3 = \sin 6\alpha = \sin(2\alpha + 2\cdot 2\alpha)$$
$$\vdots$$
$$a_n = \sin 2n\alpha = \sin(2\alpha + (n-1)2\alpha)$$

将以上 n 式相加,得

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sin 2\alpha + \sin(2\alpha + 2\alpha) + \sin(2\alpha +$$
$$2\cdot 2\alpha) + \cdots + \sin(2\alpha + (n-1)2\alpha)$$
$$= \frac{\sin(2\alpha + \frac{n-1}{2}2\alpha)\sin\frac{n}{2}2\alpha}{\sin\alpha}$$
$$= \frac{\sin n\alpha\cdot\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$$

所以

$$\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}+\frac{2\tan 2\alpha}{1+\tan^2 2\alpha}+\frac{2\tan 3\alpha}{1+\tan^2 3\alpha}+\cdots+$$

$$\frac{2\tan n\alpha}{1+\tan^2 n\alpha}=\frac{\sin n\alpha\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$$

例 5 在 $0<x<\pi$ 内解方程

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$$

解 此题为三角方程,其右边为零,于是将其左边分解为几个简单三角函数之积就可以了. 当然可以利用和差化积进行分解,但比较麻烦. 如果用公式(1)来化简就比较简单,效果也好. 其解法如下

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=\frac{\sin\frac{5x}{2}\sin 2x}{\sin\frac{x}{2}}$$

所以原方程可以化为

$$\frac{\sin\frac{5x}{2}\sin 2x}{\sin\frac{x}{2}}=0$$

因为 $0<x<\pi$,则 $0<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}$,所以 $\sin\frac{x}{2}\neq 0$.

故 $\sin\frac{5x}{2}\sin 2x=0$,即

$$\sin\frac{5x}{2}=0 \text{ 或 } \sin 2x=0$$

在 $(0,\pi)$ 内,如果 $\sin 2x=0$,则 $x=\frac{\pi}{2}$.

如果 $\sin\frac{5x}{2}=0$,则 $x=\frac{2n\pi}{5}$.