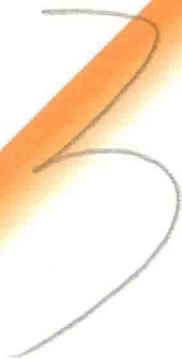
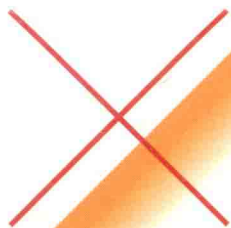
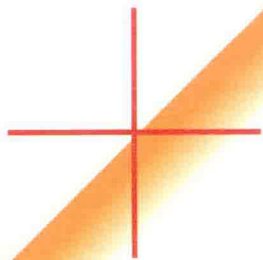


高等数学 基础

苏德矿
余继光
编

——中学数学内容补充
与数学概念和思维方法简介

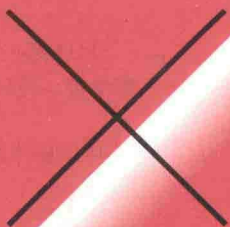
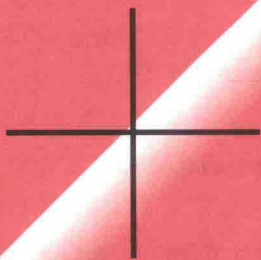
把中学删去的
数学内容统统找回来



高等数学 基础

——中学数学内容补充
与数学概念和思维方法简介

苏德矿 余继光 编



内容提要

近年来, 中学数学已实行新课标教学改革, 在教学内容上有较大变化, 删去了许多数学内容, 中学数学与高等数学的教学内容已经发生了脱节, 严重影响了大学高等数学的教学。为此, 我们把学习高等数学需要而中学删去的数学内容统统找回来, 这些内容有三角函数的积化和差与和差化积、反三角函数、参数方程与极坐标、排列与组合、二项式定理、数学归纳法、复数等。

尽管中学数学对数学概念与思维方法也作了介绍, 但比较分散不系统。本书对此作了较详细的介绍, 让学生了解数学概念的产生、数学思维的方法, 掌握这些内容将对高等数学的学习有很大的帮助。

本书是高等数学的预修教材, 可供各类大专院校不同专业的学生学习高等数学使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学基础: 中学数学内容补充与数学概念和思维方法简介 / 苏德矿, 余继光编. — 北京: 高等教育出版社, 2015.9

ISBN 978-7-04-043101-8

I. ①高… II. ①苏… ②余… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 134947 号

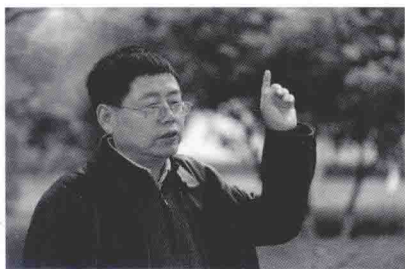
策划编辑 于丽娜 责任编辑 徐可 封面设计 张志奇 版式设计 杜微言
插图绘制 黄建英 责任校对 殷然 责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社址	北京市西城区德外大街4号	网址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印刷	高教社(天津)印务有限公司	网上订购	http://www.landaco.com
开本	850mm×1168mm 1/32		http://www.landaco.com.cn
印张	7.5	版次	2015年9月第1版
字数	190千字	印次	2015年9月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定价	18.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 43101-00



苏德矿

苏德矿，浙江大学数学系教授，浙江大学数学科学学院基础数学课程教学研究中心副主任。浙江大学三育人标兵、浙江大学首届教学名师，被浙江大学学生会评为“浙江大学我最喜爱的十大名师”。2014年第一届浙江省十大最美教师获得者，2014年浙江大学第三届心平奖教金杰出教学贡献奖获得者。2015年全国岗位学雷锋标兵获得者。他全心全意投入教学的事迹被多家媒体报道和采访，2014年9月10日，中央电视台《新闻1+1》用21分钟报道：“百万”名师“矿爷”，主持人白岩松现场连线，对他进行采访报道。

苏德矿的微积分课，300个名额，3000人选课，怎么办？2013年，他在网上“开发”出了另外一个“教室”——微博。微博是一个没有课堂限制、没有人数限制、没有时间限制、没有空间限制、没有学校限制、没有地域限制的更大的“课堂”。



当你喜欢一个人，TA 的一点变化你都看在眼里，别人都变成了常数，TA 才是唯一变量。

最近天气突然热起来，你要脱衣服。脱到怎样合适呢？一件一件脱，到不热了为止。复合函数也一样，一层一层求导，直到内函数的导数有公式，就成了。

他是你的严格递增函数，你的生活一天比一天幸福，一天比一天快乐，一天比一天美好，希望你们的爱情像一条射线，只有起点没有终点。

数学是抽象的，来源是生活的；数学是枯燥的，应用是广泛的；推理是严谨的，形式是很美的；内容是丰富的，题目要常练的；过程是曲折的，乐趣是无穷的；学习是辛苦的，成功是归你的。

近年来,中学数学已实行新课标教学改革,在教学内容上有较大变化,比如反三角函数在部分高中新教材中学生没有学或仅学习了符号;没学反三角函数的图像与性质;三角函数的和差化积、积化和差公式在高中不作要求。而在高等数学中经常涉及三角函数或反三角函数的求导及积分运算,如果学生没有学反三角函数和熟练掌握三角函数的恒等变形就很难熟练地求三角函数、反三角函数的导数或积分。再比如参数方程、极坐标这部分内容在高中阶段作为选讲,而在大学教材中,极坐标知识是作为已知知识直接应用的,如在定积分和重积分的应用中。这样就产生了知识裂痕,中学数学与高等数学的教学内容发生脱节,极大地影响了高等数学的教学。由于高等数学教学的课时较少,如果在课堂上补充这些内容,用于高等数学的课时就更少,对教学影响就更大。

为了解决这些矛盾,本书把中学删去的数学内容统统找回来,这些内容在高等数学的教学中都有用。本书编写得非常详细,学生在学习高等数学之前可以自学。有些内容是中学文科删去的数学内容,可供文科的学生学习。

为了便于学习,我们把部分内容制作成 33 个微视频,示例如下。



篇头



篇尾

每个视频大约 10 分钟左右,可以通过二维码扫描在手机上观看,方便学生快速地掌握这些高等数学必备的知识,对学习高等数学有非常大的帮助。

人们对客观事物现象的认识一般是通过感觉、知觉、思维形成观念(表象),这是感性认识阶段。在感性认识基础上再经过比较、分析、综合、抽象、概括等一系列思维活动,从而认识事物现象的本质属性形成概念,这是理性认识阶段。理性认识在实践基础上不断深化,概念又会进一步发展。数学概念的产生和发展也是如此。例如,人们对圆的认识,从太阳、满月等物体形状的感觉、知觉形成了圆的观念,又在这个基础上,人们为了制造圆形工具或器皿需要画圆,从而逐步认识圆的本质属性,知道:“圆是平面内到定点的距离等于定长的点的集合(或封闭曲线)。”这样就形成了圆的概念。

我们知道,数学概念是现实世界中空间形式和数量关系及其特有的属性(或本质属性)在思维中的反映。一个数学概念通常用一个名称或符号来表示。例如,一切有理数所组成的集合这个概念通常用名称“有理数集”或符号“ \mathbf{Q} ”来表示。数学概念不论如何抽象,它们还都是现实世界空间形式和数量关系及其本质属性在人的思维中的反映。

在数学学习过程中,学生了解并遵守正确思维规律,掌握好推理和证明方法,也是使学生学好数学基础知识提高基本能力的有效途径。

尽管中学数学对数学概念与思维方法也作了介绍,但比较分散不系统,有些重要的方法也没讲。本书对此作了较详细的介绍,让学生知道如何产生数学的概念,掌握数学思维的方法,对高等数学的学习将会有较大的帮助。

我们把高等数学学习中要用到的极坐标方程表示的曲线、中学数学公式和高等数学主要公式放在附录中,以便查找,方便学习。

本书第3章、第4章§4.1、§4.3及各章引例、习题及解答由余继光撰写,其他各章内容由苏德矿撰写,虽然编者在教学过程中积累了一些教学经验,但不足之处在所难免,恳请读者给予批评指正。

苏德矿于求是园

2015年7月

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010) 58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010) 82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

第 1 章 三角函数	1
§ 1.1 三角函数的概念	1
§ 1.2 两角和与差的三角函数	6
§ 1.3 三角函数的积化和差与和差化积	7
习题一	14
第 2 章 代数与方程	16
§ 2.1 代数式及其运算	16
§ 2.2 一元二次方程的性质	22
§ 2.3 解一元代数方程	25
习题二	27
第 3 章 平面几何	29
§ 3.1 三角形	29
§ 3.2 四边形	30
§ 3.3 圆	31
§ 3.4 相似形	32
习题三	35
第 4 章 反三角函数	39
§ 4.1 反函数	39
§ 4.2 反三角函数	43
§ 4.3 三角方程	51
习题四	53

第 5 章 排列与组合	55
§ 5.1 分类计数原理与分步计数原理	55
§ 5.2 排列	58
§ 5.3 组合	66
§ 5.4 二项式定理	74
§ 5.5 数学归纳法	79
习题五	81
第 6 章 复数	84
§ 6.1 复数的概念	84
§ 6.2 复数的运算	87
§ 6.3 数系的扩充	90
§ 6.4 复数与平面向量、三角函数的联系	92
§ 6.5 复数的指数形式	95
习题六	97
第 7 章 参数方程与极坐标方程	99
§ 7.1 参数方程	99
§ 7.2 极坐标方程	102
习题七	109
第 8 章 数学概念与思维方法简介	111
§ 8.1 数学概念	111
§ 8.2 数学命题	120
§ 8.3 充分条件与必要条件	124
§ 8.4 数学中的推理和证明	126
§ 8.5 数学方法漫谈	139
习题八	143

习题答案	147
附录 1 常用极坐标方程曲线	174
附录 2 中学数学主要公式	177
附录 3 高等数学主要公式	194

✦ 引例

外国船只,除特许外,不得进入离我国海岸线 d 海里以内的区域,设 A, B 为我边防观测站, $AB=s$ 海里,海岸线是过 A, B 的直线,一外国船只在点 P ,在 A 站测得 $\angle BAP = \alpha$,在 B 站测得 $\angle ABP = \beta$,问 α 及 β 满足什么样的三角函数不等式,就应当向未经特许的外国船只发出警告,命令其退出我国海域?

§ 1.1 三角函数的概念

1. 角的概念

一条射线在平面内绕其端点旋转形成角.旋转有始边和终边,射线的端点为角的顶点.逆时针旋转得正角,顺时针得负角,不旋转时所成角为零角.

角的度量常用两种方法:(1) 角度制.周角的 $\frac{1}{360}$ 称 1 度,记为 1° ;(2) 弧度制.等于半径长的圆弧所对圆心角称 1 弧度,记为 1 rad.它们的换算关系是

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}, \quad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57^\circ 17'.$$

通常不写 rad 或中文“弧度”就表示用弧度制.例如 $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ 表示

大小为 $\frac{\pi}{6}$ 弧度的角的正弦值等于 $\frac{1}{2}$, $\sin 1$ 表示1弧度的角的正弦值,不同于 $\sin 1^\circ$,在使用计算器时要特别注意.

半径为 r 的圆弧,若弧长为 l ,所对圆心角大小为 θ rad,则有

$$l = |\theta| r.$$

2. 三角函数

定义 1.1 设 α 为顶点在坐标原点,始边在 x 轴正半轴上的角.终边上任一点坐标为 (x, y) ,它到原点的距离

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (图 1.1), 则

$$\text{正弦函数 } \sin \alpha = \frac{y}{r},$$

$$\text{余弦函数 } \cos \alpha = \frac{x}{r},$$

$$\text{正切函数 } \tan \alpha = \frac{y}{x}, \text{余切函数 } \cot \alpha = \frac{x}{y},$$

$$\text{正割函数 } \sec \alpha = \frac{r}{x}, \text{余割函数 } \csc \alpha = \frac{r}{y}.$$

几个特殊角的三角函数值如下表:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	

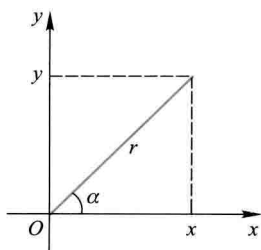


图 1.1

几个三角函数在各象限的正或负值如图 1.2 所示,其中的数字表示终边在该半轴时对应角的三角函数值, ∞ 表示该三角函数

值不存在.

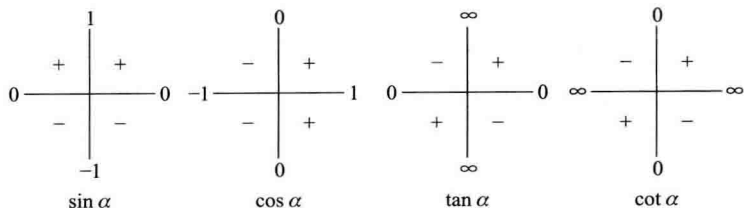


图 1.2

3. 同角三角函数的关系

由三角函数定义可知,

(1) 平方关系式:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, 1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha, 1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$$

(2) 商数关系式:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

(3) 倒数关系式:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}, \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

4. 诱导公式

设 $k \in \mathbf{Z}$, 对一切 $\alpha \in (-\infty, \infty)$, 有如下诱导公式:

角度	函数			
	sin	cos	tan	cot
$2k\pi \pm \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\pm \tan \alpha$	$\pm \cot \alpha$
$(2k+1)\pi \pm \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \tan \alpha$	$\pm \cot \alpha$

以上公式也可以用“函数同名称, 符号看象限”来记忆. 例如, 求 $\sin(2k\pi - \alpha)$, 先在后边写成同名的三角函数值 $\sin \alpha$, 再把 α 暂时看成一个锐角, 观察到 $2k\pi - \alpha$ 属于第四象限, 正弦值为负, 就

在 $\sin\alpha$ 前加一个负号,得

$$\sin(2k\pi - \alpha) = -\sin\alpha.$$

注意这些公式对所有 $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ 都是成立的,不限于 α 是锐角的情形.类似地,有

$$\cos(3\pi + \alpha) = -\cos\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha, \dots$$

诱导公式还有

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha,$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha, \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha.$$

由此可得到 $\sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right)$, $\cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right)$ 的计算公式,例如

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \pi)\right] = \sin(\alpha - \pi) \\ &= -\sin(\pi - \alpha) = -\sin\alpha. \end{aligned}$$

5. 三角函数的图像和性质

$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ 和 $y = \cot x$ 的图像如图 1.3 所示.

正弦函数 $y = \sin x$ 的定义域是实数集 \mathbf{R} , 值域是 $[-1, 1]$, 最大值为 1, 最小值为 -1. 它是最小正周期为 2π 的奇函数. 它在 $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ 上都是增函数, 在 $\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right]$ 上都是减函数, 其中 $k \in \mathbf{Z}$.

余弦函数 $y = \cos x$ 的定义域是 \mathbf{R} , 值域是 $[-1, 1]$, 最大值为 1, 最小值为 -1. 它是最小正周期为 2π 的偶函数. 它在 $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ 上都是增函数, 在 $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ 上都是减函数, 其中 $k \in \mathbf{Z}$.

正切函数 $y = \tan x$ 的定义域是 $\left\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, 值域是 \mathbf{R} .

它是最小正周期为 π 的奇函数. 它在 $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ 内都是增函数, 其中 $k \in \mathbf{Z}$.

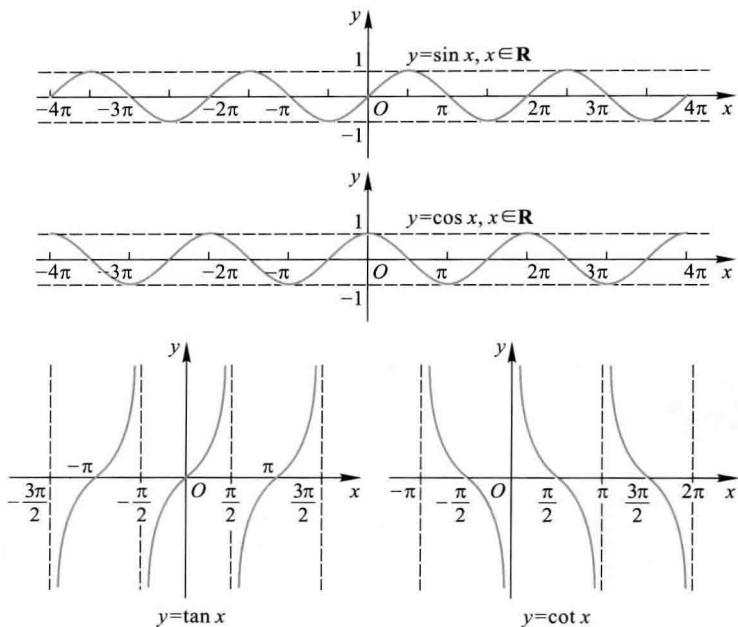


图 1.3

余切函数 $y = \cot x$ 的定义域是 $\{x \mid x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$, 值域是 \mathbf{R} . 它是最小正周期为 π 的奇函数. 它在 $(k\pi, (k+1)\pi)$ 内都是减函数, 其中 $k \in \mathbf{Z}$.

6. 例题

例 1.1.1 已知 $\sec(180^\circ - \alpha) = -\frac{3}{2}$, 求 $\cos \alpha$ 和 $\csc(\alpha - 270^\circ)$.

解 $\cos(180^\circ - \alpha) = -\frac{2}{3}$, $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{2}{3}$,

$$\csc(\alpha - 270^\circ) = \frac{1}{\sin(\alpha - 270^\circ)} = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{3}{2}.$$

例 1.1.2 已知函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \pi$) 的最小正周期是 $\frac{2\pi}{3}$, 最小值是 -2 , 且图像过点 $(\frac{5\pi}{9}, 0)$, 写出这个函数的