

© “十二五” 国家重点图书出版规划项目

# 工业机器人技术

*Industrial Robotic Technology*

杨晓钧 李 兵 编 著



哈尔滨工业大学出版社  
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

“十二五”国家重点图书出版规划项目

# 工业机器人技术

杨晓钧 李 兵 编著

哈尔滨工业大学出版社

## 内 容 提 要

本书内容包括绪论、空间描述与变换、机器人正逆运动学、速度与雅可比矩阵、刚体一般运动及螺旋、关节轨迹规划、机器人动力学和机器人控制。本书还编写了部分动力学及控制仿真程序,让读者对书中技术的应用有直观的认识。

书中结合作者多年在工业机器人方向的教学和科研经验,深入浅出地探讨了工业机器人分析与应用相关的方法与技术,有助于使读者从中得到启发和借鉴。本书可供机械工程领域从事机器人研究的研究生、教师和科技人员阅读和参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

工业机器人技术/杨晓钧,李兵编著. —哈尔滨:

哈尔滨工业大学出版社,2015.8

ISBN 978-7-5603-5247-3

I. ①工… II. 杨齐…②李… III. ①工业机器人  
IV. ①TP242.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 032501 号

策划编辑 王桂芝

责任编辑 刘 瑶

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨工业大学印刷厂

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 11.75 字数 283 千字

版 次 2015 年 8 月第 1 版 2015 年 8 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-5247-3

定 价 28.00 元

---

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

# 前 言

从 20 世纪 60 年代以来,机器人技术的研究及应用得到了迅猛发展,目前机器人已经广泛应用于焊接、喷涂、搬运及装配等工业生产中,并在医疗、国防、家庭、娱乐及特种应用场合发挥着重要作用。机器人技术是一门综合性的工程学科,涉及面很宽泛包括机械学、力学、计算机、电子、信息与控制等多学科的知识。本书以作者在机构学领域的教学与科研成果为基础,借鉴国内外同行的经典研究成果,特别侧重于机器人技术中的运动学、动力学与控制等内容。

全书共 8 章:第 1 章是机器人技术基础,介绍机器人技术发展的历程,工业常用机器人的结构与特点及基本概念等;第 2 章描述三维空间中物体的位置与方向,以易于理解的直观的方式,建立机械臂各部件之间,或者与其周围空间的部件、工具之间的位置与方向的关系,是机器人技术的基础和重点;第 3 章引入机构运动学中 D-H 方法,分析机械臂坐标系的建立方法,坐标系之间的齐次变换矩阵,进而研究典型结构的机械臂的正运动学以及逆运动学求解的几何与代数法;第 4 章研究一般刚体的速度问题,进而扩展到机械臂速度雅可比矩阵的建立与分析;第 5 章研究刚体的一般运动及螺旋,分析总结刚体螺旋运动和力螺旋表示形式的来龙去脉及其蕴含的物理意义;第 6 章研究工业机器人关节轨迹规划常用的基本方法;第 7 章研究工业机器人静力学,进而研究多刚体动力学牛顿-欧拉方程,拉格朗日一类、二类及欧拉-拉格朗日方程在工业机器人动力学建模中的应用;第 8 章研究工业机器人的控制问题,包括独立关节控制与计算力矩控制。

本书结合工业机器人动力学模型的建立与控制方法,编写了部分仿真程序,为读者学习机器人技术的控制方法与仿真提供了例程。

本书具体编写分工如下:第 1~5 章由杨晓钧撰写,第 6~8 章由李兵撰写。硕士生钟春号绘制了书中部分图片,博士生宋振东核对了书中部分公式的推导过程,博士生王帅、硕士生刘俊伟做了部分文字修订工作。

感谢哈尔滨工业大学深圳研究生院机电工程与自动化学院、先进设计与制造中心杜建军、杨小平、徐文福及陈明等老师的支持。

限于作者水平,书中难免有不妥及疏漏之处,恳请读者指正。

作 者  
2015 年 3 月

# 目 录

第1章 绪论	1
1.1 引言	1
1.2 工业机器人概述	2
1.2.1 机器人系统的基本组成	2
1.2.2 工业机器人常见的结构	3
1.3 基本概念及其定义	6
1.3.1 机器人的自由度与活动度	6
1.3.2 运动副或关节	6
1.3.3 运动链	7
1.3.4 机构	7
1.3.5 笛卡儿坐标系和广义坐标	8
1.3.6 位形空间	8
1.3.7 工作空间	11
1.3.8 额定速度与额定负载	11
1.3.9 精度	11
本章小结	13
第2章 空间描述与变换	14
2.1 机器人坐标系	14
2.2 位置和姿态的表示	17
2.2.1 位置的描述	18
2.2.2 姿态的描述	19
2.3 点在不同坐标系下的映射	21
2.3.1 平移映射	21
2.3.2 旋转映射	21
2.3.3 复合映射	22
2.3.4 齐次矩阵的逆	23
2.4 齐次坐标变换	24
2.4.1 平移变换	24
2.4.2 旋转变换	25
2.5 刚体的旋转	29
2.5.1 欧拉角表示法	29

2.5.2	一般的旋转变换	32
2.5.3	Euler-Rodrigues 参数	34
	本章小结	36
<b>第3章</b>	<b>机器人正逆运动学</b>	<b>37</b>
3.1	机器人运动链描述	37
3.2	机器人运动 D-H 表示法	38
3.2.1	D-H 参数的几何意义	38
3.2.2	D-H 坐标系的建立	39
3.2.3	D-H 参数表的建立	40
3.2.4	D-H 坐标系之间的齐次变换	42
3.3	机器人正运动学	44
3.4	机器人逆运动学	48
3.4.1	平面 3R 机械臂逆解	49
3.4.2	空间 6R 机械臂逆解	51
	本章小结	57
<b>第4章</b>	<b>速度与雅可比矩阵</b>	<b>58</b>
4.1	刚体的运动速度与加速度	58
4.1.1	刚体上点的速度和加速度分析	58
4.1.2	点相对于刚体移动速度与加速度分析	61
4.2	串联工业机械臂速度分析	62
4.2.1	微分方法	62
4.2.2	几何方法	64
4.2.3	雅可比矩阵的变换	71
4.2.4	关节速率的求解	72
4.2.5	奇异位形分析	73
4.2.6	机器人性能指标	75
	本章小结	78
<b>第5章</b>	<b>刚体一般运动及螺旋</b>	<b>79</b>
5.1	空间直线的 Plücker 坐标	79
5.2	刚体的一般运动	80
5.3	刚体的一般瞬时运动	82
5.4	刚体的运动螺旋	83
5.5	机构中连杆基本的瞬时运动	84
5.5.1	连杆的瞬时转动	84
5.5.2	连杆的瞬时移动	85
5.5.3	连杆的瞬时螺旋运动	85
5.5.4	机械臂的运动螺旋	86
5.6	螺旋代数运算	87

---

5.7 刚体上作用的力螺旋	88
5.7.1 空间任意力系的平衡方程	88
5.7.2 刚体上作用力的螺旋表示	90
5.7.3 反螺旋的物理意义	91
本章小结	93
<b>第6章 关节轨迹规划</b>	<b>94</b>
6.1 三次多项式规划	95
6.2 直线与抛物线混合规划	96
6.3 多点的三次多项式规划	98
6.4 多点直线与抛物线混合规划	99
本章小结	100
<b>第7章 机器人动力学</b>	<b>101</b>
7.1 静力学	101
7.1.1 单个杆件静力学	101
7.1.2 递归法计算关节力	103
7.1.3 能量方法	106
7.2 牛顿-欧拉方程	107
7.2.1 单杆牛顿-欧拉方程	107
7.2.2 动力学方程的物理意义	112
7.2.3 机器人动力学方程的结构	113
7.2.4 机器人系统计算仿真	114
7.2.5 递归牛顿-欧拉算法	116
7.3 拉格朗日方程	120
7.3.1 第一类拉格朗日方程	120
7.3.2 第二类拉格朗日方程	122
7.3.3 欧拉-拉格朗日方程	126
7.3.4 $n$ 自由度机械臂动力学方程	127
本章小结	131
<b>第8章 机器人控制</b>	<b>132</b>
8.1 二阶线性系统	132
8.2 二阶线性系统的控制	133
8.3 机器人独立关节控制	136
8.3.1 永磁直流电机模型	136
8.3.2 含轮系的直流电机控制模型	138
8.3.3 单关节独立控制模型	140
8.3.4 PD 控制器	140
8.3.5 PID 控制器	141
8.3.6 PID 控制器增益的选择	142

---

8.3.7 前馈控制 .....	143
8.4 动态控制 .....	145
8.4.1 控制分解法 .....	145
8.4.2 机器人计算力矩控制法 .....	147
本章小结 .....	151
附录 .....	152
附录 A 数学基础 .....	152
附录 B 旋转矩阵与四元数参数转换算法 .....	160
附录 C 动力学基础知识 .....	162
附录 D 单杆 PD 控制仿真 .....	166
附录 E 独立关节控制仿真 .....	168
附录 F PD 计算力矩控制仿真 .....	171
参考文献 .....	175
名词索引 .....	177



# 第 1 章 绪 论

## 1.1 引 言

1962 年,美国万能自动化公司(Unimation)机器人 Unimate 在美国通用汽车公司(GM)投入使用,标志着第一代工业机器人的诞生。工业机器人作为集机械、电子、控制、计算机、传感器、人工智能等多学科先进技术于一体的现代制造业重要的自动化装备,是当代科技发展的重要内容。对工业机器人的定义,不同的国家有不同的看法,美国机器人工业协会定义为:“机器人是一种可程序的多功能操纵器,被设计出来用于运送材料、零件、工具,或者作为专用设备在可程序控制下执行不同的任务。”日本工业机器人协会把工业机器人定义为:“工业机器人是一种装备具有记忆装置和末端执行器的,能够转动并通过自动完成各种移动来代替人类劳动的通用机器。”国际标准化组织(ISO)把工业机器人定义为:“工业机器人是一种自动的、位置可控的、具有编程能力的多功能机械手,这种机械手具有多个轴,能够借助于可程序来处理各种材料、零件、工具和专用装置,以执行各种任务。”我国的蒋新松院士把工业机器人定义为:“一种拟人功能的机械电子装置。”

日本川崎重工于 1967 年从美国 Unimation 公司引进机器人技术,于 1968 年试制第一台川崎的 Unimate 机器人。1974 年,美国 Cincinnati Milaeron 公司推出第一台 T3 机器人。1978 年日本山梨大学的牧野洋提出 SCARA 机构并完成实用的 SCARA(Selective Compliant Articulated Robot for Assembly)机器人开发。1979 年,Unimation 公司推出可用于装配的机器人 PUMA(Programmable University Manipulator)。PUMA 机器人的推出可以看作串联工业机器人成熟的标志。

在机器人学研究方面标志性成果如下:

1954 年,Denavit-Hartenberg 提出表达空间杆件几何关系的一般方法,该方法用于分析机器人正运动学。

1962 年,Ernst 和 Boni 分别研究了带触觉和压觉传感器的机械手。

1964 年,Uicker 博士研究了空间杆机构的动力学问题。

1968 年,Pieper 用代数法解逆运动学问题。

1972 年,Paul 研究关节空间轨迹规划问题。

1973 年,Bolles 和 Paul 在 Stanford Arm 配置了视觉和力觉传感器,完成了水泵装配。

1974 年,Bejezy 研究了机器人动力学和计算力矩控制方法。

1979 年,Lozano 和 Wesley 研究了机器人避障问题。

其中 1954 年和 1962 年的成果是工业机器人技术运动学和动力学的基础,而当时的研究是面向机构学的。到目前为止,世界上各国对工业机器人的研究已经历经了几十年的历程,日本、美国、法国、德国的工业机器人产业日趋成熟和完善,逐渐形成一批在国际上较有

影响力的知名的工业机器人公司,如日本的安川、OTC、松下、FANUC、川崎等;德国的 KUKA、CLOOS;瑞典的 ABB;意大利的 COMAU 及奥地利的 IGM 等。国内现有机器人研究和应用有沈阳新松机器人自动化股份有限公司、四川绵阳四维焊接自动化设备有限公司等,其中以沈阳新松机器人自动化股份有限公司的机器人产品最具代表性。

## 1.2 工业机器人概述

### 1.2.1 机器人系统的基本组成

工业机器人系统一般由任务、控制器、执行机构和环境四个相互作用的部分组成,如图 1.1 所示。

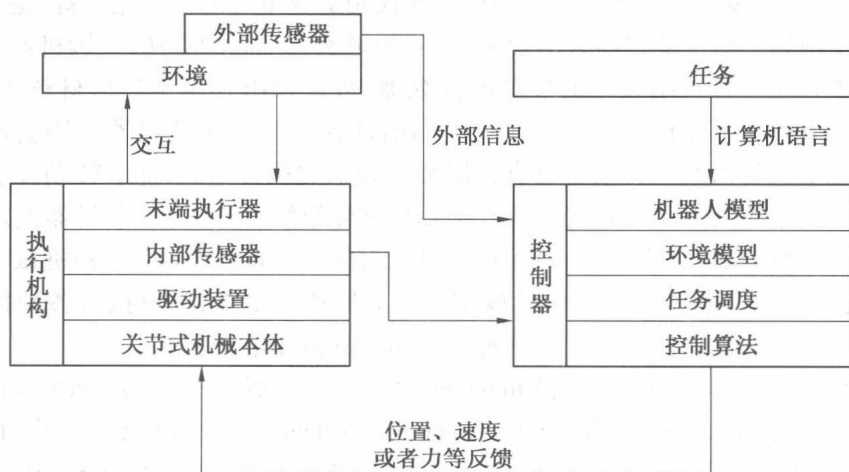


图 1.1 机器人系统的组成

(1)任务。任务是指环境的初始状态和目标状态的差别。任务必须用符合机器人语言规范要求的程序语言来描述,并存入机器人的控制器中,控制器负责解释。

(2)控制器。控制器是工业机器人系统的大脑,由计算机硬件、软件及其他控制电路组成。其中软件包括机器人专用语言解释器、机器人运动学、动力学及机器人控制算法、轨迹规划器及任务调度,任务调度负责信息处理及人机交互,按照预存信息、接收机器人状态信号及环境信息,产生控制信号去驱动机器人各个关节运动。工业机器人控制器在物理上分为两层,即工控机与伺服控制器;在逻辑上一般为三层,即组织层,协调层和执行层,如图1.2所示。

(3)执行机构。执行机构也称机械手、操纵器或操作手,一般为多关节机械结构,由连杆、关节和末端执行器组成,其末端执行器可按照环境不同而改变,如焊枪、吸盘及手爪等。

(4)环境。环境指机器人执行任务所达到的几何空间内全部事物自然特性所决定的条件。在此环境中,机器人可能需要和其他辅助装置共同完成任务,也可能会遇到障碍物和其他突发事件。环境信息一般是确定和已知的,这种环境称为结构化环境。在此环境下,操作人员利用机器人编程语言编制机器人工作程序,机器人执行程序,可以实现已知的任务。在许多情况下,环境具有未知或不确定性,称为非结构化环境。在此环境下,为了实现不确定

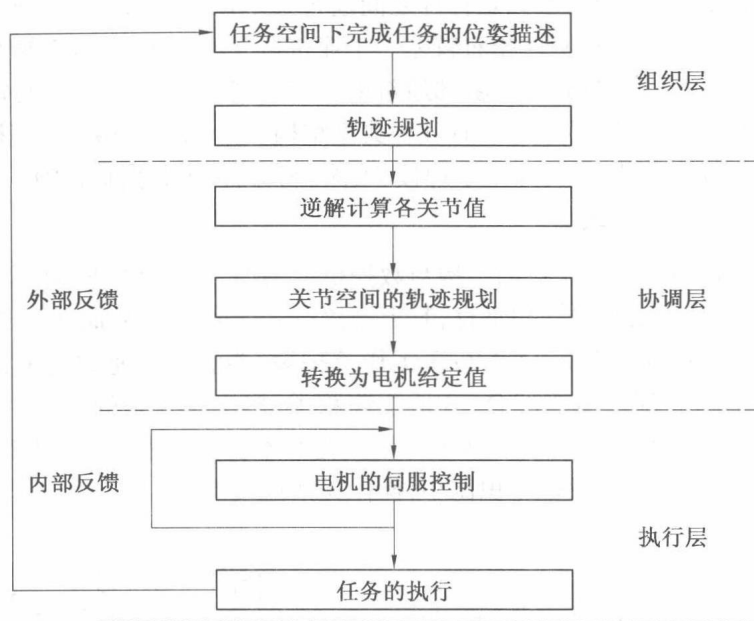


图 1.2 机器人控制过程

的任务,机器人拥有外部传感器,对工作对象、外部环境具有一定的感知能力,例如,外部传感器为视觉系统或力传感系统,获取的信息参与控制算法中。

工业机器人所具备的功能是由其机械部分、传感部分及控制部分内部集成所决定的,但是,工业机器人的作业能力还取决于与外部环境的交互能力,例如,上下料机器人在与冲压设备的交互中感知模具开启状态、工件馈送器状态等信息,与外部设备的节拍协调一致,实现正确无误的动作,所以机器人与环境的交互是一个重要问题。机器人与外部环境的交互包括硬件环境和软件环境。与硬件环境的交互主要是与外部设备的通信、工作域中障碍和自由空间的描述及操作对象物的描述。与软件环境的交互主要是与生产单元监控计算机所提供的管理信息系统的通信。工业机器人不仅要与已知的定义了的外部环境进行交互,而且有可能面临变化的未知的外部环境。在这种情况下,工业机器人仅仅实现可编程控制是不够的,工业机器人被引导去完成时,在任何瞬时都要对实际参数信息与所要求的参数信息进行比较,对外部环境所发生的变化产生新的适应性指令,实现其正确的动作功能,这就是工业机器人的在线自适应能力。例如,手部配置有力传感器的装配机器人,在进行圆销插入作业时,需要比较销与孔的位置信息,并且力传感器还要获得装配过程中零件的接触特征,从而进行微量移动控制,并利用手部的柔顺性实现圆销插入作业。机器人与环境更高一层的交互是从外部环境中感知、学习、判断和推理,实现环境预测,并根据客观环境规划自己的行动,这就是自律型机器人和智能化机器人。机器人与环境交互是机器人技术的关键,机器人在没有人工干预的情况下对外部环境的自我适应、行动的自我规划,是机器人技术及其应用的研究方向。

### 1.2.2 工业机器人常见的结构

以串联机构为构型设计而成的工业机器人本体,称之为串联工业机器人。它是较早应

用于工业领域的机器人,其结构形式是杆件之间通过关节串联形成一个平面或者空间开链机构,其运动链长、负载能力和刚性相对较差。工业机器人本体包括基座、臂部和腕部,大多数工业机器人具有3~6个驱动关节,腕部通常由1~3个驱动关节组成。目前,串联工业机器人按照前三个驱动关节的布置形式,有五种典型结构,即笛卡儿坐标型、圆柱坐标型、球面坐标型、SCARA型和关节型,主要应用于焊接、喷涂、码垛、包装、分拣等领域。

### 1. 笛卡儿坐标型工业机器人

笛卡儿坐标型机器人(图1.3)的结构与数控机床类似,其工作空间内的三个运动轴( $x$ ,  $y$ ,  $z$ )由直线运动构成,运动方向互相垂直,其末端执行器的姿态由附加的旋转关节或机构实现。笛卡儿坐标型机器人具有如下优点:①工作节拍短,能满足高速的要求;②容易与生产线上的传送带或加工装配机械相配合;③适于装箱类、多工序复杂的工作,定位容易改变;④定位精度高,可达到 $\pm 0.5$  mm以下,载重发生变化时不会影响精度;⑤易于控制。其缺点是机构体积庞大,工作空间与设备体积比小,操作灵活性较差。

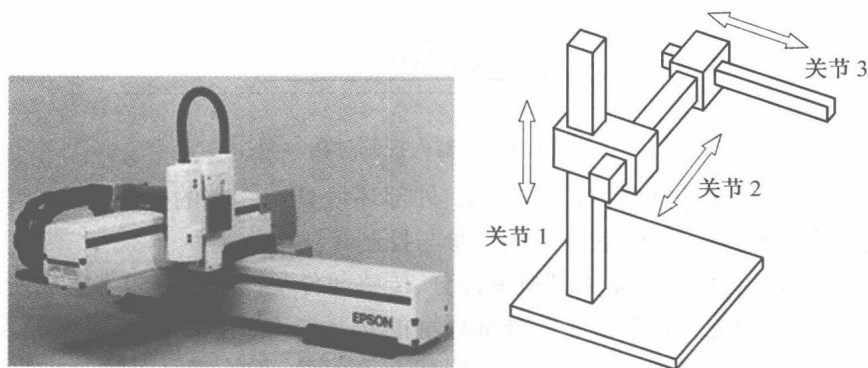


图1.3 Epson 笛卡儿型机器人及结构布置示意图

### 2. 圆柱坐标型工业机器人

圆柱坐标型工业机器人在基座水平转台上装有立柱,水平臂可沿立柱做上下运动并可在水平方向伸缩,其末端工作空间形成一个圆柱面,称为圆柱坐标型工业机器人。它适用于搬运和测量工件,具有直观性好、结构简单、本体占用空间较小等特点。这种结构方案的优点是末端执行器可获得较高的速度,缺点是末端执行器外伸离开立柱轴心越远,其定位精度越低。图1.4所示为一款典型圆柱坐标型工业机器人。

### 3. SCARA 型工业机器人

图1.5所示为选择顺应性装配工业机器人(Selective Compliant Articulated Robot for Assembly, SCARA),是一种特殊类型的圆柱坐标型机器人,通常该机器人具有两个转动、一个平动及一个转动,共四个驱动关节,末端具有四个运动自由度(包括 $x$ ,  $y$ ,  $z$ 方向的平动自由度和绕 $z$ 轴的转动自由度)。SCARA工业机器人在 $x$ ,  $y$ 方向上具有顺从性,而在 $z$ 轴方向具有良好的刚度,此特性特别适合于装配工作,故SCARA工业机器人首先大量用于装配印刷电路板和电子零部件。SCARA工业机器人的另一个特点是其串联的平面2R机构,类似人的手臂,可以伸进有限空间中作业,然后收回,适合于搬动和取放物件。

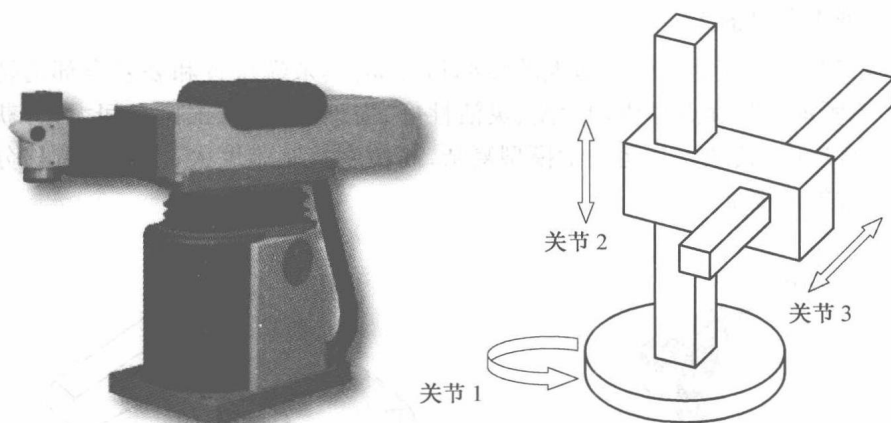


图 1.4 Seiko 圆柱坐标型工业机器人及结构布置示意图

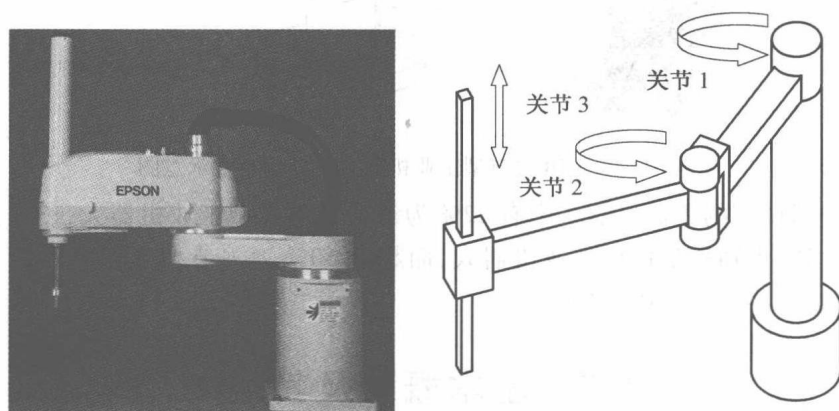


图 1.5 Epson SCARA 工业机器人及结构布置示意图

#### 4. 球面坐标型工业机器人

球面坐标型工业机器人驱动关节的布置包括两个转动关节和一个移动关节,末端执行器可以在水平面内转动,也可以在垂直面内摆动,并且可以做里外伸缩,其工作空间形成球面的一部分,称为球面坐标型工业机器人。图 1.6 为一款球面坐标型工业机器人。

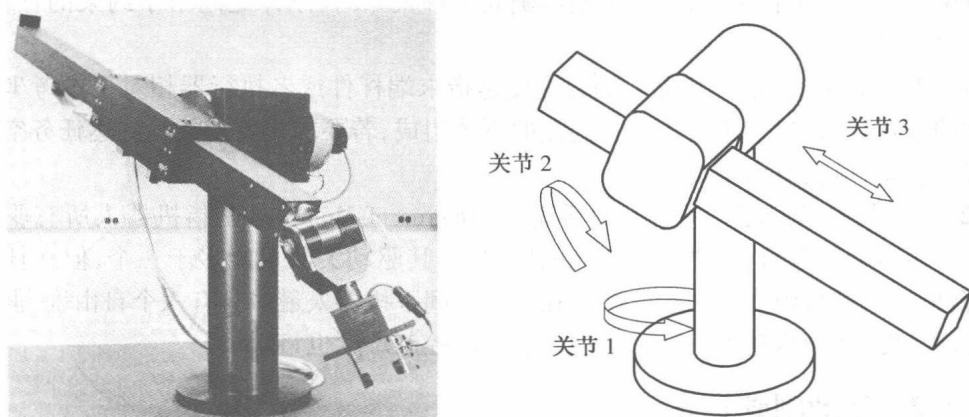


图 1.6 Stanford 球面坐标型工业机器人及结构布置示意图

## 5. 关节型工业机器人

关节型工业机器人的结构类似人的腰部和臂部,其末端位置和姿态全部由转动关节实现,如图 1.7 所示。其优点是机构紧凑,灵活性好,占地面积小,工作空间大,可获得较高的末端操作器线速度;其缺点是运动学模型复杂,高精度控制难度大,空间线位移分辨率取决于机器人手臂的位姿。

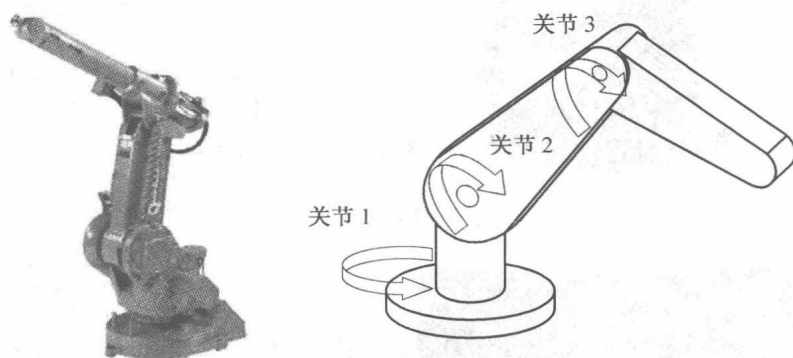


图 1.7 ABB 关节型工业机器人及结构布置示意图

目前,全球现有的工业机器人中有 22% 为笛卡儿坐标型工业机器人,13% 为 SCARA 型工业机器人,4% 为圆柱坐标型工业机器人,而超过 60% 为关节型工业机器人,关节结构已逐渐成为工业机器人的通用结构。

## 1.3 基本概念及其定义

### 1.3.1 机器人的自由度与活动度

刚体相对于参考坐标系进行独立运动的数目为刚体的自由度 (Degree of Freedom, DOF)。在笛卡儿坐标系下,刚体能够进行的运动为沿绕三个坐标轴平移运动或者旋转运动,意味着能够运用三个平移和三个旋转参数描述刚体相对于参考坐标系的位置和方向。空间自由刚体有六个自由度,当两个刚体确立某种关系时,刚体之间由于约束的存在,将失去一些自由度。

(1) 机器人的自由度。机器人的自由度是指末端杆件或者执行器相对于参考坐标系独立运动的数目,通常机械手臂由互相连接的刚体组成,若要求机器人能够到达任务空间的任意位置和姿态,应具有六个自由度。

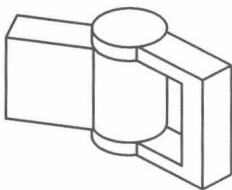
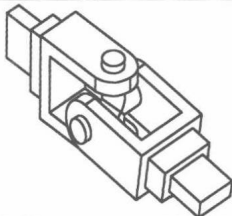
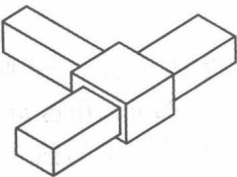

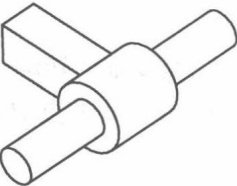
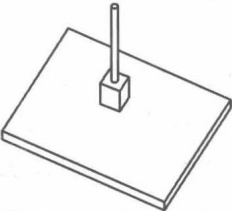
(2) 机器人的活动度。机器人的活动度 (Degree of Mobility) 是指机器人所有驱动关节具有的自由运动的数目,在平面内运动的机器人,其驱动关节可能多于三个,但在任何情况下,此台机器人的自由度不多于三个。在三维空间下机器人最多具有六个自由度,但可以有较多的活动度,活动度越多,机器人灵活性越大,控制难度也将增加。

### 1.3.2 运动副或关节

一般而言,机械臂是由杆件通过运动副依次连接而成的机构。杆件是组成机构的基本

运动单元,可以是一个零件,也可以由若干零件刚性连接在一起组成。当由杆件组成机构时,需要以一定的方式把各个杆件依次连接起来,每个杆件至少与另外一个杆件连接,连接不是刚性的,应保证彼此连接的两个杆件产生某些相对运动。由两个杆件组成的可动的连接称为运动副,在工业机器人机构中形象地称为关节(Joint)。常用运动副的简图、代号及自由度数见表 1.1。机构常以它所含的全部运动副的代号来命名,例如,从基座开始,一个转动副和两个移动副组成的机构,例如图 1.4 所示机构,通常称为 RPP 机构。

表 1.1 常见运动副的简图、代号及自由度

运动副	简图	代号	自由度	运动副	简图	代号	自由度
转动副		R	1	万向铰 (胡克铰)		U(T)	2
移动副		P	1	球副		S	3
圆柱副		C	2	平面副		E	3

### 1.3.3 运动链

两个以上的杆件通过运动副的连接而构成的系统称为运动链(Kinematics Chain)。如果运动链的杆件未构成首尾封闭的结构,称为开环(Open-loop)运动链,简称开链。如果运动链的各杆件构成首尾封闭的结构,称为闭环(Close-loop)运动链,简称闭链。在运动链中,如果每个杆件都在同一平面上,或者在相互平行的平面内运动,则称为平面运动链,否则称为空间运动链。

### 1.3.4 机构

在运动链中,如果以某一杆件为参考系,当某些杆件按给定的运动规律运动时,其余所有杆件都有确定的相对运动,那么此运动链便成为一个机构。机构中作参考系的杆件称为机架,按给定运动规律运动的杆件称为原动件,其余的称为从动件。从动件的运动规律取决于原动件的运动规律和机构的结构形式。多于一个闭链的机构称为多闭链机构或多环机构,只有一个闭链的机构称为单闭链机构。

### 1.3.5 笛卡儿坐标系和广义坐标

考虑一个具有  $n$  个质点的系统,  $\{S\} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ , 在笛卡儿坐标系下, 第  $i$  个点的位置矢量是  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(x_i, y_i, z_i)$ , 可以表示为

$$\mathbf{r}_i = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k}, i = 1, 2, \dots, n \quad (1.1)$$

$n$  个质点的系统需要  $3n$  个物理坐标来确定其位置, 在许多情况下, 为了方便分析系统的运动, 使用一组相互独立的变量集合  $q_1, q_2, \dots, q_m$  来表示, 其物理坐标为

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1, q_2, \dots, q_m) \\ y_1 &= y_1(q_1, q_2, \dots, q_m) \\ z_1 &= z_1(q_1, q_2, \dots, q_m) \\ &\vdots \\ x_n &= x_n(q_1, q_2, \dots, q_m) \\ y_n &= y_n(q_1, q_2, \dots, q_m) \\ z_n &= z_n(q_1, q_2, \dots, q_m) \end{aligned} \quad (1.2)$$

则  $q_1, q_2, \dots, q_m$  为广义坐标, 可以完整地、唯一地描述动态系统的位置。一般而言, 一个机构的运动可由  $m$  个相互独立的广义坐标来描述, 系统的任意位形都可以用这  $m$  个广义坐标来表示。广义坐标必须是相互独立的, 任何一组能够完全描述系统运动的独立变量都可以选作广义坐标, 可以是笛卡儿坐标, 也可以是其他量, 如极坐标、球坐标、相对角位移或线位移。

**【例 1.1】** 如图 1.8 所示的平面 2R 机构, 杆 1 的长度为  $l_1$ , 绕  $z$  轴的转动角为  $q_1$ ; 杆 2 的长度为  $l_2$ , 相对于杆 1 的转动角为  $q_2$ 。杆 2 绕  $z$  轴的转动角为  $\varphi$ , 杆 2 上点  $P$  在笛卡儿坐标系下的位置矢量  $\mathbf{p}(x_p, y_p)$  可以表示为

$$\begin{cases} \varphi = q_1 + q_2 \\ x_p = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ y_p = l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2) \end{cases} \quad (1.3)$$

式中,  $q_1, q_2$  是描述运动的独立参数, 确定一个系统的运动状况, 为系统的广义坐标。

### 1.3.6 位形空间

#### 1. 连杆的位姿 (Position and Orientation)

连杆的位置和姿态可以用与连杆固连的坐标系相对于参考坐标的位置和姿态表示, 如图 1.9 所示, 平面运动的连杆的位置和姿态  $\mathbf{x}_e$  可以给定为

$$\mathbf{x}_e = (\mathbf{r}, \mathbf{R}_\theta) \quad (1.4)$$

式中,  $\mathbf{r}$  表示坐标系 {1} 原点相对于参考系 {0} 的位置,  $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ;  $\mathbf{R}_\theta$  表示坐标系 {1} 相对 {0} 的

方向矩阵,  $\mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ 。位置和姿态也可以给定为  $(x, y, \theta)$ ,  $\theta$  表示连杆绕  $z$  轴转动的角度。



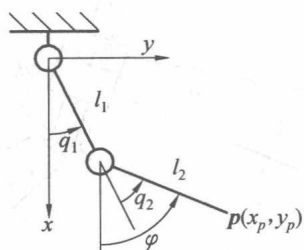


图 1.8 平面 2R 机构

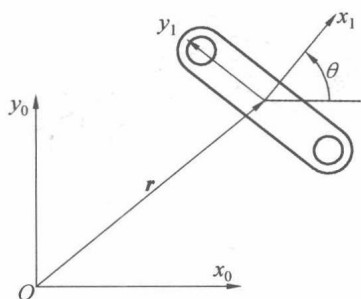


图 1.9 平面单杆的位置与姿态

## 2. 机构位形 (Mechanism Configuration)

机构位形是指在符合关节装配约束的条件下,机构运动瞬时各连杆的位姿组成,以平面四杆机构为例,图 1.10 所示为平面四杆机构的两种位形。

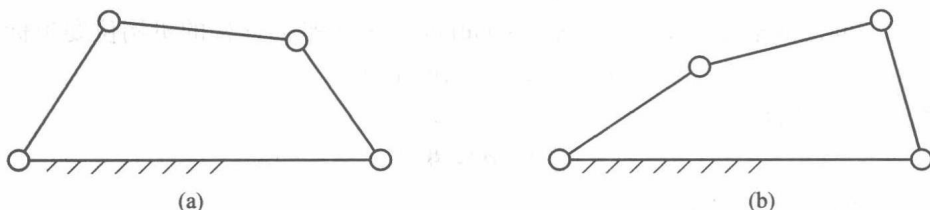


图 1.10 平面四杆机构的两种位形

(1) 转动关节的装配约束。假定有两个连杆  $L_j$  和  $L_k$ , 如图 1.11 所示, 两者通过转动关节相连, 此连接相当于杆  $L_j$  上点  $P_i$  和杆  $L_k$  上  $Q_i$  点重合, 在连杆  $L_j$  和  $L_k$  上分别建立固连坐标系  $F_j$  和  $F_k$ , 有以下约束条件

$$\mathbf{r}_j + \mathbf{R}_j^{F_j} \mathbf{p}_i = \mathbf{r}_k + \mathbf{R}_k^{F_k} \mathbf{q}_i \quad (1.5)$$

式中,  $\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k$  分别表示坐标系  $F_j$  和  $F_k$  原点在参考坐标系  $F_1$  下的位置矢量;  $\mathbf{R}_j, \mathbf{R}_k$  为坐标系  $F_j$  和  $F_k$  相对于参考坐标系  $F_1$  的方向矩阵;  ${}^{F_j} \mathbf{p}_i, {}^{F_k} \mathbf{q}_i$  为点  $P_i$  和  $Q_i$  分别在坐标系  $F_j$  和  $F_k$  下的位置矢量。

(2) 移动关节的装配约束。假定有两个连杆  $L_j$  和  $L_k$ , 两者通过移动关节相连, 如图 1.12 所示, 此连接为初始状态时, 杆  $L_j$  上的点  $P_i$  和杆  $L_k$  上的点  $Q_i$  重合, 随着移动关节的平动, 在关节轴线方向  $\mathbf{e}_i$  上两点之间的距离为  $d_i$ , 有以下约束条件:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_j + \mathbf{R}_j^{F_j} \mathbf{p}_i &= \mathbf{r}_k + \mathbf{R}_k ({}^{F_k} \mathbf{q}_i + d_i {}^{F_k} \mathbf{e}_i) \\ \mathbf{R}_k &= \mathbf{R}_j \mathbf{R}_{jk} \end{aligned} \quad (1.6)$$

式中,  $\mathbf{R}_{jk}$  为坐标系  $F_k$  相对于坐标系  $F_j$  的方向矩阵。