高等工程数学

Advanced Engineering Mathematics

赵东红　赵向奎　孙玉华　何庆辉　编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高等工程数学

赵东红　赵向奎　孙玉华　何庆辉　编

机 械 工 业 出 版 社

本书是根据高等院校“工科类研究生数学基础课程教学基本要求”编写的，主要包括矩阵论、最优化方法、应用数理统计、积分变换4篇内容. 第1篇矩阵论的内容有：矩阵的标准形和矩阵分析；第2篇最优化方法的内容有：基础知识和最优化方法；第3篇应用数理统计的内容有：参数估计、假设检验、方差分析与正交试验设计、回归分析；第4篇积分变换的内容有：傅里叶变换和拉普拉斯变换.

根据工程类研究生数学的教学特点，本书突出实用性和针对性，内容丰富，并尽量做到清晰简明，注重理论联系实际，使其通俗易懂.

本书适合工程类研究生作为教材使用，也可作为科研人员的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等工程数学/赵东红等编. —北京：机械工业出版社，2015.6
ISBN 978-7-111-50844-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①赵… Ⅲ.①工程数学-研究生-教材 Ⅳ.①TB11

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第176794号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑：汤 嘉 责任编辑：汤 嘉 孟令磊
版式设计：赵颖喆 责任校对：陈 越
封面设计：张 静 责任印制：李 洋
北京圣夫亚美印刷有限公司印刷
2016年1月第1版第1次印刷
184mm×260mm ·19.75印张·485千字
标准书号：ISBN 978-7-111-50844-1
定价：39.80元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
电话服务 网络服务
服务咨询热线：010-88379833 机 工 官 网：www.cmpbook.com
读者购书热线：010-88379649 机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
教育服务网：www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版 金 书 网：www.golden-book.com

前　　言

“高等工程数学”是大学非数学专业学生学习的一门重要的数学基础课. 本课程体现了工科专业特色，是各个学科领域进行理论和实践工作的必要基础，而且也是培养学生的基本数学素质，提高学生综合分析、解决问题能力和创新能力的重要保证.

本教材是北京科技大学应用数学系长期讲授“高等工程数学”课程的任课教师，根据他们多年的教学经验，按照新形势下教材改革的精神，结合“工科类数学基础课程教学基本要求”编写而成，教材力求与时俱进. 本教材包括以下内容：

(1) 第 1 篇介绍了矩阵论的内容. 利用相似对角形矩阵较方便地计算高次幂，介绍 Jordan 标准形问题及其应用，然后介绍矩阵的微积分. 该部分内容是研究数值分析、控制理论、稳定性理论的重要工具.

(2) 第 2 篇介绍了最优化方法. 最优化方法的发展迅速，已形成了许多分支，如非线性规划、多目标规划、几何规划、动态规划、不确定规划等. 第 2 篇进行了重组，重点介绍了相对来说与工程专业结合较为密切的非线性规划和多目标规划.

(3) 第 3 篇介绍了统计分析的主要内容. 结合工科专业后续课程的主要特点，本教材有针对性地选取了参数估计、假设检验、回归分析、方差分析等主要内容.

(4) 第 4 篇介绍了积分变换的内容，常用的积分变换有傅里叶（Fourier）变换、拉普拉斯（Laplace）变换. 这两种积分变换在电工技术、自动控制、无线电技术及通信技术中有着广泛的应用，并已成为这些领域中的重要工具.

本教材所适用的院校类别较为广泛，专业不一. 我们认为，教材内容要比教学大纲多一些，要比教师在课堂上讲授的多一些，这样能照顾到各类学校各个专业的需要，能满足不同程度的学生学习的需要. 学习高等工程数学的目的是培养学生运用数学的思想、理论和方法，能够充分地运用所学内容解决科研、生产和生活中的实际问题. 本教材在主要内容之后增编了工程案例，使学生能够学以致用.

本教材内容的阐述始终以“加强基础，强调应用”为指导思想，使学生能尽快地掌握高等工程数学的基本理论和方法，培养学生的数学素养，提高学生分析问题和解决问题的能力. 本教材由赵东红任主编并负责编写第 3 篇，赵向奎编写第 1 篇，孙玉华编写第 2 篇，何庆辉编写第 4 篇. 全书由赵东红统稿，并由北京科技大学高等工程数学教学组集体讨论定稿.

本教材的编写和出版得到了北京科技大学“十二五”教材经费的资助. 在本教材的编写过程中，北京科技大学廖福成教授认真审阅了书稿，提出了许多中肯的修改意见，中国农业大学王来生教授给予了热情的关心和真诚的帮助，在此一并表示衷心的感谢.

由于编者水平有限，错漏之处在所难免，恳请同行和读者不吝指正.

编　者

目　录

第 1 篇　矩　阵　论

第 1 章　矩阵的标准形

通过对线性代数的学习，我们知道一般方阵的高次幂运算很复杂．如果方阵可以（相似）对角化，则可以利用相似对角形矩阵较方便地计算高次幂．由此看出对角化理论能简化矩阵的运算，方便矩阵的应用．但是并不是所有的矩阵都能对角化，对于不能对角化的矩阵，如何来简化矩阵的运算呢？我们可以找到与对角化的形式尽量接近的 Jordan 标准形，来简化矩阵的运算．本章首先复习矩阵的对角形，然后逐步介绍 Jordan 标准形问题及其应用．

1.1　相似对角化

首先回顾线性代数中的一些与本章有关的基本概念．

1.1.1　特征值与特征向量

定义 1.1.1　对 m 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，若存在数 λ，及非零向量（列向量）$\boldsymbol{x}$，使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，则称数 λ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量．

如果 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，则 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0$，称 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式．

例 1.1.1　$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$，求其特征值和特征向量．

解　首先计算特征值

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=0,$$

$$(\lambda+1)^2(\lambda-5)=0.$$

解得特征值分别为

$$\lambda_1=\lambda_2=-1,\ \lambda_3=5.$$

(1) 属于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 的特征向量满足:

$$(-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

即,

$$\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

$$\xi_1+\xi_2+\xi_3=0,$$

解得

$$\begin{cases}\xi_1=\xi_1,\\\xi_2=\xi_2,\\\xi_3=-\xi_1-\xi_2.\end{cases}$$

可取基础解系

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix};$$

(2) 属于特征值 $\lambda_3=5$ 的特征向量满足:

$$(5\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

即

$$\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0},$$

解得

$$\xi_1=\xi_2=\xi_3,$$

可取基础解系

$$\boldsymbol{x}_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

定理 1.1.1 设 λ_1, λ_2, …, λ_m 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互不相同的特征值, $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, …, $\boldsymbol{p}_m$ 是依次与之对应的特征向量, 如果 λ_1, λ_2, …, λ_m 互不相同, 则 $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, …, $\boldsymbol{p}_m$ 线性无关.

1.1.2 矩阵对角化的充要条件

定理 1.1.2 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是它具有 n 个线性无关的特征向量.

证明 (充分性) 已知 $\boldsymbol{A}$ 具有 n 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, …, $\boldsymbol{x}_n$, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i=\lambda\boldsymbol{x}_i,i=1,2,\cdots,n$$

$$A(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) = (\lambda_1 x_1 \quad \lambda_2 x_2 \quad \cdots \quad \lambda_n x_n)$$
$$= (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性无关，故 $P = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)$ 为满秩矩阵.

令

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

则有

$$AP = P\Lambda$$
$$P^{-1}AP = \Lambda$$

（必要性） 已知存在可逆方阵 P，使得

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

将 P 写成行向量 $P = (P_1 \quad P_2 \quad \cdots \quad P_n)$，其中 P_n 为 n 维列向量

$$(AP_1 \quad AP_2 \quad \cdots \quad AP_n) = (\lambda_1 P_1 \quad \lambda_2 P_2 \quad \cdots \quad \lambda_n P_n)$$

可见，λ_i 为 A 的特征值，P_i 为 A 的特征向量. 所以矩阵 A 具有 n 个线性无关的特征向量.

推论 1.1.1　n 阶方阵有 n 个互异的特征值，则其必可对角化.

1.2　矩阵的 Jordan 标准形

由上节知识可知，许多方阵不能对角化，那么对于这类矩阵，我们要寻找较简单的矩阵与之相似. 而 Jordan 标准型就是一类最接近对角的方阵.

定义 1.2.1　形如

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_2 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{r_i \times r_i}$$

的矩阵称为 r_i 阶 Jordan 块. 由若干个 Jordan 块构成的分块对角阵

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \\ & & & J_i \end{pmatrix}$$

称为 Jordan 矩阵.

Jordan 矩阵是一类特殊的上三角阵，该类矩阵有着非常重要的理论价值和应用. Jordan 块本身是一个 Jordan 矩阵，对角阵也是一个 Jordan 矩阵，它的每个 Jordan 块是一阶的. 可以看出，Jordan 标准型 $\boldsymbol{J}$ 的对角线元素就是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，并且 Jordan 矩阵（除对角阵外）至少有一特征值 λ_i 的代数重数大于其几何重数.

Jordan 矩阵的讨论涉及很多 λ 矩阵的知识，接下来介绍 λ 矩阵的概念及其相关理论.

定义 1.2.2 设 $\boldsymbol{A}(\lambda)=(a_{ij}(\lambda))_{m\times n}$，其中 $a_{ij}(\lambda)$ 都是 λ 的多项式，则称 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 是 λ 矩阵或多项式矩阵 .

对 λ 矩阵进行的如下三种变换称为 λ 矩阵的初等行(列) 变换：

(1) 交换两行(列)；

(2) 某一行(列) 乘以非零的常数；

(3) 某一行(列) 加另一行(列) 的 $\phi(\lambda)$ 倍，$\phi(\lambda)$ 是一个多项式 .

定义 1.2.3 如果 λ 矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 可经过一系列的初等变换变为 $\boldsymbol{B}(\lambda)$，则称 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{B}(\lambda)$等价.

关于 λ 矩阵的等价性，我们给出如下结果：

定理 1.2.1 任意一个非零的 $s\times n$ 的 λ 矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 都等价于下列形式的矩阵：

$$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.2.1}$$

其中 $r\geqslant 1$，$d_i(\lambda)$ $(i=1, 2, \cdots, r)$ 是首项系数为 1 的多项式，且 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)$($d_i(\lambda)$ 可以除尽 $d_{i+1}(\lambda)$)，$i=1, 2, \cdots, r-1$ 矩阵(1.2.1) 称为 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的 Smith 标准形. 可以证明，矩阵(1.2.1) 对角线上的非零元素 $d_i(\lambda)$ $(i=1, 2, \cdots, r)$ 不随矩阵初等变换而变换，因而称 $d_i(\lambda)$ $(i=1, 2, \cdots, r)$ 为 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的不变因子.

定义 1.2.4 设多项式矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的秩为 r，对于正整数 $k(1\leqslant k\leqslant r)$，$\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的全部 k 阶子式的首项系数为 1 的最大公因式 $D_k(\lambda)$ 称为 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子，规定 $D_0(\lambda)=1$.

容易验证初等变换不改变 λ 矩阵的行列式因子，所以等价的矩阵有相同的行列式因子. 因此，若 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 有标准形(1.2.1)，则 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的行列式因子为

$$D_k(\lambda)=d_1(\lambda)d_1(\lambda)\cdots d_k(\lambda)(k=1,2,\cdots,r),$$

其中，$d_k(\lambda)$ $(i=1, 2, \cdots, k)$ 是 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的不变因子．所以有

$$d_1(\lambda)=D_1(\lambda), d_2(\lambda)=D_2(\lambda)/D_1(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)=D_r(\lambda)/D_{r-1}(\lambda).$$

我们将不变因子分解成一次因子之积

$$\begin{aligned} d_1(\lambda)&=(\lambda-\lambda_1)^{e_{11}}(\lambda-\lambda_2)^{e_{12}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{e_{1s}} \\ d_2(\lambda)&=(\lambda-\lambda_1)^{e_{21}}(\lambda-\lambda_2)^{e_{22}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{e_{2s}} \\ &\vdots \\ d_r(\lambda)&=(\lambda-\lambda_1)^{e_{r1}}(\lambda-\lambda_2)^{e_{r2}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{e_{rs}} \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

在式(1.2.2) 中，λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_s 互异，因为 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)$，$i=1, 2, \cdots, r-1$，所以

$$e_{1j}\leqslant e_{2j}\leqslant\cdots\leqslant e_{rj}(1\leqslant j\leqslant s).$$

在式(1.2.2) 中，所有指数大于零的因子 $(\lambda-\lambda_j)^{e_{ij}}$ $(1\leqslant i\leqslant r;\ 1\leqslant j\leqslant s;\ e_{ij}>0)$ 都称为 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的初等因子．要注意，在计算初等因子个数时，重复的初等因子按重数计算，全部初等因子称为 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的初等因子组.

例 1.2.1　试用初等变换将多项式矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 化为标准形，其中

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{pmatrix} -\lambda+1 & 2\lambda-1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$$

解

$$\boldsymbol{A}(\lambda)\xrightarrow{c_3+c_1}\begin{pmatrix} 1 & 2\lambda-1 & \lambda \\ 0 & \lambda^2 & -\lambda \\ 1 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2 \end{pmatrix}\xrightarrow{-r_1+r_3}\begin{pmatrix} 1 & 2\lambda-1 & \lambda \\ 0 & \lambda^2 & -\lambda \\ 1 & \lambda^2-\lambda & -\lambda^2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-(2\lambda-1)c_1+c_2,\ -\lambda_{c_1+c_3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & -\lambda \\ 1 & \lambda^2-\lambda & -\lambda^2-\lambda \end{pmatrix}\xrightarrow{\lambda_{c_3+c_2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda^3-\lambda & -\lambda^2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-c_2\leftrightarrow-c_3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 1 & \lambda^2+\lambda & \lambda^3+\lambda \end{pmatrix}\xrightarrow{-(\lambda+1)r_2+r_3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3+\lambda \end{pmatrix}.$$

在上例中，也可以通过求 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的行列式因子把 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 化成 Smith 标准形．容易求出

$$D_0(\lambda)=D_1(\lambda)=1, D_2(\lambda)=\lambda, D_3(\lambda)=\lambda^2(\lambda^2+1)$$

所以 $A(\lambda)$ 的不变因子为

$$d_1(\lambda)=D_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=\frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}=\lambda, d_3(\lambda)=\frac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)}=\lambda(\lambda^2+1).$$

初等因子组在实数范围内为

$$\lambda, \lambda, \lambda^2+1.$$

在复数范围内为

$$\lambda, \lambda, \lambda, +\mathrm{i}, \lambda-\mathrm{i}.$$

例 1.2.2　求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征矩阵的不变因子和初等因子和 Smith 标准形：

$$A\begin{pmatrix}0&0&0&4\\1&0&0&-4\\0&1&0&-3\\0&0&1&4\end{pmatrix}.$$

解

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda&0&0&-4\\-1&\lambda&0&4\\0&-1&\lambda&3\\0&0&-1&\lambda-4\end{pmatrix}$$

$$D_0(\lambda)=D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=D_3(\lambda)=1,D_4(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda+2)^2$$

所以不变因子为

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1,d_4(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda+2)^2$$

初等因子为

$$\lambda+1,\lambda-1,(\lambda+2)^2.$$

Smith 标准形

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda+2)^2\end{pmatrix}.$$

根据初等因子的定义，可以由不变因子求初等因子，但是在一些特殊情形下，例如对角形或分块矩阵还有以下结论：

（1）若多项式矩阵形如

$$A(\lambda)\begin{pmatrix}C(\lambda)&0\\0&0\end{pmatrix}$$

其中 $C(\lambda)=\mathrm{diag}(h_1(\lambda),\ h_2(\lambda),\ \cdots,\ h_r(\lambda))$，则 $h_1(\lambda)$，$h_2(\lambda)$，$\cdots$，$h_r(\lambda)$ 的所有一次因式方幂就构成 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的初等因子组.

（2）若多项式矩阵

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1(\lambda)&&&\\&\boldsymbol{A}_2(\lambda)&&\\&&\ddots&\\&&&\boldsymbol{A}_r(\lambda)\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 是 $m_i\times n_i$ 多项式矩阵，则 $\boldsymbol{A}_1(\lambda)$，$\boldsymbol{A}_2(\lambda)$，$\cdots$，$\boldsymbol{A}_r(\lambda)$ 的初等因子的全体构成 $\boldsymbol{A}_r(\lambda)$ 的初等因子组.

例 1.2.3 求多项式矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的初等因子、不变因子和 Smith 标准形：

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{pmatrix}3\lambda+5&(\lambda+2)^2&4\lambda+5&(\lambda-1)^2\\\lambda+7&(\lambda+2)^2&\lambda+7&0\\\lambda-1&0&2\lambda-1&(\lambda-1)^2\\0&0&(\lambda-2)(\lambda-5)&0\end{pmatrix}.$$

解

$$A(\lambda)\xrightarrow{r_1-r_3}\begin{pmatrix}2\lambda+6 & (\lambda+2)^2 & 2\lambda+6 & 0\\ \lambda+7 & (\lambda+2)^2 & \lambda+7 & 0\\ \lambda-1 & 0 & 2\lambda-1 & (\lambda-1)^2\\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-5) & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-c_3-c_1}\begin{pmatrix}2\lambda+6 & (\lambda+2)^2 & 0 & 0\\ \lambda+7 & (\lambda+2)^2 & 0 & 0\\ \lambda-1 & 0 & \lambda & (\lambda-1)^2\\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-5) & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}\lambda-1 & 0 & 0 & 0\\ \lambda+7 & (\lambda+2)^2 & 0 & 0\\ \lambda-1 & 0 & 2\lambda-1 & (\lambda-1)^2\\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-5) & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}\lambda-1 & 0 & 0 & 0\\ \lambda+7 & (\lambda+2)^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\lambda-1 & (\lambda-1)^2\\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-5) & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B(\lambda) & 0\\ 0 & C(\lambda)\end{pmatrix}.$$

$B(\lambda)$ 的行列式因子　$D_1(\lambda)=1$，$D_2(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+2)^2$

不变因子　$d_1(\lambda)=1$，$d_2(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+2)^2$

初等因子　$(\lambda-1)$，$(\lambda+2)^2$

$C(\lambda)$ 的行列式因子　$D_1(\lambda)=1$，$D_2(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)(\lambda-5)$

不变因子　$d_1(\lambda)=1$，$d_2(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)(\lambda-5)$

初等因子　$(\lambda-1)^2$，$(\lambda-2)$，$(\lambda-5)$

因此，$A(\lambda)$ 的初等因子为：

$$(\lambda-1),(\lambda-1)^2,(\lambda-2),(\lambda-5),(\lambda+2)^2$$

$A(\lambda)$ 的 Smith 标准形是：

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda+2)(\lambda-1)^2\end{pmatrix}.$$

定理 1.2.2　设 $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$可经过相似变换化成唯一的 Jordan 标准型(不计 Jordan 块的排列次序)，即存在可逆矩阵 $P\in\mathbf{C}^{n\times n}$使得 $P^{-1}AP=J$，则称 J 为 A 的 Jordan 标准形，并称 P 为 Jordan 变换矩阵.

证明　设 $n\times n$ 矩阵 A 的特征矩阵 $\lambda I-J$ 的初等因子是

$$(\lambda-\lambda_1)^{m_1},(\lambda-\lambda_2)^{m_2},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{m_s},$$

其中，λ_1，λ_2，…，λ_s 中可能有相同的，并且 $\sum\limits_{i=1}^{s}m_i=n$，每个初等因子$(\lambda-\lambda_i)^{m_i}$对应一个 Jordan 块 J_i，其阶数为 m_i，对角线上的元素是 λ_i，这些 Jordan 块构成一个 Jordan 标准型.

前面已经计算了 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型的全部初等因子也是

$$(\lambda-\lambda_1)^{m_1},(\lambda-\lambda_2)^{m_2},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{m_s},$$

也就是说，$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 与 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}$ 有相同的初等因子，因而有相同的 Smith 标准形，即 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}$，所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{J}$.

下面介绍 Jordan 标准型 $\boldsymbol{J}$ 的求法.

方法一　初等变换法

由定理 1.2.1 的证明过程可得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化成标准型的做法如下：

(1) 写出 $\boldsymbol{A}$ 的特征矩阵 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$；

(2) 写出 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的全部初等因子；

(3) 写出每个初等因子对应的 Jordan 块；

(4) 写出 Jordan 标准型.

值得注意的是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化的充分条件是其特征矩阵 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的初等因子的幂都是一次的.

例 1.2.4　求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型 $\boldsymbol{J}$：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$$

解　(1) $\boldsymbol{A}(\lambda)=\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda+1&-1&0\\4&\lambda-3&0\\-1&0&\lambda-2\end{pmatrix}$.

(2) $\boldsymbol{A}(\lambda)\xrightarrow{r_1+(\lambda+1)r_3,\ r_2+4r_3}\begin{pmatrix}0&-1&(\lambda+1)(\lambda-2)\\0&\lambda-3&4(\lambda-2)\\-1&0&\lambda-2\end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{A}(\lambda)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&(\lambda-2)(\lambda-1)^2\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的初等因子是 $(\lambda-2)$，$(\lambda-1)^2$.

(3) $\lambda-2$ 对应的 Jordan 块是　$\boldsymbol{J}_1=(2)$，

$(\lambda-1)^2$ 对应的 Jordan 块是　$\boldsymbol{J}_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

(4) $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

方法二　特征向量法

设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，如果 λ_i 是 $\boldsymbol{A}$ 的单特征值，则对应一阶 Jordan 块 $\boldsymbol{J}_i=(\lambda_i)$；如果 λ_i 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $r_i(r_i>1)$ 重特征值，则对应 λ_i 有几个线性无关的特征向量，就有几个以 λ_i 为对角元素的 Jordan 块. 这些 Jordan 块的阶数之和等于 r_i. 由 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值对应的 Jordan 块构成的 Jordan矩阵即为 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形，这就是特征向量法.

例 1.2.5　用特征向量法求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型 $\boldsymbol{J}$：

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}.$$

解　A 的特征多项式为

$$\det(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}\lambda+1&-1&0\\4&\lambda-3&0\\-1&0&\lambda-2\end{pmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2.$$

所以 A 的特征值 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$. 对应于二重特征值 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 只有一个线性无关的特征向量 $\xi_2=(1,\ 2,\ -1)^{\mathrm{T}}$，故 A 的 Jordan 标准型为

$$J_A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

1.3　Jordan 标准形的变换与应用

上一节已经介绍了 Jordan 标准型的求法. 本节将进一步给出变换矩阵的求解方法.

设 n 阶矩阵 A 对应的 Jordan 标准型为 $J=\begin{pmatrix}J_1&&&\\&J_2&&\\&&\ddots&\\&&&J_r\end{pmatrix}$，变换矩阵为 P，则

$$P^{-1}AP=J$$

所以

$$AP=PJ.$$

将 P 按 J 的结构写成列块的形式

$$P=(P_1\quad P_2\quad\cdots\quad P_r)$$

则有

$$A(P_1\quad P_2\quad\cdots\quad P_r)=(P_1\quad P_2\quad\cdots\quad P_r)\begin{pmatrix}J_1&&&\\&J_2&&\\&&\ddots&\\&&&J_r\end{pmatrix},$$

所以

$$AP_i=P_iJ_i\quad(i=1,2,\cdots,r),$$

$$A(P_{i1}\quad P_{i2}\quad\cdots\quad P_{im_i})=(P_{i1}\quad P_{i2}\quad\cdots\quad P_{im_i})\begin{pmatrix}\lambda_i&1&&0\\&\lambda_i&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&\lambda_i\end{pmatrix},$$

$$AP_{i1}=\lambda_iP_{i1}\to(A-\lambda_iI)P_{i1}=\mathbf{0},$$

$$AP_{i2}=P_{i1}+\lambda_iP_{i2}\to(A-\lambda_iI)P_{i2}=P_{i1}\to(A-\lambda_iI)^2P_{i2}=\mathbf{0},$$

$$\vdots$$

$$AP_{im}=P_{im_{i-1}}+\lambda_i P_{im_i}\to(A-\lambda_i I)P_{im_i}=P_{im_{i-1}}\to(A-\lambda_i I)^{m_i}P_{im_i}=\mathbf{0}.$$

两种具体做法如下：

(1) 按照$P_{i1}\to P_{i2}\to\cdots\to P_{im_i}$的顺序求解，即先求出特征向量$P_{i1}$，然后由后续方程求出$P_{i2}$，$P_{i3}$，…；

(2) 先求$(A-\lambda_i I)^{m_i}$的特征向量P_{im_i}，然后直接得到$P_{im_{i-1}}\to P_{im_{i-2}}\to\cdots\to P_{i1}$.

前一做法由于$(A-\lambda_i I)$为奇异矩阵，每一步均存在有多组解及无解问题，故各步之间不能完全独立，前一步尚需依赖后一步、再后一步、…，直至最后一步才能完全确定一些待定系数；而后一做法仅出现一次求解方程，其余为直接赋值，无上述问题. 但又可能导致低阶P_{im_j}出现零向量的问题.

由于

$$P_{i1}=(A-\lambda_i I)^{m_i-1}P_{im_i},$$

$$P_{i2}=(A-\lambda_i I)^{m_i-2}P_{im_i},$$

$$\vdots$$

$$P_{im_{i-1}}=(A-\lambda_i I)P_{im_i}.$$

故P_{im_i}应满足：

$$(A-\lambda_1 I)^{m_i}P_{im_i}=\mathbf{0}\text{ 但}(A-\lambda_i I)^{m_i-1}P_{im_i}\neq\mathbf{0}$$

同一特征值可能出现在不同的 Jordan 块中，对于这种情况，按各 Jordan 块阶数高低依次进行处理，高阶先处理，低阶后处理，同阶同时处理.

(1) 最高阶(没有属于同一特征值的 Jordan 块同阶) 可按下述方法求出P_{im_i}，即使$(A-\lambda_i I)^{m_i}x=\mathbf{0}$，但$(A-\lambda_i I)^{m_i-1}x\neq\mathbf{0}$，使用$x$作为$P_{im_i}$. 然后由方程$P_{i(j-1)}=(A-\lambda_i I)\ P_j$依次求出$P_{im_{i-1}}$，$P_{im_{i-2}}$，…，直至$P_{ij}$，且$j$等于下一个属于同一特征值的 Jordan 块的阶数；

(2) 对于上述新 Jordan 块，它的P_{im_i}不仅要考虑到满足

$$(A-\lambda_i I)^{m_i}x=\mathbf{0}\text{ 但}(A-\lambda_i I)^{m_i-1}x\neq\mathbf{0},$$

而且还应与前述P_{ij}线性无关；

(3) 其他属于同一特征值的 Jordan 块处理时，按照(2) 的原则处理即可；

(4) 出现多个属于同一特征值的 Jordan 块同阶时，还应考虑线性无关问题.

例 1.3.1 求例 1.2.4 中变换矩阵P，使得$P^{-1}AP=J$.

解

$$\det(\lambda I-A)=\det(\lambda I-J)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

$$\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=1$$

对$\lambda_1=2$

$$(A-2I)P=\begin{pmatrix}-3&1&0\\-4&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

$$P_{11}=k_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\mathbf{0},k_1\in P$$

对 $\lambda_2=\lambda_3=1$

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{P}_{21}=k_0\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{0},k_2\in\boldsymbol{P}$$

取 $k_2=1$，计算$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\ \boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_{21}$

$$\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_{22}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&2&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$$

例 1.3.2　求解微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=-x_1+x_2\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=-4x_1+3x_2,x(0)=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}.\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t}=x_1+2x_3\end{cases}$$

解　将上述方程写成矩阵乘积形式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}x$$

其中，

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}.$$

在例 1.2.4 中，已将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化成了 Jordan 标准形

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

在例 1.3.1 中，求出了过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&2&1\\1&-1&-1\end{pmatrix},\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&0\\-2&1&0\end{pmatrix}.$$

作 $x(t)$ 的变换，令

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$