工程应用数学基础

谢 政　陈 挚　戴 丽　编著

科 学 出 版 社

国防科技大学研究生数学公共课程系列教材

工程应用数学基础

谢 政 陈 挚 戴 丽 编著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书注重与大学数学的衔接，突出矩阵主线，弱化泛函分析，分为线性空间、矩阵理论、线性方程组、线性规划、二人有限博弈、决策分析和现代优化方法等七章，各章内容既相对独立又相互联系.

本书自成体系，便于自学，概念的建立直观自然，理论的论述严谨清晰，算法的描述简单易懂，是一本特色鲜明的工程硕士研究生教材.

图书在版编目（CIP）数据

工程应用数学基础/谢政，陈挚，戴丽编著. —北京：科学出版社，2015. 12
国防科技大学研究生数学公共课程系列教材
ISBN 978-7-03-046684-6

Ⅰ. ①工… Ⅱ. ①谢… ②陈… ③戴… Ⅲ. ①工程数学—研究生—教材 Ⅳ. ①TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 306509 号

责任编辑：赵彦超／责任校对：张凤琴
责任印制：张 倩／封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京通州皇家印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016 年 1 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2016 年 1 月第一次印刷 印张：18
字数：360 000

定价：88.00 元
（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

在 21 世纪这个信息时代，科学技术的发展使得数学的思想和方法已经渗透到自然科学、工程技术、人文与社会科学等诸多领域，因此，必须加强工程硕士研究生的数学教育，提高他们的抽象思维和逻辑推理的能力，培养其运用数学知识解决实际问题的能力.

根据工程硕士的培养目标要求，针对不同专业学生的知识结构，我们确立了“注重与大学数学衔接，突出矩阵主线，弱化泛函分析”的原则，选取了泛函分析、矩阵论、数值分析、运筹学、应用概率论和智能优化方法等作为本教材的主要内容，各部分内容既相对独立又相互联系. 本书力求做到概念的建立直观自然，理论的阐述严谨清晰，算法的描述简单易懂.

第 1 章线性空间，包括线性空间及其子空间、线性算子、赋范线性空间和内积空间, 其中赋范线性空间一节的编排颇具特色. 第 2 章矩阵理论，包括 λ 矩阵、方阵的相似标准形、方阵的相似对角化、方阵的范数和矩阵分析，其中方阵算子范数的引入，利用方阵的 Jordan 块的方幂的简单表达式来简化多个定理的证明，都是与众不同的. 第 3 章线性方程组，包括 Gauss 消元法、Doolittle 分解法、线性方程组的迭代解法以及相容方程组与矛盾方程组，统一采用分块矩阵来表示各种广义逆的通式是本书的第三个特色. 第 4 章线性规划，包括线性规划问题及其图解法、线性规划的基本定理、单纯形法和线性规划问题的对偶理论. 第 5 章二人有限博弈，包括博弈、矩阵博弈的基本理论、矩阵博弈的求解、非合作双矩阵博弈和合作双矩阵博弈，其中合作双矩阵博弈是本书的第四个特色. 第 6 章决策分析，包括决策分析的基本概念、风险型决策、不确定型决策和信息的价值与效用函数，用博弈论的观点和方法来处理决策分析的内容是本书的第五个特色. 第 7 章现代优化方法，包括优化问题与优化方法、禁忌搜索算法、模拟退火算法、遗传算法和蚁群算法，以旅行商问题的求解为主线介绍几种启发式算法.

本书第 1，5，6 章和 3.4.1 小节由谢政执笔，第 2，4 章及第 3 章其余部分由陈挚执笔，第 7 章由戴丽执笔. 最后由谢政修改、补充和定稿.

作为湖南省精品课程项目，本书的出版还得到了国防科技大学研究生院和理学院数学与系统科学系的大力支持，在此一并致谢.

谢　政

2015 年 7 月

目　　录

第 1 章　线性空间

线性空间是几何空间的推广，是近代数学中最重要的基本概念之一. 在线性空间中，赋予“长度”就得到赋范线性空间，引入“长度”和“夹角”就成为内积空间，这是两类非常重要的线性空间.

本章介绍线性空间、赋范线性空间、内积空间的概念与性质，还要讨论定义在线性空间上的一类重要的映射——线性算子.

1.1　线性空间及其子空间

这一节从集合的定义出发，介绍线性空间的定义、例子，以及线性空间的子空间、基和维数.

1.1.1　集合

集合是数学的最基本的概念之一，它有一个描述性定义：由具有某种性质所确定的事物的全体称为集合. 集合中的个体事物称为集合的元素. 通常用大写字母 $A, B, C, \cdots$ 代表集合，用小写字母 $a, b, c, \cdots$ 代表元素. 如果 a 是集合 A 的元素，则称 a 属于 A，记作 $a \in A$，否则称 a 不属于 A，记作 $a \notin A$.

集合主要有两种表示方法. 一种方法是把一个集合的所有元素都列举出来，例如，若集合 A 由元素 a_1, a_2, a_3 组成，则记 $A = \{a_1, a_2, a_3\}$；全体自然数组成的集合 $\mathbb{N}$ 可记作 $\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$. 另一种方法是把一个集合 A 的元素所具有的特征性质 $p(x)$ 表示出来，即 $A = \{\, x |\, p(x)\}$，例如，可用 $A = \{\, x |\, x^2 = 1\}$ 表示一元方程 $x^2 = 1$ 的解的集合.

设 A, B 是两个集合，如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 为 B 的子集，也称 A 含于 B (或 B 包含 A)，记作 $A \subseteq B$(或 $B \supseteq A$)；如果 $A \subseteq B$，且 $B \subseteq A$，则称集合 A 与 B 相等，记作 $A = B$；如果 $A \subseteq B$，但 $A \neq B$，则称 A 为 B 的真子集，记作 $A \subset B$.

如果一个集合只有有限个元素，则称之为有限集，否则称之为无限集. 用记号 $|A|$ 表示有限集 A 中的元素的个数，称 $|A|$ 为集合 A 的基数. 不含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$. 规定空集是一切集合的子集.

几个常用记号说明如下：

$\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+$ 和 $\mathbb{N}$ 分别表示全体复数的集合、全体实数的集合、全体有理数的集合、全体整数的集合、全体正整数的集合和全体自然数的集合.

$\Rightarrow$ 表示“蕴涵”；

$\Leftrightarrow$ 表示“当且仅当”；

$\forall$ 表示“对任意的”或“对一切的”；

$\exists$ 表示“存在一个”或“至少有一个”；

s.t. 表示“使得”或“满足”，它是英文“such that”或“subject to”的缩写.

下面定义集合的几种运算.

定义 1.1 设 A, B 是两个集合，由既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的交，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\in B\};$$

由属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的并，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\,|x\in A \text{ 或 } x\in B\};$$

由属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的差，记作 $A\backslash B$，即

$$A\backslash B=\{x|\ x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

容易验证集合的交与并满足以下运算规律:

定理 1.1 设 A, B, C 均为集合，则有

(1) 幂等律: $A\cap A=A, A\cup A=A$;

(2) 交换律: $A\cap B=B\cap A, A\cup B=B\cup A$;

(3) 结合律: $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$,
$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

(4) 分配律: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$. □

定义 1.2 设 A, B 为两个集合. A 中的任何元素 a 与 B 中的任何元素 b 构成的所有有序对 (a,b) 的集合称为 A 与 B 的直积或 Descartes 乘积，记作 $A\times B$，即

$$A\times B=\{(a,b)|a\in A,b\in B\}.$$

当集合 A 和 B 有一个为空集时，规定 $A\times B=\varnothing$.

一般地，n 个集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的直积定义为

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)|a_i\in A_i,\ i=1,2,\cdots,n\}.$$

n 个集合 A 的直积简写为 A^n. 例如，n 个 $\mathbb{R}$ 的直积 $\mathbb{R}^n$ 和 n 个 $\mathbb{C}$ 的直积 $\mathbb{C}^n$ 分别为

$$\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}|\ x_i\in\mathbb{R},\ i=1,2,\cdots,n\},$$

$$\mathbb{C}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \mid x_i \in \mathbb{C},\ i = 1, 2, \cdots, n\},$$

这里 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{C}^n$ 中的元素用列向量的形式表示.

$\mathbb{C}$ 的子集称为数集. 数域是线性空间将要涉及的一种数集，它的定义如下.

定义 1.3 设 $\mathbb{F}$ 是含 1 的数集，如果 $\mathbb{F}$ 对于四则运算是封闭的，即

$$a \pm b \in \mathbb{F}, \quad ab \in \mathbb{F}, \quad \frac{a}{b} \in \mathbb{F}\ (b \neq 0), \quad \forall a,\ b \in \mathbb{F},$$

则称 $\mathbb{F}$ 是一个数域.

由定义知，$\mathbb{Q}$，$\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 都是数域，分别称为有理数域、实数域和复数域. 而 $\mathbb{Z}$，$\mathbb{Z}_+$ 和 $\mathbb{N}$ 都不是数域.

1.1.2 线性空间的定义与例子

我们知道，几何空间 $\mathbb{R}^3$ 中的加法和数乘都满足封闭性，并且加法具有交换律、结合律，数乘具有结合律，加法与数乘具有分配律. 推而广之，就得到线性空间的概念.

定义 1.4 设 X 为非空集合，$\mathbb{F}$ 为数域 (通常取 $\mathbb{F}$ 为 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$)，在 X 上定义加法 “+”:

$$x + y \in X, \quad \forall x,\ y \in X;$$

在 $\mathbb{F}$ 与 X 上定义数乘 “·”(算式中的 “·” 号可以省略):

$$\lambda x \in X, \quad \forall \lambda \in \mathbb{F},\ \forall x \in X,$$

并且满足

(1) $\forall x, y \in X$, 有$x + y = y + x$;

(2) $\forall x, y, z \in X$, 有$(x + y) + z = x + (y + z)$;

(3) $\exists$零元素 $0, \text{s.t.} \forall x \in X$, 有$x + 0 = x$;

(4) $\forall x \in X$, $\exists$ 负元素 $y, \text{s.t.} x + y = 0$;

(5) $\forall x \in X$, 有$1x = x$;

(6) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $\forall x \in X$, 有 $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;

(7) $\forall \lambda \in \mathbb{F}$, $\forall x,\ y \in X$, 有 $\lambda(x + y) = \lambda x + \mu y$;

(8) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $\forall x \in X$, 有 $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,

则称 X 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间. 上述加法运算和数乘运算统称为线性运算. 当 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 时，称 X 为实线性空间；当 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ 时，称 X 为复线性空间.

容易证明，在一个线性空间中，零元素 0 是唯一的；任何一个元素 x 的负元素也是唯一的，因此可将 x 的负元素记作 $-x$.

例 1.1　$\forall \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$，$\forall\lambda\in\mathbb{R}$，定义加法和数乘:

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)^{\mathrm{T}},$$

$$\lambda\boldsymbol{x}=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n)^{\mathrm{T}},$$

显然 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$，$\lambda\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，并且这里的加法和乘法满足定义 1.4 中八条公理，因此 $\mathbb{R}^n$ 是数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

按照同样的加法和数乘，$\mathbb{C}^n$ 成为数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间，数域 $\mathbb{F}$ 的直积 $\mathbb{F}^n$ 成为数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间. □

例 1.1 定义的线性空间 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{C}^n$ 都称为向量空间.

例 1.2　设 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 是全体 $m\times n$ 实矩阵的集合. $\forall \boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n},\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{m\times n}\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$\forall\lambda\in\mathbb{R}$，在 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 上定义加法和数乘:

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix},$$

$$\lambda\boldsymbol{A}=[\lambda a_{ij}]_{m\times n}=\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}.$$

容易验证，$\mathbb{R}^{m\times n}$ 是数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

同样可以在全体 $m\times n$ 复矩阵的集合 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 上定义矩阵的加法和数乘，使 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 成为数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间. □

例 1.2 定义的线性空间 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 称为矩阵空间，当 $m=n$ 时称之为方阵空间.

例 1.3　设 $C[a,\ b]$ 是闭区间 $[a,\ b]$ 上所有连续实函数 (包括零函数) 的集合，$\forall f,g\in C[a,b]$，$\forall\lambda\in\mathbb{R}$，函数的加法及数与函数的乘法为

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\quad \forall x\in[a,b],$$

$$(\lambda f)(x)=\lambda f(x),\quad \forall x\in[a,b],$$

则由连续函数的运算性质可知，$C[a,\ b]$ 是数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. □

同理可证，闭区间 $[a, b]$ 上全体多项式的集合 $P[a, b]$，以及 $[a,b]$ 上所有次数不超过 n 的多项式的集合 $P_n[a, b]$，按照 $C[a, b]$ 上的线性运算分别成为数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

所有 n 次多项式的集合按照 $C[a, b]$ 上的线性运算不构成线性空间.

1.1.3 线性空间的子空间

正如集合有子集，线性空间也有子空间.

定义 1.5 设 X，Y 是数域 $\mathbb{F}$ 上的两个线性空间，若 $Y \subseteq X$，则称 Y 是 X 的线性子空间，简称为 X 的子空间.

容易证明，Y 是 X 的子空间当且仅当 Y 是线性空间 X 的非空子集，且 Y 对 X 的线性运算是封闭的，即

$$x + y \in Y,\ \lambda x \in Y, \quad \forall x, y \in Y,\ \forall \lambda \in \mathbb{F}.$$

对于线性空间 X，仅含零元素的集合 $\{0\}$ 以及 X 本身都是 X 的子空间.

根据例 1.3，$P[a, b]$ 和 $P_n[a, b]$ 都是线性空间 $C[a, b]$ 的子空间.

例 1.4 在向量空间 $\mathbb{R}^3$ 中，过原点的平面

$$\{(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} |\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0\}$$

是 $\mathbb{R}^3$ 的一个子空间，这里 a，b 和 c 是给定的三个实数. □

例 1.5 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$,$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解的集合

$$\{\boldsymbol{x} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n |\ \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}\}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间；非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解的集合

$$\{\boldsymbol{x} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n |\ \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}\}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子集，但不是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. □

定义 1.6 设 X 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，$x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{F}$，称 X 中的元素

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n \tag{1.1}$$

为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一个线性组合，也称 x 可由 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性表示；如果 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$，即 X 是实线性空间，且

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \geqslant 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1,$$

则称 (1.1) 式中的 x 为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的凸组合；如果 X 是实线性空间，且

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n > 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1,$$

则称 (1.1) 式中的 x 为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的严格凸组合.

例 1.6　设 X 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，M 是 X 的非空子集，令

$$\mathrm{span}M = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}_+,\ x_i \in M,\ \lambda_i \in \mathbb{F},\ i = 1, 2, \cdots, n \right\},$$

即 $\mathrm{span}M$ 由 M 中任何有限个元素的任意线性组合的全体组成的集合，则 $\mathrm{span}M$ 是包含 M 的最小线性空间，即是 X 中一切包含 M 的子空间的交，称 $\mathrm{span}M$ 为由 M 生成的子空间.

证明　易知 $\mathrm{span}M$ 对 X 的线性运算是封闭的，且 $\mathrm{span}M \supseteq M$，因此 $\mathrm{span}M$ 是 X 的包含 M 的子空间.

设 Y 是 X 的包含 M 的任意子空间，则 $\forall x \in \mathrm{span}M$，$\exists x_i \in M \subseteq Y$，$\exists \lambda_i \in \mathbb{F}$，$i = 1, 2, \cdots, n$，s.t. $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in Y$，故 $\mathrm{span}M \subseteq Y$. 所以 $\mathrm{span}M$ 是包含 M 的最小子空间，即

$$\mathrm{span}M = \cap\{\, Y | Y \text{ 是 } X \text{ 的子空间, 且} Y \supseteq M \,\}. \qquad \square$$

例 1.7　考虑向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中的向量：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= (1, 0, 0, \cdots, 0, 0)^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{e}_2 &= (0, 1, 0, \cdots, 0, 0)^{\mathrm{T}}, \\ &\cdots\cdots \\ \boldsymbol{e}_n &= (0, 0, 0, \cdots, 0, 1)^{\mathrm{T}}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

则 $\mathbb{R}^n$ 中任何一个向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 都可由向量集 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 线性表示，即

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n \boldsymbol{e}_n;$$

并且

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{span}\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}.$$

同样，复向量空间 $\mathbb{C}^n$ 中的任何一个向量也都可由 (1.2) 式所定义的向量集 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 线性表示，且

$$\mathbb{C}^n = \mathrm{span}\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}. \qquad \square$$

凸集是最优化理论必须涉及的基本概念.

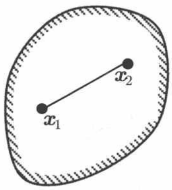
定义 1.7 设 X 是实线性空间, S 是 X 的子集, 如果 $\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in S$, 有

$$\lambda \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2 \in S, \quad \forall \lambda \in [0,1],$$

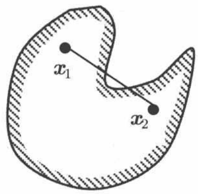
则称 S 为 X 中的凸集.

从定义可以看出, 凸集是这样的集合, 连接其中任意两点间的线段上所有的点都属于此集合. 图 1.1 画出了凸集和非凸集的示意图.

显然, 实线性空间 X 的每一个子空间都是 X 的凸集. $\mathbb{R}^2$ 中的圆或凸多边形所围成的区域都是 $\mathbb{R}^2$ 的凸集.



(a) 凸集



(b) 非凸集

图 1.1 凸集与非凸集

1.1.4 线性空间的基与维数

由例 1.7 可知, 向量空间 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{C}^n$ 均可由 (1.2) 式所定义的向量集 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 生成, 究其原因, 是向量组 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 满足所谓的线性无关性. 下面给出一般线性空间中线性无关集的概念.

定义 1.8 设 X 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, M 是 X 的非空子集. 当 $M = \{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$ 为有限集时, 如果

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, r),$$

则称 M 是线性无关的; 当 M 为无限集时, 如果 M 的每一个非空有限子集都是线性无关的, 则称 M 是线性无关的. 如果集合 M 不是线性无关的, 则称 M 是线性相关的.

基和维数是线性空间的重要属性.

定义 1.9 设 X 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, $B \subseteq X$ 是线性无关集, 如果 $\mathrm{span}B = X$, 即 X 的每一个元素都可以由 B 中有限个元素线性表示, 则称 B 是 X 的一个基. 当基 B 为有限集时, 称 X 为有限维线性空间, 称 $|B|$ 为线性空间 X 的维数, 记为 $\dim X = |B|$; 否则称 X 为无限维线性空间. 因线性空间$\{0\}$没有基, 故规定 $\dim\{0\} = 0$.

有限维线性空间 X 的基是不唯一的，但是 X 的每一个基所含元素的个数必定是相同的.

由 (1.2) 式定义的向量集 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 是向量空间 $\mathbb{R}^n$(或 $\mathbb{C}^n$) 的一个基，从而 $\dim\mathbb{R}^n = \dim\mathbb{C}^n = n$. 容易证明，向量集

$$\{(-1,0,0,\cdots,0,0)^{\mathrm{T}}, (0,-1,0,\cdots,0,0)^{\mathrm{T}}, \cdots, (0,0,0,\cdots,0,-1)^{\mathrm{T}}\}$$

也是 $\mathbb{R}^n$(或 $\mathbb{C}^n$) 的一个基.

例 1.8　考虑函数

$$x_k(t) = t^k \quad (t \in [a,b],\ k = 0,1,2,\cdots),$$

则不难证明：

(1)$B = \{x_0(t), x_1(t), x_2(t), \cdots\}$ 是 $C[a,\ b]$ 中的一个线性无关集；

(2)B 是线性空间 $P[a,\ b]$ 的一个基；

(3)$\{x_0(t), x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)\}$ 是 $P_n[a,b]$ 的一个基，故 $\dim P_n[a,b] = n+1$；

(4)B 不是 $C[a,\ b]$ 的基. □

例 1.9　$\mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 分别作为 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 上的线性空间都是 mn 维的. 用 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 表示第 i 行第 j 列元素为 1 其余元素全为 0 的 $m\times n$ 矩阵，则

$$\{\,\boldsymbol{E}_{ij} |\ i = 1,2,\cdots,\ m;\ j = 1,2,\cdots,n\}$$

是 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 的一个基，$\dim\mathbb{R}^{m\times n} = \dim\mathbb{C}^{m\times n} = mn$. □

1.2　线 性 算 子

线性算子是讨论同一个数域上两个线性空间的元素之间的对应关系，它是矩阵理论的主要研究对象之一.

1.2.1　映射

映射是描述两个集合的元素之间的对应关系，它是函数概念的推广.

定义 1.10　设 A, B 是两个非空集合，如果存在一个对应法则 f，使得对任意 $x \in A$ 都有唯一的 $y \in B$ 与之对应，则称 f 为 A 到 B 的一个映射，记作 $f: A \to B$，或 $f: x \mapsto y$. y 称为 x 在映射 f 下的像，记作 $y = f(x)$. 集合 A 称为映射 f 的定义域，记作 $A = \mathcal{D}(f)$. A 的所有元素在映射 f 下的像的集合称为 f 的值域，记作 $\mathcal{R}(f)$，即

$$\mathcal{R}(f) = \{\, f(x) | x \in A\,\}.$$