



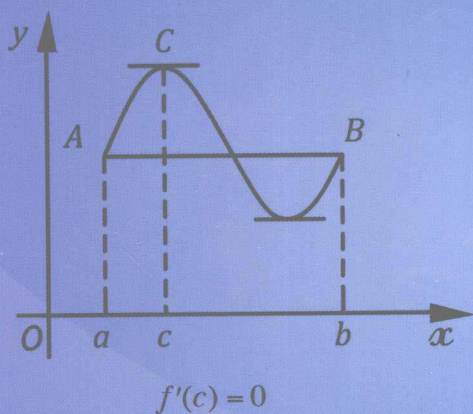
普通高等教育农业部“十二五”规划教材  
全国高等农林院校“十二五”规划教材

# 高等数学

## 学习指导

第二版

李任波 伍 勇◎主编



中国农业出版社

普通高等教育农业部“十二五”规划教材  
全国高等农林院校“十二五”规划教材

# 高等数学学习指导

第二版

李任波 伍勇 主编

中国农业出版社

## 图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学学习指导 / 李任波, 伍勇主编. —2 版. —  
北京: 中国农业出版社, 2013. 8  
普通高等教育农业部“十二五”规划教材 全国高等  
农林院校“十二五”规划教材  
ISBN 978-7-109-17986-8

I. ①高… II. ①李… ②伍… III. ①高等数学-高  
等学校-教学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 166612 号

中国农业出版社出版

(北京市朝阳区农展馆北路 2 号)

(邮政编码 100125)

策划编辑 朱 雷 魏明龙

文字编辑 魏明龙

北京通州皇家印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行

2008 年 7 月第 1 版 2013 年 8 月第 2 版

2013 年 8 月第 2 版北京第 1 次印刷

开本: 720mm×960mm 1/16 印张: 14.5

字数: 255 千字

定价: 23.00 元

(凡本版图书出现印刷、装订错误, 请向出版社发行部调换)

林林校校“五二五”籍业农育农高数普  
校校校校“五二五”籍业农育农高数普

## 内 容 简 介

本教材是普通高等教育农业部“十二五”规划教材、全国高等农林院校“十二五”规划教材、云南省普通高等学校“十二五”规划教材《高等数学》(第二版)(伍勇、雷兴刚主编)的配套学习辅导书,根据高等农林院校有关《考试大纲》的内容和要求,为高等农、林、经管及医学类院校相关专业本(专)科学生学习高等数学课程的需要而编写的。主要内容分为四个部分:第一部分是《高等数学》(第二版)各章的基本要求、知识点及知识结构图;第二部分是各章典型例题及解题方法介绍;第三部分是各章所有习题的详细解答;第四部分是根据《考试大纲》编写的两套模拟试题及参考答案。本教材可供有关院校教学辅导或学生自学时使用。

## 第二版编写人员名单

主 编 李任波 伍 勇

副主编 任丽洁 张 健 高 鑫 林主敏

参 编 (按姓名拼音排序)

丁 琨 黄 斌 刘 雯 刘兴桂

罗锡春 唐 伟 王 辉 王 岚

吴绍兵 杨白云 杨建红 周绍艳

审 稿 戴正德 石 磊

## 第一版编写人员名单

主 编 李任波 伍 勇

副主编 黄 斌 刘 雯

编 委 (按姓名拼音排序)

丁 琨 和亚珺 林 敏 罗锡春

任丽洁 杨建红 张 健

张 健

张 健

## 第二版前言

本教材是与普通高等教育农业部“十二五”规划教材、全国高等农林院校“十二五”规划教材、云南省普通高等学校“十二五”规划教材《高等数学》(第二版)相配套的学习辅导书。本教材按《高等数学》(第二版)的章次对应编写,根据有关教学大纲和考试大纲的要求,在各章的知识要点、知识结构图和典型例题分析上注意科学性和系统性,又有一定的广度和深度。适合高等农、林、经管及医学类相关院校的专业作为学习高等数学的学习辅导书。

编者认真梳理了第一版指导书的全部内容,力争在第二版中做到:文字表述更加清晰;格式、风格更加统一。并根据《高等数学》(第二版)教材内容的变化,修改、补充了指导书相应的内容和例题。

第二版指导书的修订工作由西南林业大学、云南农业大学、大理学院和云南警官学院的相关教师完成。云南农业大学的编写人员有:伍勇、高鑫、刘雯、杨建红、刘兴桂。西南林业大学的编写人员有:李任波、任丽洁、张健、林敏、丁琨、黄斌、罗锡春、唐伟、王辉;大理学院的编写人员有:周绍艳;云南警官学院的编写人员有:王岚、吴绍兵、杨白云。全书由李任波负责统稿。

本教材由云南大学戴正德教授(博士生导师)及云南财经大学石磊教授(博士生导师)负责审稿。在编写过程中,得到各参编院校教务处的大力支持,在此一并表示感谢。

由于编者水平有限,书中难免有不妥之处,肯请读者批评指正。

编者

2013年5月

# 第一版前言

本教材是与“全国高等农林院校‘十一五’规划教材”《高等数学》相配套的学习辅导书。本书按教材的章次对应编写，根据有关教学大纲和考试大纲的要求，在各章的知识要点、知识结构图和典型例题分析上既注意到科学性和系统性，又有一定的广度与深度，较好地贯彻了“基础理论教育以应用为目的，以必要、够用为度。基础课程内容应当体现宽口径、具有通用性和稳定性”的精神。适合高等农、林、经管及医学类相关院校的专业作为学习高等数学的学习辅导书。

本教材既是教学同步的学习辅导书，又是阶段复习及模拟测试的指导书。它有助于使学生对高等数学这门课程的基本概念、基本理论、基本方法有较全面、深刻的理解和掌握，有利于培养学生分析问题、解决问题的能力。

参加本教材编写工作的有：西南林学院李任波（第一、二、三、九章），黄斌（第六、八、九章），罗锡春（第四、七章），和亚璿（第四、六章），丁琨（第四、五章），林敏（第二、七章），张健（第一、三、七章），任丽洁（第二、三、九章）；云南农业大学伍勇（第一、二、四、九章），刘雯（第六、八、九章），杨建红（第六、七、九章）。

本教材在编写过程中，得到西南林学院、云南农业大学教务处和相关学院、系、部以及中国农业出版社的大力支持，在此一并表示感谢。

由于编者水平有限，书中若有不当之处，恳请读者批评指正。

编者

2008年5月



# 目 录

第二版前言

第一版前言

<b>第一章 函数与极限</b> .....	1
1.1 基本要求 .....	1
1.2 知识点及知识结构图 .....	1
1.3 典型例题与解题方法 .....	3
1.4 习题一解答 .....	12
<b>第二章 导数与微分</b> .....	22
2.1 基本要求 .....	22
2.2 知识点及知识结构图 .....	22
2.3 典型例题与解题方法 .....	23
2.4 习题二解答 .....	32
<b>第三章 微分中值定理及导数的应用</b> .....	44
3.1 基本要求 .....	44
3.2 知识点及知识结构图 .....	44
3.3 典型例题及解题方法 .....	45
3.4 习题三解答 .....	55
<b>第四章 不定积分</b> .....	72
4.1 基本要求 .....	72
4.2 知识点及知识结构图 .....	72
4.3 典型例题与解题方法 .....	73
4.4 习题四解答 .....	88

<b>第五章 定积分</b> .....	102
5.1 基本要求 .....	102
5.2 知识点及知识结构图 .....	102
5.3 典型例题与解题方法 .....	103
5.4 习题五解答 .....	114
<b>第六章 多元函数微积分</b> .....	130
6.1 基本要求 .....	130
6.2 知识点及知识结构图 .....	130
6.3 典型例题与解题方法 .....	131
6.4 习题六解答 .....	148
<b>第七章 无穷级数</b> .....	163
7.1 基本要求 .....	163
7.2 知识点及知识结构图 .....	163
7.3 常见题型及解题方法 .....	165
7.4 习题七解答 .....	170
<b>第八章 微分方程</b> .....	186
8.1 基本要求 .....	186
8.2 知识结构图 .....	186
8.3 典型例题与解题方法 .....	187
8.4 习题八解答 .....	194
<b>第九章 模拟测试题</b> .....	208
模拟测试题(一) .....	208
模拟测试题(一)参考答案 .....	211
模拟测试题(二) .....	214
模拟测试题(二)参考答案 .....	216
<b>参考文献</b> .....	220

# 第一章 函数与极限

## 1.1 基本要求

- 一、理解函数的概念，会求函数的定义域。
- 二、了解函数的表示和函数的简单性态——有界性、单调性、奇偶性和周期性。
- 三、掌握六类基本初等函数的定义域、值域和图形。
- 四、理解数列极限的概念(对“ $\epsilon-N$ ”形式的定义不作过高要求)。
- 五、理解函数极限的定义，会描述各种极限状态。
- 六、熟练掌握极限的四则运算法则。
- 七、会用各种基本方法以及两个重要极限求数列和函数的极限。
- 八、理解无穷大量、无穷小量的概念及其运算性质，掌握无穷小量的比较。
- 九、理解函数的连续性的概念，掌握函数的间断点的分类。
- 十、理解连续函数的和、差、积、商及复合函数的连续性。
- 十一、理解初等函数的连续性，掌握闭区间上连续函数的性质。

## 1.2 知识点及知识结构图

### 一、知识点

#### 1. 函数

- (1) 函数的概念(定义域、对应规则、值域)。
- (2) 分段函数(自变量在不同范围变化时，因变量依照不同的对应法则与之对应)。
- (3) 函数的四种特性(奇偶性、单调性、周期性、有界性)。
- (4) 复合函数(函数复合的条件、中间变量)。
- (5) 反函数( $y=f^{-1}(x)$ )。
- (6) 初等函数：  
六类基本初等函数(常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、

反三角函数)的定义域、值域、图形、性质;

由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合运算而得到的、能用一个式子表示的函数,称为初等函数.

## 2. 函数极限

- (1) 数列极限的概念与  $\epsilon-N$  定义.
- (2) 左极限  $f(x_0-0)$ 、右极限  $f(x_0+0)$  的概念.
- (3) 函数极限的定义与性质(唯一性、局部有界性等).
- (4) 函数在点  $x_0$  的左极限  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ , 右极限  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ , 极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

三者的关系及举例.

- (5) 无穷大与无穷小.

## 3. 计算函数极限

- (1) 函数极限的运算法则(和、差、积、商、复合).
- (2) 两个重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \text{ (或 } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e).$$

- (3) 无穷小的比较(高阶、低阶、同阶、等价).
- (4) 无穷小量的性质(无穷小量与有界函数之积仍为无穷小等).
- (5) 求极限的等价无穷小替换定理.

## 4. 函数的连续性

- (1) 函数在点  $x_0$  连续的概念与定义:

定义一:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$ .

定义二:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

左连续的定义:  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0-0) = f(x_0)$ .

右连续的定义:  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0+0) = f(x_0)$ .

函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处连续的充要条件是:  $f(x)$  在点  $x_0$  处既左连续又右连续.

- (2) 函数的间断点及其分类:

第一类间断点: 左右极限都存在的间断点, 包含可去、跳跃两种类型;

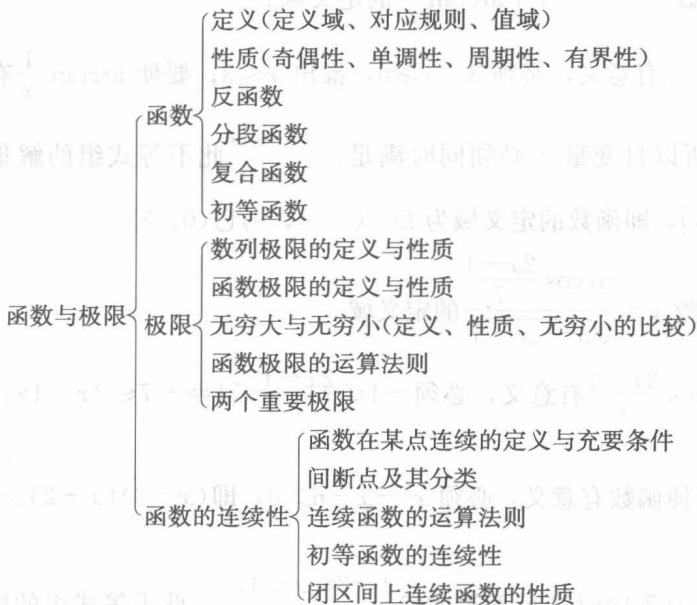
第二类间断点: 左右极限至少一个不存在的间断点, 包含无穷间断点等.

- (3) 连续函数的运算(和、差、积、商、复合).

- (4) 初等函数的连续性: 初等函数在其定义区间上连续.

(5) 闭区间上连续函数的性质: 最大值最小值定理、有界性定理、零点定理、介值定理.

## 二、知识结构图



## 1.3 典型例题与解题方法

## 一、判断函数是否相等

**解题思路:** 当且仅当给定的函数, 其定义域和对应关系完全相同时, 才表示同一函数, 否则表示不同的函数.

**例 1.1** 判别下列各组函数是否相等.

(1) 函数  $f(x) = \frac{x}{x}$  与  $g(x) = 1$ ;

(2) 函数  $f(x) = \sqrt{x^2}$ ,  $g(x) = |x|$  与函数  $h(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

**解** (1) 由于  $f(x)$  的定义域为  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ , 而函数  $g(x)$  的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ , 二者定义域不同, 故  $f(x) \neq g(x)$ .

(2) 由于  $f, g, h$  的定义域都是  $(-\infty, +\infty)$ , 且对任意  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 均有  $f(x) = g(x) = h(x) = |x|$ , 故  $f = g = h$ .

## 二、求函数的定义域

**解题思路:** 求复杂函数的定义域, 就是求解由简单函数的定义域所构成的

不等式的解集.

**例 1.2** 求函数  $y = \sqrt{3-x} + \arctan \frac{1}{x}$  的定义域.

**解** 要使  $\sqrt{3-x}$  有意义, 必须  $3-x \geq 0$ , 推出  $x \leq 3$ ; 要使  $\arctan \frac{1}{x}$  有意义, 必须  $x \neq 0$ , 所以自变量  $x$  必须同时满足:  $\begin{cases} x \leq 3, \\ x \neq 0, \end{cases}$  此不等式组的解集为  $(-\infty, 0) \cup (0, 3]$ , 即函数的定义域为  $D = (-\infty, 0) \cup (0, 3]$ .

**例 1.3** 求函数  $y = \frac{\arccos \frac{2x-1}{7}}{\sqrt{x^2-x-6}}$  的定义域.

**解** 要使  $\arccos \frac{2x-1}{7}$  有意义, 必须  $-1 \leq \frac{2x-1}{7} \leq 1 \Rightarrow -7 \leq 2x-1 \leq 7 \Rightarrow -3 \leq x \leq 4$ .

另一方面, 要使函数有意义, 必须  $x^2-x-6 > 0$ , 即  $(x-3)(x+2) > 0 \Rightarrow x < -2$  或  $x > 3$ .

所以自变量  $x$  必须同时满足不等式组  $\begin{cases} -3 \leq x \leq 4, \\ x < -2 \cup x > 3, \end{cases}$  此不等式组的解集为  $[-3, -2) \cup (3, 4]$ , 即函数的定义域为  $D = [-3, -2) \cup (3, 4]$ .

**例 1.4** 设  $f(x)$  的定义域为  $[0, 1]$ , 问: (1)  $f(x^2)$ , (2)  $f(\sin x)$ , (3)  $f(x+a)$  ( $a > 0$ ), (4)  $f(x+a) + f(x-a)$  ( $a > 0$ ) 的定义域各是什么?

**解** 由  $f(x)$  的定义域为  $[0, 1]$ , 有

(1)  $0 \leq x^2 \leq 1$ , 即  $-1 \leq x \leq 1$ , 故  $f(x^2)$  的定义域为  $D = [-1, 1]$ ;

(2)  $0 \leq \sin x \leq 1$ , 所以  $f(\sin x)$  的定义域为  $D = [2k\pi, 2k\pi + \pi]$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;

(3)  $0 \leq x+a \leq 1$ , 所以  $f(x+a)$  的定义域为  $D = [-a, -a+1]$ ;

(4) 由  $\begin{cases} 0 \leq x+a \leq 1, \\ 0 \leq x-a \leq 1, \end{cases}$  可解得  $\begin{cases} -a \leq x \leq 1-a, \\ a \leq x \leq 1+a, \end{cases}$  因  $a > 0$ , 故当  $1-a < a$  时,

即  $a > \frac{1}{2}$  时, 此不等式组无解, 函数的定义域为  $\emptyset$ ; 而当  $1-a > a$ , 即  $a < \frac{1}{2}$

时, 不等式的解为  $a < x < 1-a$ , 从而函数的定义域为  $(a, 1-a)$ ; 当  $a = \frac{1}{2}$

时, 函数的定义域为单点集  $\left\{ \frac{1}{2} \right\}$ .

**注:** 熟记基本初等函数的定义域和值域, 是求解复杂函数定义域的基础.

### 三、求函数表达式

**解题思路：**含有未知函数的方程叫做函数方程，求解函数方程的基本方法为观察法和变量替换法。

**例 1.5** 已知  $f[\varphi(x)] = 1 + \cos x$ ,  $\varphi(x) = \sin \frac{x}{2}$ , 求  $f(x)$ .

**解** 因为  $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$ , 故

$$\begin{aligned} f[\varphi(x)] &= 1 + \cos x = 1 + \left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right) = 2 - 2\sin^2 \frac{x}{2} \\ &= 2\left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right) = 2[1 - \varphi^2(x)], \end{aligned}$$

故  $f(x) = 2(1 - x^2)$ .

**例 1.6** 已知  $f(x) = e^{x^2}$ ,  $f(\varphi(x)) = 1 - x$ , 且  $\varphi(x) \geq 0$ , 求  $\varphi(x)$  并写出它的定义域.

**解** 因为  $f(\varphi(x)) = e^{\varphi^2(x)} = 1 - x$ , 故  $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$ .

又  $\ln(1-x) \geq 0$ , 得  $1-x \geq 1$ , 即  $x \leq 0$ , 故  $\varphi(x)$  的定义域为  $D = (-\infty, 0]$ .

**例 1.7** 设  $y = f(u) = \arctan u$ ,  $u = \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ ,  $t = \psi(x) = x^2 - 1$ , 求  $f\{\varphi[\psi(x)]\}$ .

**提示：**求初等函数的复合函数，其基本方法是代入法，即将一个函数的自变量用另一函数的表达式来代替。

**解**  $f\{\varphi[\psi(x)]\} = \arctan \varphi[\psi(x)] = \arctan \frac{1}{\sqrt{\psi(x)}} = \arctan \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ .

### 四、判断函数的基本性质 (奇偶性、单调性、周期性、有界性)

**解题思路：**基本方法为利用函数奇偶性、单调性、周期性、有界性的定义。

**例 1.8** (1) 判断函数  $y = \frac{1}{x^2}$  在区间  $[a, 1]$  上是否有界 (其中  $0 < a < 1$ );

(2) 判断函数  $y = x \cos x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内是否有界.

**解** (1) 对任一  $x \in [a, 1]$ , 即  $0 < a \leq x \leq 1$ , 有  $a^2 \leq x^2 \leq 1$ , 可知

$$1 \leq y = \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{a^2},$$

故函数  $y = \frac{1}{x^2}$  在区间  $[a, 1]$  上有界.

(2) 对任给的一个正数  $M$ , 取  $x=(2[M]+1)\pi$ , 则  $\cos x=-1$ .

此时,  $|f(x)|=|(2[M]+1)\pi \cos(2[M]+1)\pi|=(2[M]+1)\pi>M$ ,  
因此, 函数  $y=x\cos x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内无界.

## 五、求反函数

**解题思路:** 求函数  $y=f(x)$  的反函数可以分为两个步骤: (1) 从  $y=f(x)$  中求解出  $x=f^{-1}(y)$ ; (2) 将  $x$  与  $y$  互换, 即得  $y=f(x)$  的反函数为  $y=f^{-1}(x)$ .

**例 1.9** 求函数  $y=10^{x-1}-2$  的反函数.

**解**  $y=10^{x-1}-2 \Rightarrow 10^{x-1}=y+2 \Rightarrow x-1=\lg(y+2) \Rightarrow x=\lg(y+2)+1$ , 将  $x$  与  $y$  互换, 即得  $y=10^{x-1}-2$  的反函数为  $y=\lg(x+2)+1$ .

**注:** (1) 不是所有函数都存在反函数;

(2) 单调函数存在反函数, 且反函数仍为单调函数.

## 六、证明函数在某点处极限不存在

**解题思路:** 要判断函数  $y=f(x)$  在某点  $x_0$  处的极限是否存在, 关键是求出  $f(x)$  在点  $x_0$  处的左极限  $f(x_0-0)$  和右极限  $f(x_0+0)$ , 只有当  $f(x_0-0)$  和  $f(x_0+0)$  都存在且相等的时候, 函数  $y=f(x)$  在点  $x_0$  处的极限才存在; 反之, 如果  $f(x_0-0)$  和  $f(x_0+0)$  中至少有一个不存在, 或存在但不相等, 则可说明  $y=f(x)$  在某点  $x_0$  处的极限不存在.

**例 1.10** 设  $f(x)=\frac{\sin x}{|x|}$ , 判断当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x)$  的极限是否存在.

**解** 因  $f(0-0)=\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)=\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{-x}=-1$ ,

$$f(0+0)=\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)=\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x}=1,$$

$f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$ , 故当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x)$  的极限不存在.

**注:** 此处用到了重要极限  $(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}=1$ .

## 七、求数列或函数的极限

**解题思路:** 求极限的基本方法包括: (1) 分子、分母有理化; (2) 多项式因式分解, 分子、分母约去公因式; (3) 同除以分子、分母的最高次项; (4) 利用两个重要极限; (5) 利用等价无穷小替换等. 但在做题时, 必须灵活运用, 并且这些方法不是孤立的, 常常在一个问题中用到几种方法.



例 1.11 求极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2n} - \sqrt{2n-1})$ .

提示: 分子有理化.

$$\begin{aligned} \text{解 原式} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{2n} - \sqrt{2n-1})(\sqrt{2n} + \sqrt{2n-1})}{\sqrt{2n} + \sqrt{2n-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n - (2n-1)}{\sqrt{2n} + \sqrt{2n-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2n} + \sqrt{2n-1}} = 0. \end{aligned}$$

例 1.12 计算  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$ .

提示: 分子、分母同时有理化.

$$\begin{aligned} \text{解 原式} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(1+2x-9)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

例 1.13 求极限  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x^2 - 13x - 7}{x^2 - 49}$ .

提示: 对于  $\frac{0}{0}$  型的分子、分母都是多项式的函数, 可以考虑分解因式, 然后约去公因子的方法求极限.

$$\text{解 原式} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(2x+1)(x-7)}{(x+7)(x-7)} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x+1}{x+7} = \frac{15}{14}.$$

例 1.14 求极限  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{3}{x^3-1} - \frac{1}{x-1} \right)$ .

提示: 先通分, 然后约去公因子, 再求极限.

$$\text{解 原式} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - (x^2+x+1)}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+2)(x-1)}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+2)}{x^2+x+1} = -1.$$

例 1.15 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$ .

提示: 分子、分母同除以  $x$  的最高次数  $x^{50}$ .

$$\text{解 原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(2 - \frac{3}{x}\right)^{20} \left(3 + \frac{2}{x}\right)^{30}}{\left(2 + \frac{1}{x}\right)^{50}} = \frac{2^{20} \cdot 3^{30}}{2^{50}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{30}.$$

例 1.16 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+6x+5}}{3x-2}$ .