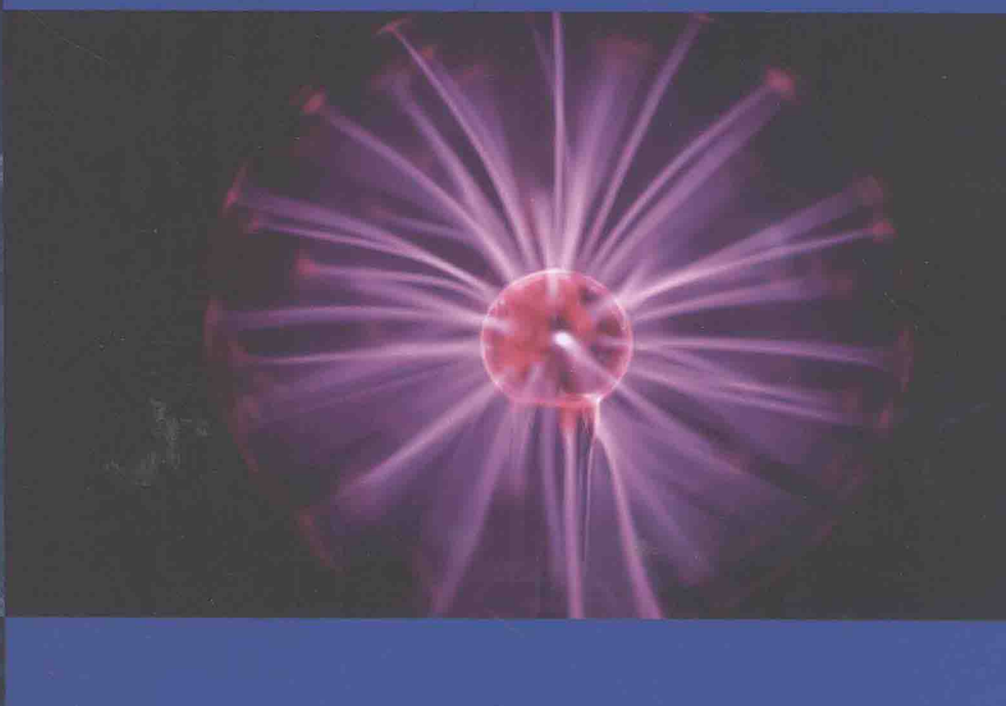
"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

普通物理实验（2）
电磁学部分

（第五版）

杨述武　孙迎春　沈国士　赵立竹　主编
杨介信　宦　强　编



高等教育出版社

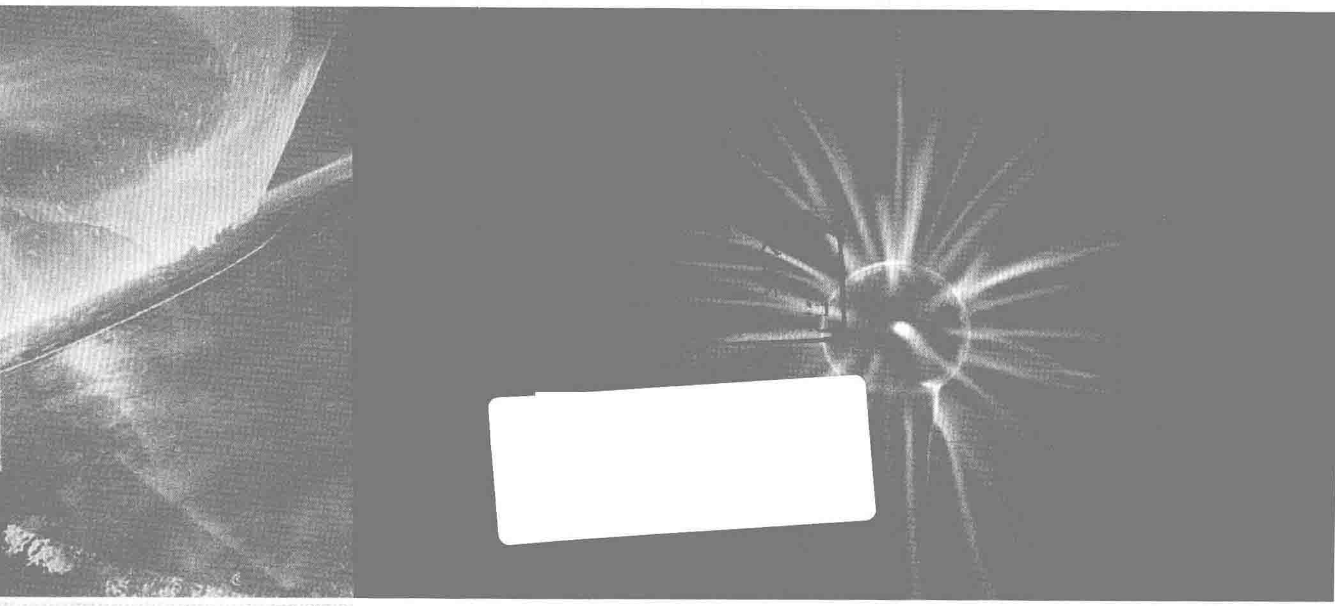
"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

普通物理实验（2）
电磁学部分

Putong Wuli Shiyan Diancixue Bufen

（第五版）

杨述武　孙迎春　沈国土　赵立竹　主编
杨介信　宦　强　编



高等教育出版社·北京

内容提要

《普通物理实验》（第五版）共 4 册，分为：力学、热学部分，电磁学部分，光学部分，综合及设计部分。 此次修订保持了原书通用性好、可读性强及注重能力培养的特色，并基本保持了原书的框架，同时为了适应教学的发展，在内容上有一些增删和改变。

本书是第二分册，为电磁学实验部分，共 29 个题目，内容有多处修改，使适用性和科学性均有所增强。

本书可作为高等学校物理类专业及相近专业普通物理实验的教材，也可供相关的广大科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

普通物理实验.2,电磁学部分/杨述武等主编；杨介信，宦强编.--5 版.--北京：高等教育出版社，2015.11

ISBN 978-7-04-043105-6

Ⅰ.①普… Ⅱ.①杨…②杨…③宦… Ⅲ.①普通物理学-实验-高等学校-教材②电磁学-实验-高等学校-教材 Ⅳ.①O4-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 139219 号

策划编辑	程福平	责任编辑	程福平	封面设计	杨立新	版式设计	王艳红
插图绘制	杜晓丹	责任校对	刘春萍	责任印制	赵义民		

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印　　刷	北京市鑫霸印务有限公司		http://www.landraco.com.cn
开　　本	787mm×1092mm　1/16		
印　　张	12.75	版　　次	1983 年 4 月第 1 版
字　　数	310 千字		2015 年 11 月第 5 版
购书热线	010-58581118	印　　次	2015 年 11 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　　价	20.80 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

版权所有　侵权必究

物 料 号　43105-00

前　言

本套书共四册，第一分册为力学、热学部分，第二分册为电磁学部分，第三分册为光学部分，第四分册为综合及设计部分。本书是第二分册。

2014 年 10 月，高等教育出版社委托我们对现行的第四版进行修订。我们和出版社共同商定，此次修订的原则是在保持原书基本框架的前提下，删去过时或不合适的内容，增加些新的内容，特别是增加一些有利于提高学生科学素质的内容。据此我们对普通物理实验课的目标定为：

(1) 学习基本实验方法和操作技能，在观察、测量与分析中，加深对物理学的认识；

(2) 学习实验的物理思想，为用实验方法探索问题有一定的基本训练；

(3) 培养学生的思维能力，主要是分析问题、解决问题和提出问题的能力，增强学生的素质，以适应学生各种可能的发展；

(4) 物理实验是门基础课，但“基础”的内涵随着科学技术的进步应有所更新；

(5) 基础物理实验应反映现代科技的成就；

(6) 为培养学生的动手能力，尤其是为培养学生思维能力搭建一个有效的平台，注意基础应与应用相结合。

对于实验装置，我们认为应让学生自己动手去组装，在组装过程中对动手和用脑都是训练，对实验也有全面的认识。学生在动手组装的过程中，可能遇到一些困难和出现错误，但这不是坏事，只要引导得法，就可在分析、解决问题过程中增长才干，增强信心，对将来学生自己独立工作将是可贵的经验。

在以上修订原则的指导下，本册修订的主要工作有：

(1) 对一些名词的说法进行了规范；

(2) 更正了发现的错误。

本册修订工作的分工如下：华东师范大学杨介信、宦强完成了全书的修订工作。

修订后虽有改进，但是由于我们对问题的分析、研究不足，肯定有进一步探讨的可能，希望读者继续对本书提出批评和建议，最后感谢读者给予我们的支持。

编　者

2015 年 1 月

致学生读者

1. 你们已经做了力学和热学实验，有过成功的喜悦，也可能有过失败的苦恼。现在要开始做可能使你们更感兴趣的电磁学实验。为了做好实验，应当回顾一下过去的实验是如何做的。

2. 做电磁学实验，电路的设计与分析是很重要的，应明确电路中各部分的作用，选用合适的仪器，防止接线出错。要注意，就算是在最简单的电路——制流电路和分压电路的安排中，也时常会出错。

3. 调节仪器是很好的训练，要想调得既快又好，需有较高的操作技能，同时还必须要会分析。

4. 在实验中遇到故障时应在切断电源后审查：

(1) 电路设计正确否?

(2) 实际电路与电路图是否一致? 例如在仪器的安排方面、接线方面（特别是滑线变阻器的接线），两者是否一致?

(3) 仪器的功能、量程是否合适?

(4) 参量的选择是否合适? 等等。

分析故障并予以排除是培养分析能力的好机会，不要轻易求助别人。

5. 学习实验的最终目的是能独立做实验，这包括方案设计、仪器选择、步骤安排、参量选取、故障分析、数据处理和结果评论等方面，但这些方面的训练并不是通过某一个（或每一个）实验全面进行的，而是在每次实验中对其中某一方面做些探索。

6. 要牢记电磁学实验操作规程，养成科学的实验习惯。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

电磁学实验操作规程

1. 连接电路时，必须有规整的电路图，对电路各部分的作用应明确，对电路中电源、仪器、电表及其他器具的规格应预先定好。

2. 选择出合适的仪器及用具，参照电路图将它们合理摆放到实验台上，做到使用安全并能很方便地进行观察、操作和读数。

3. 对多功能、多量程的仪表，要调到合适的功能状态和量程，对灵敏度可调的仪器要先调到灵敏度最低的状态。

4. 连线时，应将电路分为主回路和支路，从电源一端开始沿主回路按顺序进行，其次为支路；主回路中必须有开关（先断开！）；导线最好有几种颜色的，主回路和支回路分别用一种颜色。

5. 往接线柱上接导线时，应按顺时针方向将导线缠上。

6. 电路连接后，必须认真复查，可请指导教师检查，但是要确信自己所连电路是正确的，绝对不允许未经仔细审查电路就通电试试看！

7. 实验中途调换仪器、仪器换挡、改变量程、改变接线等操作，都要先切断电源。

8. 实验仪器显示任何不正常，都要先切断电源。

9. 实验结束时，将仪器调到最安全的状态再切断电源，如果时间容许应审查记录，看是否有漏测或错误，最后拆除连线，整理好仪器和导线。

目　录

绪　论

§1　测量数据处理的基本问题

物理实验中对一物理量进行测量的主要目的是：① 获得被测量的最佳估值；② 对最佳估值的可靠性作出估价，即给出被测定量的真值在某个量值范围的一个评定. 有关在普通物理实验范围内的数据处理理论及方法，已在《普通物理实验(一、力学、热学部分)》中有过介绍，在此只作必要的摘记与补充.

1. 直接测量

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为某一物理量 X 的 n 个等精度测量值，则可按以下顺序处理数据.

(1) 求算术平均值 $\bar{x}$

$$\bar{x} = \sum x_i / n \tag{0-1-1}$$

(2) 计算实验标准偏差 s

$$s = \left[\sum (x_i - \bar{x})^2 / (n-1)\right]^{1/2} \tag{0-1-2}$$

(3) 剔除坏数据(格拉布斯判据)

当某一测量值 x_k 满足下列关系时，可认为是坏数据而予以剔除：

$$x_k < \bar{x} - G_n \cdot s \quad 或 \quad x_k > \bar{x} + G_n \cdot s \tag{0-1-3}$$

式中 G_n 为格拉布斯判据系数. 各 n 值的 G_n 值见下表.

格拉布斯判据系数表

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
G_n	1.16	1.49	1.75	1.94	2.16	2.22	2.32	2.41	2.48	2.55
n	13	14	15	16	17	18	19	20	25	30
G_n	2.61	2.66	2.70	2.75	2.78	2.82	2.85	2.88	3.01	3.10

(4) 剔除坏数据后，再求平均值 $\bar{x}$、实验标准偏差 s 及平均值的实验标准偏差 $s(\bar{x})$.

$$s(\bar{x}) = s/\sqrt{n} \tag{0-1-4}$$

(5) 一般取剔除坏数据后的算术平均值为真值的最佳估值. 当测量值中某项系统误差 ζ 的符号与大小已知时，则取其符号相反值 $(-\zeta)$ 为修正值，平均值加修正值为被测量 X 的真值的最佳估值，即

$$X = \bar{x} + (-\zeta) \tag{0-1-5}$$

(6) 直接测量的不确定度

测量的理想状态是获得被测量在测量条件下的真值,但是由于测量时不可避免的误差,测量结果将偏离真值. 因为测量结果是真值的近似值,所以应给出此近似值可靠程度的评价,测量不确定度就是此评价的指标.

测得值不等于真值,可以设想真值就在测得值附近的一个量值范围内,测量不确定度就是评定此量值范围. 设测得值为 x,其测量不确定度为 $u(x)$,则真值可能在量值范围 $[x-u(x),x+u(x)]$ 之中. 显然,不确定度 $u(x)$ 越小,此量值范围就越窄,用此测得值 x 作为真值的估计值就越可靠.

对测量不确定度的评定,常以估计标准偏差去表示大小,这时称其为标准不确定度.

测量误差有随机误差和系统误差,对其评定方法也不同.

① A 类标准不确定度的评定　这是针对随机误差的,当求出被测量 X 的平均值的实验标准偏差

$$s(\bar{x})=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n\cdot(n-1)}}$$

则 A 类标准不确定度 $u_A(x)$ 等于算术平均值的实验标准偏差,即

$$u_A(x)=s(\bar{x}) \tag{0-1-6}$$

按误差理论的高斯分布,如果不存在其他误差,则量值范围 $[\bar{x}-u(x),\bar{x}+u(x)]$ 中包括真值的概率约为 $\frac{2}{3}$.

② B 类标准不确定度的评定　B 类不确定度分量,大多与系统误差分量的影响有关.B 类评定,有的依据仪器说明书或检定书,有的依据仪器的准确度等级,有的则粗略地依据仪器的分度值或经验,从这些信息可以获得该项系统误差的极限值 Δ(有的标出最大允许误差或示值误差限),对此误差,一般按误差理论的均匀分布处理,其标准偏差为 $\Delta/\sqrt{3}$,则 B 类标准不确定度 $u_B(x)$ 取为

$$u_B(x)=\frac{\Delta}{\sqrt{3}} \tag{0-1-7}$$

实际上该项误差的分布可能不是严格的均匀分布,那时上式中的换算系数也可取 $1/\sqrt{3}$,这在大多数情况下,也是可以的.

例如,使用一准确度等级为 0.5 级,量程 0~100 mA 的电流表测一电路的电流 I,则由电流表的最大允许误差引入的 I 的标准不确定度就是 B 类评定,$\Delta=0.5\%\times100$ mA,则

$$u_B(I)=0.5\%\times100\ \text{mA}/\sqrt{3}=0.29\ \text{mA}$$

③ 合成标准不确定度 $u_c(x)$

被测量 X 不确定度的 A 类评定或 B 类评定,均为所求不确定度的一部分,最后要合并为合成标准不确定度。参加合成的标准不确定度,不论来自 A 类评定还是 B 类评定,都是等价的,设要合成的标准不确定度有 k 项,用方和根方式合成,即

$$u_c(x)=\sqrt{\sum_{i=1}^{k}u^2(x_i)} \tag{0-1-8}$$

2. 间接测量

(1) 真值的最佳估值　设 $y=y(x_1,x_2,\cdots,x_m)$,即间接测量值 y 由 m 个直接测量值求出,则 y

的最佳估值取为

$$y=y(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_m)$$

（2）不确定度的合成传递（合成） 已知 $y=y(x_1,x_2,\cdots,x_m)$，又设 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 的标准不确定度为 $u(x_1),u(x_2),\cdots,u(x_m)$，则不确定度传递公式，或 y 的合成标准不确定度为

$$u_c(y)=\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}u(x_1)\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}u(x_2)\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial y}{\partial x_m}u(x_m)\right)^2} \tag{0-1-9}$$

对于幂函数 $y=Ax_1^a\cdot x_2^b\cdot\cdots\cdot x_m^k$（$A$ 为量纲为 1 的量），则为

$$u_c(y)=y\sqrt{\left(a\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2+\left(b\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2+\cdots+\left(k\frac{u(x_m)}{x_m}\right)^2} \tag{0-1-10}$$

3. 非等精度测量值的综合

如果待测量是用不同方法或不同准确度仪器测得的，那么这些测量值为非等精度测量值，从这些测量值求最佳估值，就要用加权平均. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的权分别为 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，则加权平均一般为

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}p_i} \tag{0-1-11}$$

参照式（0-1-9），可得加权平均 $\bar{x}$ 的标准不确定度合成公式为

$$u(\bar{x})=\left[\left(\frac{p_1}{\sum p_i}\right)^2u^2(x_1)+\left(\frac{p_2}{\sum p_i}\right)^2u^2(x_2)+\cdots+\right.$$

$$\left.\left(\frac{p_n}{\sum p_i}\right)^2u^2(x_n)\right]^{1/2}=\left[\frac{\sum p_i^2u^2(x_i)}{(\sum p_i)^2}\right]^{1/2}$$

理论分析可知，权 p_i 与其相应标准不确定度的平方成反比，因此上式可写成

$$u(\bar{x})=\left[\frac{\sum\left(\frac{1}{u^2(x_i)}\right)^2u^2(x_i)}{\left(\sum\frac{1}{u^2(x_i)}\right)^2}\right]^{1/2}=\left[\frac{1}{\sum\frac{1}{u^2(x_i)}}\right]^{1/2} \tag{0-1-12}$$

例： 已知同一个电阻的三种（或三组）测量值结果如下：

$$R_1=(350.0\pm1.0)\ \Omega$$

$$R_2=(350.30\pm0.20)\ \Omega$$

$$R_3=(350.25\pm0.05)\ \Omega$$

表示式中“±”符号之后的部分是标准不确定度.

求： 电阻的平均值 $\bar{R}$ 及其标准不确定度 $u(\bar{R})$.

解： 根据 p_i 与 $u^2(R_i)$ 成反比，有

$$p_i=k/u^2(R_i)$$

式中 k 为比例常量. 由给定的测量结果可以得到

$$p_1:p_2:p_3=k/u^2(R_1):k/u^2(R_2):k/u^2(R_3)=k:25k:400k$$

若取 $k=1$,则各权之比就是最简单的整数比,即 $p_1=1,p_2=25,p_3=400$,由式(0-1-11)和式(0-1-12)可以求得 $\overline{R}$ 和 $u(\overline{R})$.

$$\overline{R}=\frac{1\times350.0+25\times350.30+400\times350.25}{1+25+400}\Omega=\frac{149\ 208}{426}\Omega=350.25\ \Omega$$

$$u(\overline{R})=\frac{1}{\sqrt{\sum\frac{1}{u^2(R_i)}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1.0}+\frac{1}{0.20^2}+\frac{1}{0.05^2}}}\Omega=0.048\ \Omega=0.05\ \Omega$$

最后结果为

$$R=(350.25\pm0.05)\ \Omega$$

注意:k 取任意值对计算结果没有影响,但 k 取得合适时,计算就比较简单,并且各种测量值的权都是简单的正整数.

§2 两个变量关系的研究——作图法

研究两个变量关系的重要途径就是用曲线或函数式将两个变量的联系表现出来. 对于如何作图已在力学实验中讨论过,在此仅讨论变量间的函数关系. 这类问题有两种不同的情况:

(1) 已知两个变量函数关系的形式,但是其中有未知参量;

(2) 两个变量函数关系的形式尚未知.

现在分别就这两种情况进行讨论.

A. 两个变量函数关系的形式已知时

如果两个变量 x、y 间是直线关系,即

$$y=a+bx \tag{0-2-1}$$

则可用 n 组测量值(x_i,y_i)作图,所得直线的截距即参量 a,而斜率是参量 b.

但是,实验中两个变量的关系往往不是直线关系,例如,弹簧振子的振动周期 T 和所加负载 m 的关系为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m+cm_0}{k}}$$

式中 m_0 为弹簧自身的质量,π 为圆周率,c 和 k 为待定参量. 测量不同 m 对应的 T,可以作 $T-m$ 图线,图 0-2-1 为其一例. 由于它是曲线,因而无法从图上得出待定参量值. 类似这种情况,可以设法改换变量,将函数关系转变为直线关系,对此周期公式可以改成为

$$T^2=\left(\frac{4\pi^2cm_0}{k}\right)+\left(\frac{4\pi^2}{k}\right)m$$

它表示 T^2 和 m 间为直线关系. 即作 T^2-m 直线(图 0-2-2),从图上求出截距 a,斜率 b,则

$$a=\frac{4\pi^2cm_0}{k}$$

$$b=\frac{4\pi^2}{k}$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

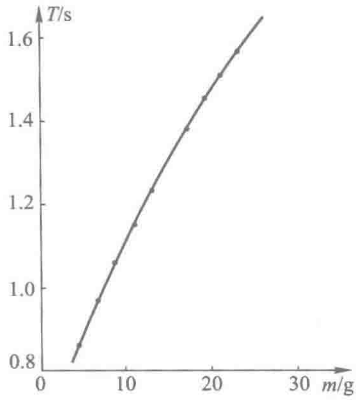


图 0-2-1

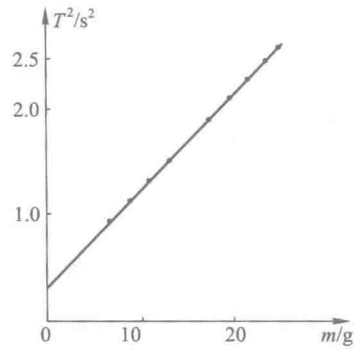


图 0-2-2

由此可求出 k 和 c 之值(m_0、π 为已知).

即对于非线性函数,要通过变换变量使之成为线性函数,再用作图法求出截距和斜率,进而确定待定参量.

实际的非线性函数如何变换要看函数的形式,例如

$$y=a\mathrm{e}^{-bx}\cdots\cdots\cdots\ [\ln y]=\ln a-b[x]$$

$$y=R\frac{E-x}{x}\cdots\cdots\cdots\ [y]=-R+R\cdot E\left[\frac{1}{x}\right]$$

$$y=ax^{b}\cdots\cdots\cdots\ [\ln y]=\ln a+b[\ln x]$$

$$y=ax+bx^{2}\cdots\cdots\cdots\ \left[\frac{y}{x}\right]=a+b[x]$$

上列式中的括号[　]为变换后的变量.

B. 两个变量的函数关系形式尚未知时

首先用测量值作图,如果得一直线,则从图上求出截距和斜率,函数关系就完全确定了;当得到的是曲线时,就要分析曲线的形式,参照已知的函数曲线(图 0-2-3),给出假定的函数式,再用上述 A 中处理非线性函数的方法,使之线性化,但这样做不一定一次就成功,可能要反复几次才可得出较好的结果. 下面举一例对此过程作些说明.

研究某铁铝合金的磁致伸缩现象时,测得样品的相对伸长($\Delta l/l$)与建立外磁场的电流(I)有如下表所示的数据记录. 试寻找$\Delta l/l$与 I 的经验公式(即 $\Delta l/l$ 与 I 的数学关系式).

I/A	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60
$\frac{\Delta l}{l}/10^{-6}$	0.81	4.63	9.84	15.22	19.93	23.92
I/A	0.70	0.80	0.90	1.00	1.50	2.00
$\frac{\Delta l}{l}/10^{-6}$	26.85	29.62	30.92	32.71	36.94	38.32
I/A	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00
$\frac{\Delta l}{l}/10^{-6}$	39.22	40.19	40.60	41.08	41.33	41.82

根据实验数据，取 I/A 为横坐标，$\dfrac{\Delta l}{l}/10^{-6}$ 为纵坐标作磁场电流与相对伸长的关系曲线，如图 0-2-4 所示. 由图可知，它们不是线性关系，按曲线的变化规律，参照图 0-2-3 所示的函数对应关系可写出数学关系式：

$$\frac{\Delta l}{l}=\alpha \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{I}}$$

式中 α、β 是待定参量，经过线性变换，上式成为

$$\ln \frac{\Delta l}{l}=\ln \alpha-\beta\left(\frac{1}{I}\right)$$

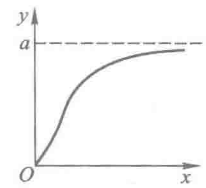
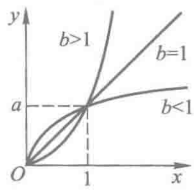
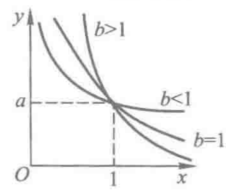
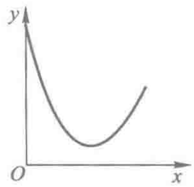
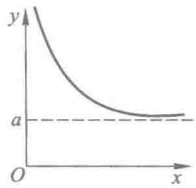
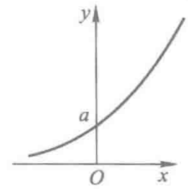
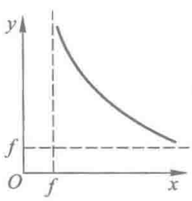
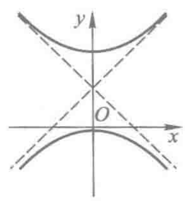
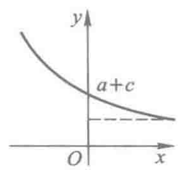
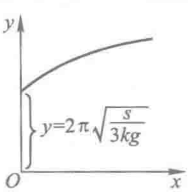
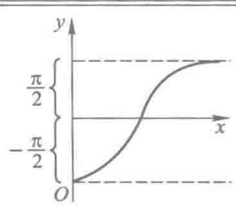
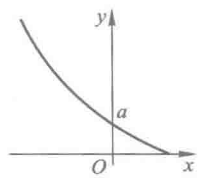
		
$y=a\mathrm{e}^{-b/x}$	$y=ax^{b}(b>0)$	$y=ax^{-b}$
		
$y=2\pi\sqrt{\dfrac{c^{2}+k^{2}}{xg}}$	$y=a\mathrm{e}^{b/x}(b>0)$	$y=a\mathrm{e}^{bx}(b>0)$
		
$(x-f)(y-f)=k$	$f=\dfrac{y^{2}-x^{2}}{xy}$	$y=a\mathrm{e}^{-bx}+c(b>0)$
		
$y=2\pi\sqrt{\dfrac{x+s/3}{kg}}$	$y=\arctan\dfrac{Lx-\dfrac{1}{cx}}{R}$	$y=a\mathrm{e}^{-bx}(b>0)$

图 0-2-3

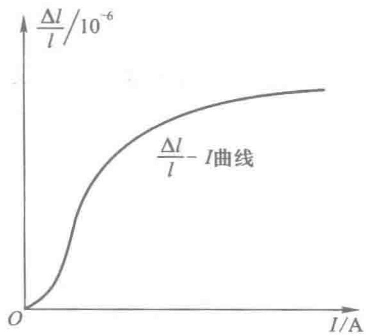


图 0-2-4　磁化电流与相对伸长的关系曲线

显而易见，如果 $y=\ln\dfrac{\Delta l}{l}$，$x=\dfrac{1}{I}$，$a=\ln\alpha$，$b=-\beta$，作 $y-x$ 曲线，那么将得到一条不通过坐标原点的倾斜直线.

用 EXCEL 程序画出图 0-2-5 所示 y 与 x 的关系曲线，确实可用一条直线代替，回归线的截距 $a=3.835$，其斜率

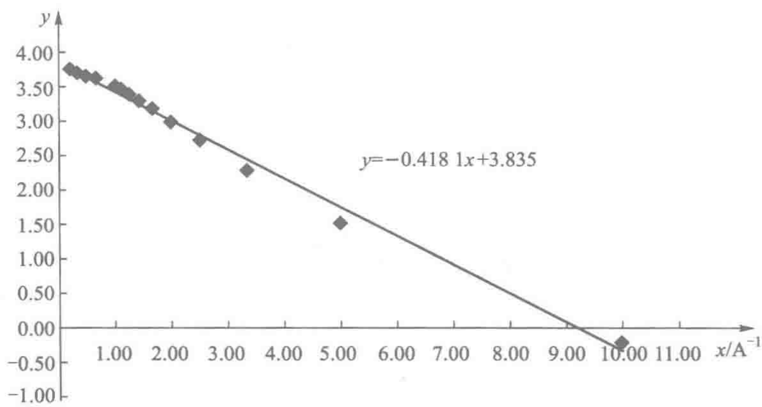


图 0-2-5　某铁铝合金的回归直线

$$b=-0.418\ 1\ \mathrm{A}$$

由于 $a=\ln\alpha$，$b=-\beta$，所以 $\alpha=46.29$，$\beta=0.4181\ \mathrm{A}$，则该合金的磁致伸缩规律可用如下的经验公式表示：

$$\frac{\Delta l}{l}=46.29\exp\left(-\frac{0.418\ 1\ \mathrm{A}}{I}\right)\times10^{-6}$$

在测量的精确度不很高的实验里，例如 2～3 位有效数字的测量要求，作图既可直观了解测量的全貌，又可方便地得到测量值或间接测量值的大小. 对于更高精密度的变量间关系的研究，可根据最小二乘法原理，用计算机处理.

§3 两个变量线性关系的研究——简化拟合法

设变量 x、y 间存在 $y=a+bx$ 的直线关系，由于测量存在误差，对 n 次测量则有

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a+bx_1+v_1 \\ y_2 &= a+bx_2+v_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= a+bx_n+v_n \end{aligned}\right\} \tag{0-3-1}$$

式中 v_i 表示测量误差. 现在将 n 组测量分为前后两部分，从中取对应的两组：

$$\left.\begin{aligned} y_i &= a+bx_i+v_i \\ y_{i+\frac{n}{2}} &= a+bx_{i+\frac{n}{2}}+v_{i+\frac{n}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{0-3-2}$$

略去误差项取

$$\left.\begin{aligned} b &= \frac{\sum\limits_{i+n/2}^{n} y_i - \sum\limits_{i}^{n/2} y_i}{\sum\limits_{i+n/2}^{n} x_i - \sum\limits_{i}^{n/2} x_i} \\ a &= \bar{y} - b\bar{x} \end{aligned}\right\} \tag{0-3-3}$$

如 n 为奇数，中间数可公用.

§4 两个变量关系的研究——最小二乘法

假设变量 x,y 间存在直线关系 $y=a+bx$，参量 a、b 分别为 y 轴截距和斜率，当将测量值(x_i, y_i)代入此式时，由于 $y_i \neq a+bx_i$，引入残差项 v_i 后有

$$y_i = a+bx_i+v_i \tag{0-4-1}$$

或

$$v_i = y_i-(a+bx_i)$$

对 n 次测量，可有

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= y_1-(a+bx_1) \\ v_2 &= y_2-(a+bx_2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n &= y_n-(a+bx_n) \end{aligned}\right\} \tag{0-4-2}$$

由于 n 个方程中有 $n+2$ 个未知数($a,b,v_1,v_2,\cdots,v_n$)，所以不能从解联立方程组求出 a,b 值. 设 y 为等精度测量值，最小二乘原理指出，满足 $\sum v_i^2=$ 极小条件下求出的参量 a、b 之值 $\hat{a}$、$\hat{b}$ 为最佳拟合值，即从

$$\sum v_i^2 = \sum [y_i-(a+bx_i)]^2$$

$$\frac{\partial \sum v_i^2}{\partial \hat{a}} = 0, \qquad \frac{\partial \sum v_i^2}{\partial \hat{b}} = 0 \tag{0-4-3}$$

得出

$$\left.\begin{aligned} \sum y_i &= n\hat{a} + \hat{b}\sum x_i \\ \sum x_i y_i &= \hat{a}\sum x_i + \hat{b}\sum x_i^2 \end{aligned}\right\} \tag{0-4-4}$$

解此联立方程组,得

$$\left.\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \\ \hat{b} &= \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \end{aligned}\right\} \tag{0-4-5}$$

令

$$\left.\begin{aligned} s_{xx} &\equiv \sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2/n \\ s_{yy} &\equiv \sum (y_i - \bar{y})^2 = \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2/n \\ s_{xy} &\equiv \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i/n \end{aligned}\right\} \tag{0-4-6}$$

则由式(0-4-5)及式(0-4-6),又可得出

$$\left.\begin{aligned} \hat{b} &= s_{xy}/s_{xx} \\ \hat{a} &= \bar{y} - \hat{b}\bar{x} \end{aligned}\right\} \tag{0-4-7}$$

为了反映变量 x、y 间的线性关系的密切程度,常用相关系数 ρ_{xy} 来描述,其估算式为

$$\rho_{xy} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{[\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2]^{1/2}} = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_{xx}s_{yy}}} \tag{0-4-8}$$

可以证明 $-1 \leqslant \rho_{xy} \leqslant +1$,当 $|\rho_{xy}| \to 1$ 时测量的数据点分布在一条直线附近,当 $\rho_{xy} \to 0$ 时数据点杂乱地分散开,另外 ρ_{xy} 与 $\hat{b}$ 同符号(均由 s_{xy} 的符号决定正负).

从理论上讲,$\rho_{xy} > 0$ 就应承认 x、y 间存在一定的相关关系,但是由于 ρ_{xy} 值是从较少的数据中求出的,根据数理统计理论,对于一定的 n 值,ρ_{xy} 要在大于某一临界值 $\rho_{xy临}$ 时,才可以认为存在线性相关关系. 下表中给出了各 n 值对应的 $\rho_{xy临}$ 值.

n	3	4	5	6	7	8	9
$\rho_{xy临}$	0.999 8	0.990	0.959	0.917	0.874	0.834	0.798
n	10	11	12	13	14	15	16
$\rho_{xy临}$	0.765	0.735	0.708	0.684	0.661	0.641	0.623
n	17	18	19	20	21	22	
$\rho_{xy临}$	0.606	0.590	0.575	0.561	0.549	0.537	

可以证明①参量 $\hat{a}$、$\hat{b}$ 的标准偏差 s_a、s_b 和 y 的标准偏差 s_y 之间的关系为

$$s_y=\left[\frac{\sum(y_i-\hat{a}-\hat{b}x_i)^2}{n-2}\right]^{1/2}=\left[\frac{1-\rho_{xy}^2}{n-2}s_{yy}\right]^{1/2} \tag{0-4-9}$$

$$\left.\begin{aligned} s_b&=s_y/\sqrt{s_{xx}} \\ s_a&=s_b\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} \end{aligned}\right\} \tag{0-4-10}$$

结合式(0-4-9)和式(0-4-10),可知

$$s_b=\sqrt{\frac{1-\rho_{xy}^2}{n-2}}\cdot\frac{\hat{b}}{\rho_{xy}}$$

计算一般用计算机或科学计算器进行,也可用现成软件如 EXCEL 等完成.

例:已知变量 x 和 y 的测量值为

x	1.11	1.18	1.25	1.33	1.43	1.54	1.67	1.82	2.00
y	85.2	91.0	99.0	108	117	128	142	157	175
x	2.22	2.50	2.86	3.33	4.00	5.00	6.67	10.00	
y	198	226	262	312	377	480	654	990	

问:x、y 是否为线性关系?求回归直线的截距 $\hat{a}$、斜率 $\hat{b}$ 及标准偏差 s_a、s_b.

解:用计算机算出

$$\hat{a}=-28.584\,600\,83,\quad s_a=0.434\,097\,2$$

$$\hat{b}=101.926\,231\,5,\quad s_b=0.116\,406\,9$$

$$\rho_{xy}=0.999\,990\,217\,7$$

$$s_y=1.103\,594\,857$$

$n=17$,查表 $\rho_{xy临}=0.606$,而 $\rho_{xy}>\rho_{xy临}$ 可以认为 x、y 间是线性关系.

结果

$$\hat{a}=-28.6,\quad s_a=0.4$$

$$\hat{b}=101.93,\quad s_b=0.12$$

$$\rho_{xy}=0.999\,990$$

回归方程为

$$y=-28.6+101.93x$$

① 参阅:肖明耀.实验误差估计与数据处理.北京:科学出版社,1980:151—153

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com