

TURING
图灵新知

数 + 学 || (女 × 孩) 2

费马大定理

Fermat's Last Theorem

日本数学会出版奖得主
结城浩◇著

丁灵◇译



中国工信出版集团



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

数学II



女孩(2)

费马大定理
Fermat's Last Theorem

目
结
城

浩
◇
著

丁
灵
◇
译

人民邮电出版社
北 京

图书在版编目(CIP)数据

数学女孩. 2, 费马大定理 / (日) 结城浩著; 丁灵译. — 北京: 人民邮电出版社, 2016. 1
(图灵新知)
ISBN 978-7-115-41111-2

I. ①数… II. ①结… ②丁… III. ①数学—普及读物 IV. ①01-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第273228号

内 容 提 要

《数学女孩》系列以小说的形式展开, 重点描述一群年轻人探寻数学中的美。内容由浅入深, 数学讲解部分十分精妙, 被称为“绝赞的数学科普书”。

《数学女孩2: 费马大定理》有许多巧思。每一章针对不同议题进行解说, 再于最后一章切入正题——费马大定理。作者巧妙地以每一章的概念作为拼图, 拼出被称为“世纪谜题”的费马大定理的大概证明。整本书一气呵成, 非常适合对数学感兴趣的初高中生以及成人阅读。

◆ 著 [日] 结城浩

译 丁 灵

责任编辑 乐 馨

执行编辑 杜晓静

责任印制 杨林杰

◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市丰台区成寿寺路11号

邮编 100164 电子邮件 315@ptpress.com.cn

网址 <http://www.ptpress.com.cn>

北京隆昌伟业印刷有限公司印刷

◆ 开本: 880 × 1230 1/32

印张: 11.5

字数: 325千字

2016年1月第1版

印数: 1-5 000册

2016年1月北京第1次印刷

著作权合同登记号 图字: 01-2015-5653号

定价: 42.00元

读者服务热线: (010)51095186转600 印装质量热线: (010)81055316

反盗版热线: (010)81055315

广告经营许可证: 京崇工商广字第0021号

致读者

本书涵盖了形形色色的数学题，从小学生都能明白的简单问题，到困扰了数学家 350 余年的难题。

本书中通过语言、图形以及数学公式表达主人公的思路。

如果你不太明白数学公式的含义，姑且先看看故事，公式可以一眼带过，泰朵拉和尤里会跟你一同前行。

擅长数学的读者，请不要仅仅阅读故事，务必一同探究数学公式。如此，便可品味到深埋在故事中的别样趣味。

说不定，您会体验到一个代入感极强的动人故事。

主页通知

关于本书的最新信息，可查阅以下URL。

<http://www.hyuki.com/girl/>

此URL出自作者的个人主页。

© 2008 本书内容受著作权法保护。未经作者·发行者许可，不得擅自复制·复印。

试读结束：需要全本请在线购买：www.ertongbook.com

序 言

神创造了整数，除此之外的数都是由人创造的。

——克罗内克

这是整数的世界。

我们数数。数鸽子，数星星，掰着指头数离放假还有多少天。小时候泡在热乎乎的澡池子里，被家长命令“好好地把肩膀都泡进去”，只好默默忍受着，然后数到十。

这是图形的世界。

我们画画。用圆规画圆，用三角尺画线，被不经意中画出的正六边形吓了一跳。拖着伞跑过操场，描绘出漫长的直线。回头是圆圆的夕阳。再见了三角形，明天见。

这是数学的世界。

整数是由神创造的，克罗内克如是说。毕达哥拉斯以及丢番图把整数和直角三角形连接在一起。费马则更加别出心裁，他的一句玩笑话困扰了数学家们三个多世纪。

史上最大的谜题谁都知道，但谁也解不开。为了解开它，必须运用

2 序言

所有的数学知识。这不是一道一般的谜题，不容小觑。

这是我们的世界。

我们走在寻访“真实的样子”的旅途上。失落之物重见天日，已逝之物重返世间。我们承载着生命和时间的重量，经历着如此的消逝和发现，死亡和重生。

思考成长的含义，追溯发现的意义。

询问孤独的含义，获悉言语的意义。

记忆中总有一条错综复杂的小路，朦朦胧胧。其中能清晰记起的，只有那闪烁的银河，温暖的手心，微颤的嗓音，以及栗色的发丝。所以，我决定从那里讲起。

从那个，周六的午后——



序言

第 1 章 将无限宇宙尽收掌心	1
1.1 银河	1
1.2 发现	2
1.3 找不同	3
1.4 时钟巡回	6
1.5 完全巡回的条件	13
1.6 巡回哪里	15
1.7 超越人类的极限	19
1.8 究竟是什么东西，你们知道吗	22

第 2 章 勾股定理	25
2.1 泰朵拉	25
2.2 米尔嘉	29
2.3 尤里	32
2.4 毕达哥拉·榨汁机	33
2.5 家中	35
2.5.1 调查奇偶性	35
2.5.2 使用数学公式	37
2.5.3 向着乘积的形式进发	38
2.5.4 互质	40

2 目录

2.5.5	分解质因数	43
2.6	给泰朵拉讲解	49
2.7	十分感谢	51
2.8	单位圆上的有理点	52
<hr/>		
第3章	互质	59
3.1	尤里	59
3.2	分数	61
3.3	最大公约数和最小公倍数	63
3.4	打破砂锅问到底的人	68
3.5	米尔嘉	69
3.6	质数指数记数法	70
3.6.1	实例	70
3.6.2	节奏加快	73
3.6.3	乘法运算	74
3.6.4	最大公约数	75
3.6.5	向着无限维空间出发	77
3.7	米尔嘉大人	78
<hr/>		
第4章	反证法	83
4.1	家中	83
4.1.1	定义	83
4.1.2	命题	86
4.1.3	数学公式	88
4.1.4	证明	95
4.2	高中	97

4.2.1	奇偶	97
4.2.2	矛盾	101
<hr/>		
第5章	可以粉碎的质数	105
5.1	教室	105
5.1.1	速度题	105
5.1.2	用一次方程定义数字	107
5.1.3	用二次方程定义数字	109
5.2	复数的和与积	111
5.2.1	复数的和	111
5.2.2	复数的积	112
5.2.3	复平面上的 $\pm i$	116
5.3	五个格点	120
5.3.1	卡片	120
5.3.2	“豆子”咖啡店	122
5.4	可以粉碎的质数	126
<hr/>		
第6章	阿贝尔群的眼泪	141
6.1	奔跑的早晨	141
6.2	第一天	144
6.2.1	为了将运算引入集合	144
6.2.2	运算	145
6.2.3	结合律	148
6.2.4	单位元	149
6.2.5	逆元	150
6.2.6	群的定义	151

6.2.7	群的示例	151
6.2.8	最小的群	155
6.2.9	有2个元素的群	156
6.2.10	同构	158
6.2.11	用餐	160
6.3	第二天	160
6.3.1	交换律	160
6.3.2	正多边形	162
6.3.3	数学文章的解释	164
6.3.4	辨群公理	166
6.4	真实的样子	167
6.4.1	本质和抽象化	167
6.4.2	摇摆不定的心	169
<hr/>		
第7章	以发型为模	173
7.1	时钟	173
7.1.1	余数的定义	173
7.1.2	时针指示之物	176
7.2	同余	177
7.2.1	余项	177
7.2.2	同余	181
7.2.3	同余的含义	184
7.2.4	不拘小节地同等看待	184
7.2.5	等式和同余式	185
7.2.6	两边同时做除法运算的条件	186
7.2.7	拐杖	190

7.3	除法的本质	192
7.3.1	喝着可可	192
7.3.2	运算表的研究	193
7.3.3	证明	198
7.4	群·环·域	200
7.4.1	既约剩余类群	200
7.4.2	由群到环	203
7.4.3	由环到域	209
7.5	以发型为模	214
第8章 无穷递降法		217
8.1	费马大定理	217
8.2	泰朵拉的三角形	224
8.2.1	图书室	224
8.2.2	曲曲折折的小路	229
8.3	我的旅行	230
8.3.1	旅行的出发点：用 m, n 表示 A, B, C, D	230
8.3.2	原子和基本粒子的关系：用 e, f, s, t 表示 m, n	235
8.3.3	研究基本粒子 $s + t, s - t$	237
8.3.4	基本粒子和夸克的关系：用 u, v 表示 s, t	240
8.4	尤里的灵感	242
8.4.1	房间	242
8.4.2	小学	243
8.4.3	自动贩卖机	245
8.5	米尔嘉的证明	252
8.5.1	备战	252

8.5.2	米尔嘉	253
8.5.3	就差填上最后一块拼图	258

第9章	最美的数学公式	261
------------	----------------	------------

9.1	最美的数学公式	261
9.1.1	欧拉的式子	261
9.1.2	欧拉的公式	263
9.1.3	指数运算法则	267
9.1.4	-1 次方, $\frac{1}{2}$ 次方	272
9.1.5	指数函数	273
9.1.6	遵守数学公式	277
9.1.7	向三角函数架起桥梁	279
9.2	准备庆功宴	286
9.2.1	音乐教室	286
9.2.2	自己家	287

第10章	费马大定理	289
-------------	--------------	------------

10.1	公开研讨会	289
10.2	历史	291
10.2.1	问题	291
10.2.2	初等数论的时代	292
10.2.3	代数数论时代	293
10.2.4	几何数论时代	295
10.3	怀尔斯的兴奋	296
10.3.1	搭乘时间机器	296
10.3.2	从“1986年的景色”发现问题	297

10.3.3	半稳定的椭圆曲线	300
10.3.4	证明概要	302
10.4	椭圆曲线的世界	303
10.4.1	什么是椭圆曲线	303
10.4.2	从有理数域到有限域	305
10.4.3	有限域 \mathbb{F}_2	307
10.4.4	有限域 \mathbb{F}_3	309
10.4.5	有限域 \mathbb{F}_5	310
10.4.6	点的个数	312
10.4.7	棱柱	313
10.5	自守形式的世界	314
10.5.1	保护形式	314
10.5.2	q 展开	316
10.5.3	从 $F(q)$ 到数列 $a(k)$	317
10.6	谷山-志村定理	321
10.6.1	两个世界	321
10.6.2	弗赖曲线	323
10.6.3	半稳定	323
10.7	庆功宴	326
10.7.1	自己家中	326
10.7.2	Zeta · 变奏曲	327
10.7.3	生产的孤独	330
10.7.4	尤里的灵感	331
10.7.5	并非偶然	334
10.7.6	平安夜	336
10.8	仙女座也研究数学	336

8 目录

尾 声 341

后 记 345

参考文献和导读 347

第1章 将无限宇宙尽收掌心

同学们，有人说它像一条大河，也有人说它像一片牛奶
流淌后留下的痕迹
——这白茫茫的一片究竟是什么东西，你们知道吗？
——宫泽贤治《银河铁道之夜》^①

1.1 银河

“哥哥，好漂亮啊。”尤里说。

“是啊。数不清有多少颗。”我回答。

尤里上初二，我上高二。

她管我叫“哥哥”，但我并不是她的亲哥哥。

我的妈妈和尤里的妈妈是姐妹俩。也就是说，我是他的表哥。

她住在我家附近，比我小三岁。从小时候起我们就经常在一起玩耍。
尤里很仰慕我，可能是因为我跟她都是独生子女吧。

我房间里堆着好些书，她很喜欢那些书，休息日总是泡在我家里读书。

^①《银河铁道之夜》，宫泽贤治（著），周龙梅（译），少年儿童出版社2014年7月出版。

那天也是如此。我们一起看星星的图鉴，大本的图鉴上满是照片，织女星、牛郎星、天津四、南河三、天狼星、参宿四……星星的照片，说起来不过是发光点的集合，仿佛存在规律性，又好似没有。我们深深地沉浸在这份美丽之中。

“听说看夜空的人分成两种——‘数星星的人’和‘画星座的人’。哥哥你属于哪种？”

“我应该是数星星的那种吧。”

1.2 发现

“哥哥，高中学习难吗？”尤里一边问，一边摇晃着栗色的马尾辫，把书放回书架上。

“学习？没有那么难。”我擦着眼镜回答。

“但是，这里的书感觉都好难啊。”

“这些不是学校的课本，是我自己感兴趣才看的。”

“出于兴趣读的书反而更难，真怪。”

“因为自己喜欢的书都是拿来挑战自己理解极限的嘛。”

“一如既往，好多数学书啊……”尤里踮着脚，望着高大书架上的图书，努力想看清书脊。紧腿蓝色牛仔裤很配她那苗条的身材。

“尤里你讨厌数学吗？”

“数学？”尤里回过头，“嗯……说不上喜欢，也不讨厌。哥哥你应该是——喜欢的吧？”

“嗯，我喜欢数学。学校放学后，我也会在图书室里研究数学。”

“诶？”

“图书室在学校尽头，冬暖夏凉。我超喜欢图书室，每次去那都要拿