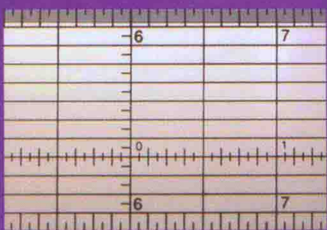
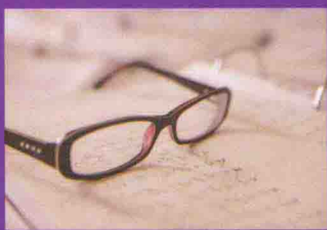
高等院校公共课规划教材

陶煌 等 主编

高等数学

GAODENG SHUXUE


北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

高等院校公共课规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

主　编　陶　煌　杨　静
副主编　王洪梅　苏建民
编　委　韩宝燕　丁朝刚
　　　　李晓岩　毛奕妙

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/陶煌等编. —北京：北京师范大学出版社，2011.7
(2014. 8 重印)
(高等院校公共课规划教材)
ISBN 978-7-303-13173-0

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①陶… Ⅲ. ①数学课—高等学校—教材
Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 149657 号

营销中心电话 010—58802755 58800035
北师大出版社职业教育分社网 http://zjfs.bnup.com
电子信箱 zhijiao@bnupg.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com
北京新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
印 刷：北京市彩虹印刷有限责任公司
经 销：全国新华书店
开 本：184 mm×260 mm
印 张：20.25
字 数：440 千字
版 次：2011 年 7 月第 1 版
印 次：2014 年 8 月第 5 次印刷
定 价：38.00 元

策划编辑：庞海龙 责任编辑：庞海龙
美术编辑：高 霞 装帧设计：唐韵设计
责任校对：李 菡 责任印制：马 洁

前　　言

本教材依据教育部“高等数学”课程的基本要求，由具有丰富教学经验的一线教师，在深入分析学生的认知特点及专业背景、充分汲取许多《高等数学》教材的优点基础之上认真编写而成。

本教材的编写遵循以下原则和要求：

(1)概念的引入从实际问题入手，遵循从感性到理性的认知规律，同时也为下一步理论在实际中的应用推出范例，从而加强学生对数学的应用意识和兴趣。

(2)选编大量有实际应用背景的例题，习题及讨论课题，落实以应用为目的的原则，并力求向各专业内容渗透，同时教材还选编了一些简单的专业问题，但涉足并不太深。

(3)贯穿数学的人文精神和科学精神。

(4)恰当把握教学内容的深度和广度，尽可能显示高等数学的直观性与应用性，注重保持数学自身的系统性与逻辑性。较多地采用几何解释与归纳，只对重要的理论提供证明过程。

(5)注重教学互动，改变学生学习方式。每节末及每章末设置习题，便于学生自我考查对本章重点知识的掌握程度。

(6)注意循序渐进性。充分考虑先行内容与后继内容的衔接；例题与习题的难度都有一定的梯度，安排顺序应由易到难。

(7)以生为本，分层次教学。考虑到学生的基础不一致的特点，为了兼顾全体学生的个体差异，在教材中充分体现分层次教学；未打 * 号的内容为必学，打 * 号的内容为选学。

(8)文字叙述精炼准确、通俗流畅，逻辑性强。尽量运用图形、表格、实例、数据来说明问题，以增强教材的直观性。每章或每节开始用尽可能短的语言点题，使读者了解本章或本节所研究的问题的来龙去脉，以起到承上启下的作用，增加可读性。

本教材的任务是，在初等数学的基础上让学生进一步学习和掌握高等数学，习得专业知识所必需、够用的数学基础和工具。培养学生正确熟练的运算能力，提高学生运用数学方法分析问题和解决问题的能力，进而为专业课的学习打下基础。同时还要使学生掌握数学的基本知识、基本理论和基本方法，培养学生在数学方面的实践动手能力，具备作为一个大学生应该具有的数学素质。

高等数学的教材面对的学生专业相差较大，所以本教材在内容安排上，包括函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、微分方程、空间解析几何与向量、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、拉普拉斯变换九章内容，希望能给予老师和不同专业的学生相对宽的学习选择范围。

山西大学、海南科技职业学院、潍坊工商职业学院、潍坊科技学院、山东工艺美术学院、山东丝绸纺织职业学院的一线教师为本书的编写、审、校做了大量的工作，在此表示衷心感谢。

本书的编写由陶煌负责全书的提纲设计、书稿整理、统稿把关及组织协调工作。承担执笔任务的是：陶煌(第七章)，杨静(第二章、第六章)，庄洪梅(第一章、第三章)，苏建民(第五章、第九章)，韩宝燕、丁朝刚(第四章)，李晓岩、毛奕妙(第八章)。

本书可作为高职高专以及部分本科院校各专业高等数学课程的通用教材，相信本教材可以在高等数学教学中发挥相应作用。

编　者

目录 CONTENTS

序 言

由研究常量和不变图形，发展到研究变量和函数，是数学发展史上一次深刻的变革。前者称为初等数学或常量数学，后者称为高等数学或变量数学，微积分是数学的一门重要分支，一般是微分学、积分学、级数论、函数论、微分方程及变分法等学科的总称。是高等数学最基本、最重要的组成部分，是现代变量数学的基础学科。所以，在大学数学教育中也将其作为高等数学或数学分析的同义语。

微积分的一些思想、概念，虽然萌芽于古代，但作为一门学科，却是以牛顿和莱布尼兹的工作为标志——产生于17世纪后期。

16世纪欧洲资本主义生产方式已经逐渐确立，生产力发展很快，实际的需要使得对运动的研究成为各门自然科学的重要课题。正如恩格斯所指出，整个自然界，由其最小质点到最大物体，都是处在永恒的产生与消灭过程中，处在毫不间断的流动中，处在始终不停的运动和变化中。每一门自然学科所研究的，归根结底总是运动的某一方面或另一方面，运动的某一种形式或另一种形式。事物的运动和变化以及它们之间的依赖关系表现在数量方面便产生了变量和函数这些现代数学中极为重要的概念。而有了这些概念，也就为应用数学方法表示自然规律提供了可能。17世纪，以牛顿和莱布尼兹为代表的科学家正是应用数学方法表达事物运动规律，并在对其研究的基础上建立了微积分理论。实际上，新的微积分引入了与先前的工作根本不同的概念和方法。这使得微积分的基础一度显得不清楚甚至混乱。就这样，微积分在混乱状态之中结束了17世纪。

18世纪，数学家们用他们的智慧，施展高超的技巧，在研究和解决物理学、天体力学等众多学科问题中，发掘并增进了微积分的威力，从而产生了一些重要的分支——无穷级数、微分方程和变分法等。虽然微积分的基础仍不清楚，但高等数学研究的步伐并未停滞不前。可以说，18世纪的数学工作，更直接地受到物理、天文及工程学问题的激励，使得人们认识到数学是一个不可或缺的工具。这时候，物理学愈来愈数学化，从而形成了新的学科——数学物理。

为了对微积分进行更有效的研究，19世纪初叶，以柯西为代表的数学家们引入并完善了古代已经萌芽的极限思想。19世纪末，康托的集合理论又进一步完善了微积分的基础。此前，微积分还运用着不明确的概念求解问题，此后，微积分学科给人一种清晰明了的感觉。现代的极限思想、作为变量看待的无穷小思想、实数理论都是微积分确立、巩固和发展壮大的功臣。也就是说经过整整两个世纪的酝酿、讨论，微积分的理论才定型精确化，成为今天的形式。

可见，微积分就是应用极限的思想方法研究变量的一门数学学科，是应用极限理论建

立函数的导数和积分概念，进而研究函数的导数和积分的求法、性质及应用的数学学科。它的主要内容就是微分学和积分学。微分学和积分学是既有本质区别、又有紧密联系的两个部分体系，是对立统一这一哲学思想在数学上的体现。

凡学习和研究数学的人，都会领略其高度的抽象性、逻辑的严密性和应用的广泛性。正如马克思所说“一门科学，只有当它成功地运用数学之时，才能达到真正完善的地步。”所以，数学是工具，它普遍应用于所有学科领域；数学是文化，它对人类的精神文明和物质文明的各个方面都有着决定性影响。

学一些具体的数学知识，不仅为学习各门学科提供了数学工具，而且通过这些知识解剖了数学中的一个“麻雀”，这是完全必要的。

第一章 函数、极限与连续

微积分研究的对象是函数，所使用的基本研究方法是极限方法，所涉及的主要函数是连续函数.因此，本章将对函数知识作必要的复习与补充，然后着重讨论函数的极限与连续性.

§ 1.1　实数与数集

数是数学中最基本的概念之一，是构成数学这门学科的基本材料和出发点.实数是微积分的基本材料，是微积分中的数量，实数的连续性反映了可以无限精确化的度量过程.

一、实数及其性质

人类的祖先最早认识的数是自然数，此后伴随着人类文明的发展，数的范围不断扩展.当人们认识到有理数时，由于有理数具有稠密性，古希腊人曾设想它是同一条直线上的点相对应的.但是这种关于数的连续性的设想，不久却被希腊人自己证明是完全错误的.大约公元前五百年左右，古希腊的毕达哥拉斯学派发现了一个惊人的事实：用现在的语言讲，就是当正方形的边长为 1 时，其对角线的长竟然不是一个“数”（即$\sqrt{2}$不是有理数）.这一事实在人们只认识有理数的当时，那就是一件天大的事情，尤其是它与毕达哥拉斯学派“万物皆为数”的哲理大相径庭，因此它的发现引起了这个学派的恐慌与恼怒，传说发现这一事实的希泼索斯竟然遭到沉舟身死的惩罚.但希泼索斯的发现第一次向人们揭示了有理数系的缺陷，即它不具有连续性.同时也使人们认识了这样的“无理的数”，还使得人们对于“数形结合”的愿望推迟了一千多年，直到实数系的构造成功.

简单地说，实数就是有理数和无理数的总称.

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{正　数}\begin{cases}\text{正整数（自然数）}\\ \text{正分数}\end{cases}\\ \text{零}\\ \text{负　数}\begin{cases}\text{负分数}\\ \text{负整数}\end{cases}\end{cases}\text{（有限小数和无限循环小数）}\\ \text{无理数}\begin{cases}\text{代数数（如}\sqrt{2},\sqrt[3]{5}\text{等）}\\ \text{超越数（如 }\pi,e\text{ 等）}\end{cases}\text{（正的和负的无限不循环小数）}\end{cases}$$

通过现代集合论的创始者康托尔等人的努力，人们认识到对实数进行任意分割不会

产生新数，说明实数本质上不同于有理数，它具有一种“完备”的性质，称之为实数的连续性. 因此，全体实数称为实数集.

我们知道，利用数轴可以建立直线上的点同实数之间的一一对应关系. 这一关系的建立，就将直线的连续性与实数的连续性统一起来. 可见，实数集等价于整个数轴上点的集合.

二、数集与区间

以数为元素的集合称为数集，数集中含有有限个元素，则称为有限数集；若含有无限个元素，则称为无限数集. 常见的数集有：自然数集（记为 $\mathbf{N}$），整数集（记为 $\mathbf{Z}$），有理数集（记为 $\mathbf{Q}$），实数集（记为 $\mathbf{R}$）. 它们之间的关系：

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}.$$

任何一个实数集都对应数轴上的一部分连续点集，这样的点集数学中称为区间. 区间是微积分中最常用的数集，一般分为有限区间和无限区间两类.

有限区间：若 a,b 为两个实数，且 $a<b$，则数集 $\{x|a<x<b\}=(a,b)$ 称为开区间；$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}=[a,b]$ 称为闭区间；$\{x|a<x\leqslant b\}=(a,b]$ 和 $\{x|a\leqslant x<b\}=[a,b)$ 称为半开半闭区间.

无限区间：引入记号 $+\infty$ 和 $-\infty$，则有 $\{x|x>a\}=(a,+\infty)$，$\{x|x\leqslant b\}=(-\infty,b]$ 等称为无限区间. 而全体实数集 $\mathbf{R}$ 也可以表示为无限区间 $(-\infty,+\infty)$.

提示

如果不需要特别指明区间是否包含端点，是有限还是无限，通常将其用英文字母“I”表示.

*三、邻域

在微积分中经常用到一种特殊的区间：以数 a（或数轴上点 a）为中心，以可以任意小的正数 δ 为半径形成的特殊开区间 $(a-\delta,a+\delta)$，即 $\{x|a-\delta<x<a+\delta\}$，称为点 a 的 δ 邻域，记为

$$U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}.$$

这里，点 a 叫做该邻域的中心，δ 叫做该邻域的半径.

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 等同于 $|x-a|<\delta$，所以 $U(a,\delta)=\{x||x-a|<\delta\}$. 而当 $0<|x-a|<\delta$ 时，即 $\{x|0<|x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的去心 δ 邻域．记作

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}.$$

特别地，当不需要特殊指明邻域的半径时，点 a 的邻域可表示为 $U(a)$. 表示以 a 为中心的任何一个很小的开区间.

§1.2 函　数

自然界中的各种事物，不仅在运动、变化和发展，而且它们的运动变化是有一定规律

的，它们之间是相互依赖、相互制约的.同样，数量也具有一定变化规律，也存在着相互联系、相互依赖的关系，这种关系就是产生数学中函数概念的实际背景.

一般公认最早给出函数定义的是德国数学家莱布尼兹，他在1673年的一篇手稿中，把任何一个随着曲线上的点变动而变动的几何量称为函数；并且强调这些几何量是由一个方程式给出的.他用"函数"表示依赖于一个变量的量.

一、函数的概念与特性

◆ 1.函数的概念

函数是微积分中极为重要的概念，微积分就是研究函数的数学分支.为了熟悉和加深对这一概念的理解，举例如下：民用电售价为0.48元/千瓦·时，某用户应付的电费y元与用电量x千瓦·时这两个变量之间相互联系的关系可以由式子$y=0.48x$给定，当x在区间$[0,+\infty)$内任意取定一个数值时，按上式，y就有确定的数值与之对应.一物体从高处自由下落，经过t秒后下落的距离为S，据伽利略公式，t与S之间有关系$S=\frac{1}{2}gt^2$，这样就可以计算出落体在已知时间内下落的距离.这些事例中，量与量之间的对应关系正是函数概念的实质.

定义 设x和y是两个变量，D是一个给定的非空实数集，如果存在确定的对应法则f，使得每个数$x\in D$，都有确定的实数y在f作用下与之对应，则变量y称为变量x的函数，记作$y=f(x)$.其中，x称为自变量，y称为因变量，数集D称为函数的定义域，记作$D(f)$或D.当x取数值$x_0\in D$时，与x_0对应的y的数值，称为函数在点x_0处的函数值，记作$f(x_0)$或$y|_{x=x_0}$.当x取遍D的各个数值时，对应的函数值全体组成的数集$W=\{y|y=f(x),x\in D\}$称为函数的值域，函数的定义域和值域也可用区间表示.

对于函数定义，注意下面几点：

(1)在函数定义中，如果对于每一个$x\in D$，都有唯一的y与它对应，那么这种函数称为单值函数，否则称为多值函数.例如，由方程$x^2+y^2=1$所确定的函数就是多值函数.但多值函数又可分解为几个单值函数讨论，本教材如不作特别说明，所确定的函数都是指单值函数.

(2)构成函数的关键在于变量与变量的对应法则，或对应关系，没有了对应关系，也就不存在函数.所以有时函数也可直接表示为$f(x)$；另外，函数$y=f(x)$中表示对应关系的符号f也可改用其他字母，例如：$y=\varphi(x)$，$y=F(x)$，$y=G(x)$等也都表示函数.

(3)在定义域的不同范围内用不同的解析式表示的函数称为分段函数.例如函数

$$y=\begin{cases}x & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1+x & x>1.\end{cases}$$

当x取区间$[0,1]$内的数值时，用解析式$y=x$来计算对应的函数值；而x当取区间$(1,+\infty)$内的数值时，用$y=1+x$来计算对应的函数值.总之，对于区间$[0,+\infty)$内的每一个值x，y都有唯一确定的值与之对应，所以y是定义在$[0,+\infty)$内的一个函数(图1-1).其中，$x=1$称为函数的分段点.

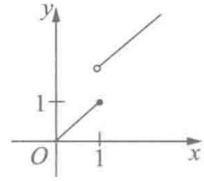


图1-1

例 1　已知函数 $f(x)=\begin{cases} x+2 & -2\leqslant x<0, \\ x^2 & 0\leqslant x<1, \\ 1 & x\geqslant 1. \end{cases}$

(1)求 $f(x)$ 的定义域，并找出其分段点；

(2)求 $f(-1)$，$f(0)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f(1)$，$f(2)$；

(3)作出 $f(x)$ 的图形.

解　(1)函数 $f(x)$ 的定义域是 $[-2,+\infty)$，分段点是 $x=0$ 和 $x=1$.

(2)因为 $-1\in[-2,0)$，所以函数值 $f(-1)$ 由式子 $f(x)=x+2$ 来确定，于是得

$$f(-1)=-1+2=1;$$

因为 $0\in[0,1)$，所以函数值 $f(0)$ 由式子 $f(x)=x^2$ 来确定，于是得

$$f(0)=0.$$

同理：

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4},f(1)=1,f(2)=1.$$

(3)函数 $f(x)$ 的图形见图 1-2.

符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1 & x>0, \\ 0 & x=0, \\ -1 & x<0 \end{cases}$ 是数学中常用到的一个分段函数，其图形见图 1-3.

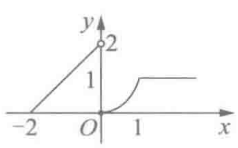


图 1-2

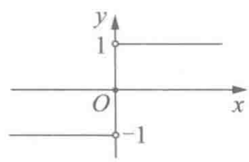


图 1-3

注意

分段函数是用几个式子合起来表示一个函数，而不是表示几个函数，在实际应用中常常用到这种表示形式.

◆ 2. 函数的几种特性

(1)函数的有界性.

定义　设函数 $f(x)$ 定义于 D 上，如果存在正数 M，使得对于一切 $x\in D$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界，或称 $f(x)$ 在 D 上是有界函数；如果不存在这样的正数 M，则称函数 $f(x)$ 在 D 上无界，或称 $f(x)$ 在 D 上是无界函数.

例如　函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，因为取 $M=1$，无论 x 取何值，总有 $|\sin x|\leqslant 1$ 成立.

又如函数 $f(x)=\frac{1}{x}$，它在区间 $(0,+\infty)$ 内无界，但在区间 $[a,+\infty)$ $(a>0)$ 内是有界的.

由此可见，函数的有界性不但与函数本身有关，还要取决于自变量的取值范围.

(2)函数的单调性.

定义 设函数 $f(x)$ 定义于 D 上，如果对于任意 $x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2$，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 D 上是单调增加(图 1-4)；如果恒有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 D 上是单调减少(图 1-5).

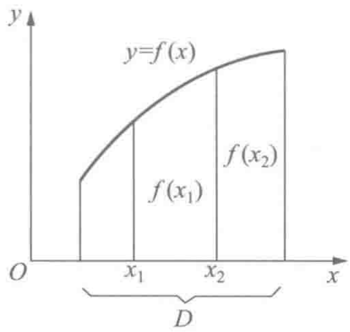


图 1-4

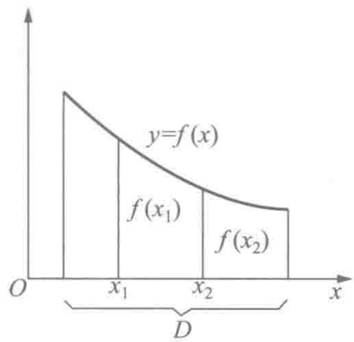


图 1-5

使函数 $f(x)$ 保持单调增加(减少)的区间称为 $f(x)$ 的单调增加(减少)区间. 单调增加(减少)的函数称为单调增加(减少)函数.

例如 函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 内是单调减少的，在区间 $[0, +\infty)$ 内是单调增加的.

(3)函数的奇偶性.

定义 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$，则必有 $-x\in D$)，如果对于任意 $x\in D$，$f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；如果恒有 $f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为偶函数. 既不是奇函数，也不是偶函数的函数称为非奇非偶函数.

奇函数的图形关于原点对称(图 1-6)；偶函数的图形关于 y 轴对称(图 1-7).

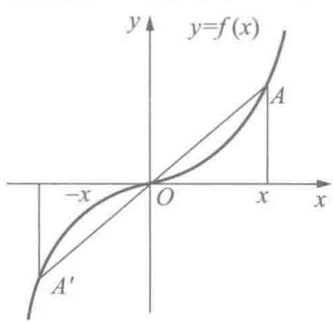


图 1-6

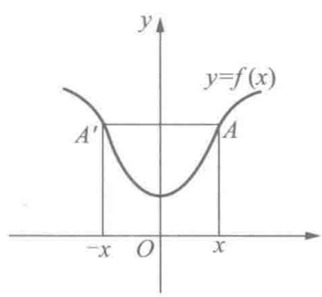


图 1-7

例如 $y=x, y=\sin x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内为奇函数，$y=x^2, y=\cos x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内为偶函数，而 $y=\sin x+\cos x$ 为非奇非偶函数.

(4)函数的周期性.

定义 设 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个非零常数 T，使得对于任意 $x\in D$，有 $x+T\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的一个周期，显然 $2T, 3T$ 等也是 $f(x)$ 的周期，这就是说 $f(x)$ 的周期有无穷多个. 通常，我们说周期函数的周期是指最小正周期(如果存在的话).

周期函数的图像呈周期性重复，只要知道它在任一周期上的图像，就可以得到函数的全部图像(图 1-8).

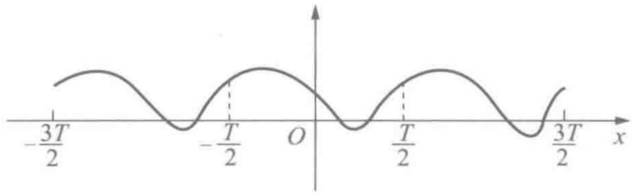


图 1-8

(5)极值.

定义 设函数 $f(x)$在 x_0 附近，即某邻域内有定义，且对此邻域内任一点 $x(x\neq x_0)$，均有 $f(x)<f(x_0)$，则称 $f(x_0)$是函数 $f(x)$的一个极大值，称 x_0 为 $f(x)$的极大值点；同样，如果对此邻域内任一点 $x(x\neq x_0)$均有 $f(x)>f(x_0)$，则称 $f(x_0)$是函数 $f(x)$的一个极小值，称 x_0 为 $f(x)$的极小值点. 函数的极大值与极小值统称为函数的极值；极大值点与极小值点统称为极值点.

◆ 3. 反函数

函数关系中的两个变量(自变量和因变量)，其地位是不同的. 但在实际问题中，两个变量中哪个看作自变量，哪个看作因变量，不是绝对的，这就引出反函数的概念.

定义 设函数 $y=f(x)$定义于 D 上，值域为 W，若对于任一 $y\in W$，都只有一个确定的 $x\in D$ 与之对应，且满足 $y=f(x)$，则这样确定的以 y 为自变量，以 x 为因变量的函数 $x=\varphi(y)$，或 $x=f^{-1}(y)$称为函数 $y=f(x)$的反函数，而把函数 $y=f(x)$称为原函数.

事实上，原函数 $y=f(x)$与其反函数 $x=\varphi(y)=f^{-1}(y)$在坐标平面内的图形是同一条曲线. 但为了研究方便，对于反函数 $x=f^{-1}(y)$，习惯上仍选用 x 作为自变量，y 作为因变量，写成 $y=f^{-1}(x)$. 这样，在同一坐标平面内，函数 $y=f(x)$与其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形就关于直线 $y=x$ 是对称的(图 1-9).

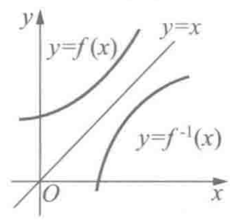


图 1-9

可以看出，定义在实数集 D 上的单值单调函数必有反函数.

二、初等函数

◆ 1. 基本初等函数

通常将下列五类函数统称为基本初等函数：

幂函数：$y=x^{\mu}$(μ 是常数)；

指数函数：$y=a^x$(a 是常数，$a>0$ 且 $a\neq 1$)；

对数函数：$y=\log_a x$(a 是常数，$a>0$ 且 $a\neq 1$)；

三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，
$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\text{arccot}\, x$.

这些函数在中学数学课中已比较详细地讲过，这里不重复了. 读者可对这五类函数的定义域、值域、图形、特性等重新复习，尤其是三角函数之间的一些公式要特别注意，以便

为学习微积分打好基础.

定义 基本初等函数或由基本初等函数及常数经四则运算而得到的函数,称作简单函数.

◆ 2. 复合函数

在同一变化过程中,两个变量间的依赖关系有时不是直接的,而是通过另一变量联系起来的.例如,物体的动能 k 是速度 v 的函数,即 $k=\frac{1}{2}mv^2$(m 为物体的质量),以初速度 v_0 向上抛一物体,速度 v 又是时间 t 的函数,即 $v=v_0-gt$(g 为重力加速度),这样通过速度 v 作为媒介,动能 k 就成了时间 t 的函数,即 $k=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2$,数学上称函数 $k=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2$ 是由函数 $k=\frac{1}{2}mv^2$ 和 $v=v_0-gt$ 复合而成的复合函数.

定义 设函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$,且 $u=\varphi(x)$ 的值域或部分值域包含在 $f(u)$ 的定义域中,则通过 u,y 与 x 建立了对应关系,记为 $y=f[\varphi(x)]$,称此函数是由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数,其中 u 称为中间变量.

例如 设 $y=\sqrt{u}$,$u=x^2+1$,由于 $u=x^2+1$ 的值域$[1,+\infty)$全部包含在 $y=\sqrt{u}$ 的定义域$[0,+\infty)$内,所以可得复合函数 $y=\sqrt{x^2+1}$,其定义域是$(-\infty,+\infty)$,这也是 $u=x^2+1$ 的定义域.

再例如 设 $y=\arcsin u$,$u=2x+1$,由于 $u=2x+1$ 的值域$(-\infty,+\infty)$不完全在 $y=\arcsin u$ 的定义域$[-1,1]$中,所以这两个函数复合成的复合函数 $y=\arcsin(2x+1)$ 应限制 $u=2x+1$ 的定义域,使其值域不超过$[-1,1]$.例如,可使 $u=2x+1$ 的定义域为$[-1,0]$.

又例如 设 $y=\lg u$,$u=-x^2$,由于 $u=-x^2$ 的值域$(-\infty,0]$与 $y=\lg u$ 的定义域$(0,+\infty)$交集为空集,此时,对于区间$(-\infty,0]$内的任意 u 值,按照对应法则 $y=\lg u$,变量 y 都没有对应的值,所以它们不能构成复合函数.

提示

如上所述,并不是任意两个函数都能构成复合函数.另外,构成复合函数的函数也可以多于两个.例如,函数 $y=u^2$,$u=\sin v$,$v=\cos x$ 复合以后就构成复合函数 $y=[\sin(\cos x)]^2$.这时 u 和 v 都是中间变量.

例 2 设 $f(x)=x^2$,$\varphi(x)=e^x$,求由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合成的复合函数.

解 由 $f(x)=x^2$ 得 $f(u)=u^2$,故所求复合函数为

$$y=f[\varphi(x)]=[\varphi(x)]^2=(e^x)^2=e^{2x}.$$

例 3 将下列函数拆成简单函数的复合形式:

(1)$y=3\sin^2(1+x)$;　　(2)$y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$.

解 (1)令 $u=\sin(1+x)$,那么 $y=3u^2$,再令 $v=1+x$,那么 $u=\sin v$.所以 $y=3\sin^2(1+x)$ 是由 $y=3u^2$,$u=\sin v$,$v=1+x$ 复合而成的.

(2)同理可得:$y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$ 是由 $y=\sqrt{u}$,$u=\ln v$,$v=\sqrt{x}$ 复合而成的.

例 4　求复合函数 $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{3}$ 的定义域.

解　此函数由 $y=\arcsin u$ 和 $u=\dfrac{2x-1}{3}$ 复合而成，故要求 $|u|\leqslant 1$，即 $\left|\dfrac{2x-1}{3}\right|\leqslant 1$，因此有 $-1\leqslant x\leqslant 2$，于是得出 $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{3}$ 的定义域为 $[-1,2]$.

提示

一般函数求定义域，主要考虑四个方面：(1)分式函数的分母不等于零；(2)偶次根式函数的被开方式大于等于零；(3)对数函数的真数式大于零；(4)反正弦与反余弦函数的自变量式绝对值小于或等于 1.

◆ 3. 初等函数

定义　由基本初等函数和常数经过有限次四则运算或有限次的复合步骤所构成的，且用一个数学式子表示的函数称为初等函数. 例如，$y=\cos x^2$，$y=\ln(1+\sqrt{1+x^2})$，$y=e^{e^x}$ 等都是初等函数. 初等函数以外的函数称为非初等函数.

常见的初等函数有如下四类：

(1)整式函数：又称多项式函数，即形如 $y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$，其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 是不同时为零的常数.

(2)分式函数：又称有理函数，即形如 $y=\dfrac{p(x)}{q(x)}$，其中 $p(x),q(x)$ 是两个多项式函数.

(3)无理函数：即含有根式的函数，如 $y=\sqrt{x^2+1}$，$y=1+\sqrt{x+2}$ 等.

(4)超越函数：即指三角函数、反三角函数、指数函数和对数函数构成的函数.

◆ 4. 双曲函数

在工程技术中经常遇到的双曲函数也是初等函数，它们的定义如下：

(1)双曲正弦函数：$\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，$x\in(-\infty,+\infty)$；

(2)双曲余弦函数：$\operatorname{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，$x\in(-\infty,+\infty)$；

(3)双曲正切函数：$\operatorname{th}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$，$x\in(-\infty,+\infty)$；

(4)双曲余切函数：$\operatorname{cth}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$，$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

四种双曲函数的图形分别如图 1-10、图 1-11 和图 1-12 所示.

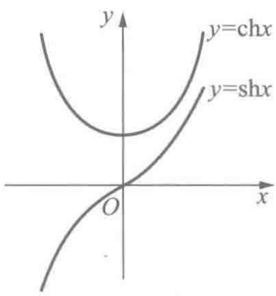


图 1-10

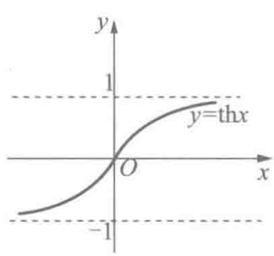


图 1-11

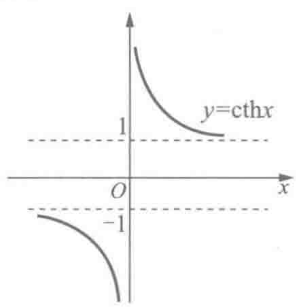


图 1-12