A计划丛书

与人教版最新教材同步

高二数学

徐鸿迟 / 主编

南京师范大学出版社

A计划丛书

高二数学

徐鸿迟／主编

南京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

A计划丛书．高二数学 / 徐鸿迟主编．—南京：南京师范大学出版社，2002.4

ISBN 7－81047－689－0 /G·403

Ⅰ. A…　Ⅱ. 徐　…　Ⅲ. 数学课－高中－教学参考资料　Ⅳ. G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2002）第015014号

书　名	A计划丛书．高二数学
主　编	徐鸿迟
责任编辑	万　斌
出版发行	南京师范大学出版社
地　址	江苏省南京市宁海路122号(邮编:210097)
电　话	(025)3598077(传真)　3598412(发行部)　3598297(邮购部)
E－mail	nnuniprs@public1.ptt.js.cn
照　排	江苏兰斯印务发展有限公司
印　刷	丹阳练湖印刷厂
开　本	880×1230　1/32
印　张	9.75
字　数	240千
版　次	2002年5月第1版　2002年5月第1次印刷
印　数	1－15000册
书　号	ISBN7－81047－689－0 /G·403
定　价	11.00元

出版说明

长期以来，中学教育的目标往往局限于追求考试分数，学生的学习目的也局限于考出一个好成绩．久而久之，教师、学生和家长都陷入到“应试教育”的怪圈之中，教师为考试而教，学生为考试而学，学校教育的真谛渐渐地被人们遗忘了．这种状况与新世纪对人才的要求是不相适应的．新世纪要求学校教育培养学生的“自主性”和“创造性”，提高学生的综合能力和素质．这些要求不是仅仅通过做一些练习题就可以达到的，而需要在教与学的过程中真正贯彻素质教育的思想．为了适应新世纪对人才综合素质的要求，我们采用全新的视角，策划了这套《A计划丛书》．

这套丛书的核心思想是“自主学习”，让学生在学习的过程中学会学习，最后成为学习的主人．为了体现这一核心思想，本套书围绕以下几个方面构思全书内容：

1．以“二自”（自助学习、自主学习）为支点．“自助学习”是为学生创设学习情境的一个重要支点，为此，本书首先提供了一套经过优化组合的学习套餐，包括知识要点、思考方法、疑难分析、巩固练习等，学生都可以根据自己的需要自我提取，自我消化．这种开放式的学习套餐也是学生进行自主探索和自主学习的基础．“自主学习”则是提升学生主体意识、提高学习效益的另一个重要支点．本书通过灵活多样的题目，为学生创造一种“自主学习”的氛围，使学生逐渐成为学习的主人，实现从“自助学习”向“自主学习”的跨越．

2．以“三重”（重学习过程、重学习方法、重综合素质）为特色．本书设计了立体化的教学目标，包括知识与技能、能力与方法、情感与态度，让学生在学习过程中得到提高．本书还从两个层面为学生提供了多元化的学法指导，使得不同的知识内容和学习阶段有不同的方法，不同层次的学生也有不同的学习方法．为了培养学生的综合素质，本书除了注

意学科内的综合之外，还注意跨学科的综合，其中的综合例题是分阶段的学科内综合，研究课题则是针对新教材中的实践性课题实施指导，在此基础上延伸拓展，并进一步提供新的课题和研究方法.

3. 以“四得”为目标. 通过使用本书，广大中学生朋友可以获得掌握基础知识的能力，获得运用书本知识分析问题和解决问题的能力，获得吸取书本外知识的能力，获得创新与自我提高的能力.

从“学会学习”到“自主学习”，是新世纪教育改革与发展的潮流. 但愿我们这套丛书能够帮助广大中学生在自主学习中走向成功.

前言

做什么事情,都得有个计划.

学习数学,也是如此.

这本书告诉你一个学好高二数学的计划,我们叫她“A计划”.

“A计划”从自主学习的角度,为你

——设定学习目标:明确各个阶段的知识目标、技能目标、情感目标.

——介绍学习方法:针对具体的学习内容和学习进程,提出建议、指点迷津.

——解析疑难问题:碰到障碍、遇见困难怎么办?以后碰到类似的或不同的问题又该怎么办?本书在为你提供范例范解的同时,提供了更多的发散思维空间.

——检查学习效果:分节检测学、用知识的能力,特别注重创新能力;分章阶段总结,构筑“冲A”阶梯.

——加强综合渗透:以学科内综合为基础,与相关学科的知识同步交叉渗透,与社会生活、生产实际紧密结合,发现真正有趣的数学与有用的数学.

《A计划——高二数学》与人教社最新试验修订本同步.你既可从中享用形式新颖、内容丰富的学习套餐,又能体会到从自助学习向自主学习跨越的愉悦.

学习是快乐的.

快乐体现在学习的过程中.

只有做学习的主人,学习才会是快乐的.

让你快快乐乐地学好数学,是我们最大的愿望.

本书主编:徐鸿迟.

参加编写的作者为:潘小明(第六章)、吴凤(第七章)、徐鸿迟(第八章)、丁尔苍(第九章)、邓友祥(第十章).

编　者

目 录

第六章　不等式

§6.1　不等式的性质

目标设定

1. 理解不等式的性质.
2. 熟悉性质定理的证明.
3. 通过定理的学习和性质的运用,培养逻辑推理论证的能力.

学法索引

本节内容是不等式这一章内容的基础,包括五个性质定理及三个推论,它们是解不等式和证明不等式的主要依据,对它们的正确理解具有十分重要的意义.那么,如何才能对不等式的性质理解得深、理解得透呢？我们可以联系这些性质的条件、结论和功能,对知识结构作出梳理.

总体上,我们可以把不等式的性质分为三类.

第一类性质包括性质1:$a>b\Leftrightarrow b<a$ 和性质2:$a>b,b>c\Rightarrow a>c$.其中性质1又称为不等关系的自反性或对称性,它表明有关"$>$"的不等式性质与有关"$<$"的不等式性质可以互相等价转化;性质2常称为不等关系的传递性,它揭示了两个实数 a 和 c 可以间接比较大小,也是对不等关系作出适当放缩的依据.

第二类性质包含如下四个具体的不等式性质:$a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$;当 $c>0$ 时,$a>b\Leftrightarrow ac>bc$;当 $c<0$ 时,$a>b\Leftrightarrow ac<bc$;当 $a>0$,$b>0$时,$a>b\Leftrightarrow a^n>b^n$($n\in\mathbf{N}$,且 $n>1$).这里的四个不等式性质是在求解不等式与证明不等式过程中进行等价变换的依据.

余下的归为第三类性质,在这些性质中结果与条件一般不等价,要

引起注意.另外必须牢牢记住:两个不等式同向可以相加,两个不等式同向且两边均为正才可以相乘.

例题解析

例 1 下列命题是否正确,若正确说明理由,若错误举出一个反例.

(1)若 $a>b$,则 $ac^2>bc^2$.

(2)若 $\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}$,则 $a>b$.

(3)若 $a>b$,$ab\neq0$,则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

(4)若 $a>b$,$c>d$,则 $ac>bd$.

解析 解决这类问题,主要是根据不等式的性质来判定,其实质就是看是否满足不等式的性质和性质成立需要的条件.据此可得答案.

(1)错误.反例:令 $c=0$.

(2)正确.$\because c^2\neq0$ 且 $c^2>0$,在不等式 $\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}$ 两边同乘以 c^2,不等式方向不变,$\therefore a>b$.

(3)错误.反例:令 $a=2,b=-1$.事实上,$a>b\Leftrightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 成立的条件是 $ab>0$.

(4)错误.反例:$a=c=-1,b=d=-2$.

例 2 若 $a<b<0$,则下列不等式不能成立的是( ).

(A)$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　(B)$\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$

(C)$|a|>|b|$　　(D)$a^2>b^2$

解析 由 $a<b<0$ 可知 $(-a)>(-b)>0$,

$\therefore\frac{1}{-a}<\frac{1}{-b}$,故(A)成立.

$\because(-a)^2>(-b)^2$,故(D)成立.

又 $\because a^2=|a|^2,b^2=|b|^2$,$\therefore|a|^2>|b|^2$.

又 $\because|a|,|b|>0$,$\therefore|a|>|b|$,即(C)成立.

(B)是不成立的.反例:$a=-2,b=-1$.

∴本题正确答案应选(B).

例 3 若 $-1<a<b<0$，试比较 $\frac{1}{a},\frac{1}{b},a^2,b^2$ 的大小关系.

解析 条件 $-1<a<b<0$ 可以转化为 $1>-a>-b>0$，据此可得 $(-a)^2>(-b)^2$.

$\therefore a^2>b^2,\frac{1}{-a}<\frac{1}{-b}$.

$\therefore \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

又 $b^2>0,\frac{1}{a}<0,\therefore b^2>\frac{1}{a}$.

$\therefore a^2>b^2>\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

例 4 设 $60<a<84,28<b<33$，求 $a+b,a-b$ 及 $\frac{a}{b}$ 的范围.

解析 借助第二类不等式性质将有关不等式进行等价变换.

由 $60<a<84,28<b<33$ 可得 $88<a+b<117$.

又 $\because -33<-b<-28,\therefore 27<a-b<56$.

$\because \frac{1}{33}<\frac{1}{b}<\frac{1}{28},\therefore \frac{60}{33}<\frac{a}{b}<\frac{84}{28}$，即 $\frac{20}{11}<\frac{a}{b}<3$.

例 5 已知 $f(x)=ax^2-c$，且 $-4\leqslant f(1)\leqslant -1,-1\leqslant f(2)\leqslant 5$，求 $f(3)$ 的取值范围.

解析 $\because \begin{cases} a-c=f(1), \\ 4a-c=f(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{3}[f(2)-f(1)], \\ -c=\frac{4}{3}f(1)-\frac{1}{3}f(2). \end{cases}$

20

$\therefore f(3)=9a-c=\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)$.

$\because -1\leqslant f(2)\leqslant 5,\therefore -\frac{8}{3}\leqslant \frac{8}{3}f(2)\leqslant \frac{40}{3}$.

$\because -4\leqslant f(1)\leqslant -1,\therefore \frac{5}{3}\leqslant -\frac{5}{3}f(1)\leqslant \frac{20}{3}$.

$\therefore -1\leqslant \frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)\leqslant 20$.（当 $a=0,c=1$ 时，$\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)=-1$；当 $a=3,c=7$ 时，$\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)=20$.）

即 $f(3)_{\max}=20, f(3)_{\min}=-1$.

评注 解此类问题常常易犯如下错误:由题设可得 $-4\leqslant a-c\leqslant -1, -1\leqslant 4a-c\leqslant 5$,用加减消元法可得 $0\leqslant a\leqslant 3, 1\leqslant c\leqslant 7$,于是有 $-7\leqslant f(3)=9a-c\leqslant 26$, $\therefore f(3)_{\max}=26, f(3)_{\min}=-7$.在这里错误产生的原因是 $\begin{cases}-4\leqslant a-c\leqslant -1,\\ -1\leqslant 4a-c\leqslant 5\end{cases}$ 与 $\begin{cases}0\leqslant a\leqslant 3,\\ 1\leqslant c\leqslant 7\end{cases}$ 并非等价.

应用创新

1. 已知 $a>b>c$,则(D).

(A) $ac>bc$ (B) $|ab|>|bc|$

(C) $ab>ac$ (D)以上都不对

2. 已知 a,b,c 都是实数,给出下列命题:① $ac^2>bc^2\Leftrightarrow a>b$;② $a>\frac{1}{4}\Leftrightarrow\sqrt{a}<2a$;③ $a<b<0\Rightarrow 0<\frac{b}{a}<1$;④ $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}\Rightarrow ab(a-b)>0$.其中正确命题的个数是( ).

(A)1 (B)2 (C)3 (D)4

3. 若 a,b 是任意实数,且 $a>b$,则(D).

(A) $a^2>b^2$ (B) $\frac{b}{a}<1$

(C) $\lg(a-b)>0$ (D) $(\frac{1}{2})^a<(\frac{1}{2})^b$

4. 若 $a,b,c\in\mathbf{R}$,且 $a>b$,则下列不等式一定成立的是(C).

(A) $a+c\geqslant b-c$ (B) $ac\geqslant bc$

(C) $(a-b)c^2\geqslant 0$ (D) $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

5. 如果 $a>b, c>d$,则下列不等式一定成立的是(A).

(A) $a>b-c+d$ (B) $b>c+d-a$

(C) $c>d+a-b$ (D) $d>a+b-c$

6. 已知 $a<0, -1<b<0$,则( ).

(A) $a>ab>ab^2$ (B) $ab^2>ab>a$

(C) $ab>a>ab^2$ (D) $ab>ab^2>a$

7. 已知 $0<a<1$,则下列不等式一定成立的是( ).

(A)$(1-a)^{\frac{1}{3}}>(1-a)^{\frac{1}{2}}$ (B)$\log_{(1-a)}(1+a)>0$

(C)$(1-a)^{3}>(1+a)^{2}$ (D)$(1-a)^{1+a}>1$

8．若 $ac>bd$，且 $a>b>0$，则（ ）．

(A)$c>d$ (B)$c>d>0$

(C)$c<d$ (D)c,d 的大小不能确定

9．已知 $a,b\in\mathbf{R}$，那么 $a>1$ 且 $b>1$ 是 $a+b>2$ 且 $ab>1$ 成立的（ ）．

(A)充分非必要条件 (B)必要非充分条件

(C)充要条件 (D)既非充分又非必要条件

10．设实数 a,b 满足 $0>a>-b$，则①$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，②$a^2>b^2$，③$\frac{1}{a}>-\frac{1}{b}$，④$|a|>|b|$：这四个不等式中，正确不等式的个数是（ ）．

(A)2 (B)0 (C)1 (D)$\geqslant 3$

11．判断下列命题是否正确并说明理由．

(1)若 $a>b,c>d$，则 $a-c>b-d$． （ ）

(2)若 $ac>bc$，则 $a>b$． （ ）

(3)若 $a<b<0$，则 $\frac{a}{b}<1$． （ ）

(4)若 $a<b<0$，则 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$． （ ）

12．设 $a>0,b>0,n\in\mathbf{N}_+$ 且 $n\neq1$，试比较 a^n+b^n 与 $a^{n-1}b+ab^{n-1}$ 的大小． $a^n+b^n-a^{n-1}b-ab^{n-1}=a^{n-1}(a-b)+b^{n-1}(b-a)$

13．若 $1<a<2$，试比较 $\log_a x$ 与 $2\log_{2a}x$ 的大小，并说明理由． $=(a^{n-1}-b^{n-1})(a-b)$

14．若 $ab>0,cd>0$，试比较 $(ab+cd)\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)$ 与 $(a+c)^2$ 的大小． $a>b>0$ $a<b$

15．若二次函数 $y=f(x)$ 的图像过原点，且 $1\leqslant f(-2)\leqslant2$，$3\leqslant f(1)\leqslant4$，求 $f(2)$ 的范围．

16．已知 $1\leqslant\lg\frac{x}{y}\leqslant2$，$2\leqslant\lg\frac{x^2}{\sqrt{y}}\leqslant3$，求 $\lg\frac{x^3}{\sqrt[3]{y}}$ 的取值范围．

17．方程 $ax^2-4ax+1=0$ 的两个正数解 α,β 满足不等式 $-1\leqslant$

$\lg\alpha-\lg\beta\leqslant 1$,求实数 a 的范围.

§6.2 算术平均数与几何平均数

目标设定

1. 能利用不等式的性质推导出平均值不等式的两个重要定理:

(1)$a,b\in\mathbf{R}\Rightarrow a^2+b^2\geqslant 2ab$(当且仅当 $a=b$ 时取"="号).

(2)$a,b\in\mathbf{R}^+\Rightarrow\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$(当且仅当 $a=b$ 时取"="号).

2. 能了解平均值不等式的几何模型的构造及相应的几何解释.

3. 能熟练运用平均值不等式定理及其推论证明不等式、求解有关函数的最值.

4. 能利用平均值不等式定理及推论解决一些应用型的数学问题,从中进一步培养观察能力以及分析问题与解决问题的能力.

学法索引

1. 平均值不等式定理揭示了若干个正数的算术平均数与几何平均数之间的大小关系.从形式结构上看,它可以把"和"的形式缩小成"积"的形式,或可以把"积"的形式放大成"和"的形式.正因为如此,平均值不等式定理体现了一定的缩放功能,在有关不等式的证明及有关最值问题的求解中大有用武之地.

2. 在学习过程中要注意定理的运用范围及证明步骤.要学会运用有关技巧,创造平均值不等式能够使用的条件及能够取得等号的条件.

3. 平均值不等式定理不仅可以用于证明有关的不等式,而且还可以用于求解两类最值问题.

(1)已知正数 x,y 且 $x+y=S$,$xy=P$,则①如果 P 是定值,那么当且仅当 $x=y$ 时,S 的值最小;②如果 S 是定值,那么当且仅当 $x=y$ 时,P 的值最大.

(2)用以上两个结论求解函数的最值时,应当注意三个要素:①各变量均为正数;②和(积)为定值;③具有等号成立的条件,即"一正二定

三相等”.以上三条,缺一不可,否则会出现错误的结论.

4. 解题时不仅要记住平均值不等式定理原来的形式,而且要掌握它的变形形式、逆用形式和推广形式.

推广形式是指:

(1)若 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,则 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$(当且仅当 $a=b=c$ 时取“=”号).

(2)若 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,则 $a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$(当且仅当 $a=b=c$ 时取“=”号).

(3)若 $a_i\in\mathbf{R}^+$ $(i=1,2,\cdots,n)$,则 $a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$(当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取“=”号).

例题解析

例1 若 $a>0,b>0$,试比较 $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$,$\dfrac{a+b}{2}$,$\sqrt{ab}$,$\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$ 的大小.

解析 利用平均值不等式定理,

$\because a>0,b>0,\therefore \dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$(当且仅当 $a=b$ 时取“=”号).

又 $\because \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}-\dfrac{a+b}{2}=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+(a^2+b^2)}{4}}-\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+2ab}{4}}-\dfrac{a+b}{2}=\sqrt{\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2}-\dfrac{a+b}{2}=0$(当且仅当 $a=b$ 时取“=”号),

$\therefore\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\dfrac{a+b}{2}$(当且仅当 $a=b$ 时取“=”号).

$\because a>0,b>0,\therefore a+b\geqslant 2\sqrt{ab}>0$.

$\therefore 0<\dfrac{1}{a+b}\leqslant\dfrac{1}{2\sqrt{ab}}$(当且仅当 $a=b$ 时取“=”号).

$\therefore \dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}=\dfrac{2ab}{a+b}\leqslant\dfrac{2ab}{2\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}$(当且仅当 $a=b$ 时取“=”号).

综上可知：$\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$（当且仅当 $a=b$ 时取“=”号）.

例2 求证：$a^4+b^4+c^4\geqslant abc(a+b+c)$.

解析 可多次运用基本不等式来证明.

$\because a^4+b^4\geqslant 2a^2b^2, b^4+c^4\geqslant 2b^2c^2, c^4+a^4\geqslant 2a^2c^2$,

$\therefore a^4+b^4+c^4\geqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$.

而 $a^2b^2+b^2c^2\geqslant 2ab^2c, b^2c^2+c^2a^2\geqslant 2abc^2, c^2a^2+a^2b^2\geqslant 2a^2bc$,

$\therefore a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqslant ab^2c+abc^2+a^2bc=abc(a+b+c)$.

$\therefore a^4+b^4+c^4\geqslant abc(a+b+c)$.

例3 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，且 $a+b+c=1$，

求证：$(\dfrac{1}{a}-1)(\dfrac{1}{b}-1)(\dfrac{1}{c}-1)\geqslant 8$.

解析 不等式右边数字为8，可使我们联想到这个8是左边因式分别使用基本不等式所得的三个“2”连乘得来的. 另一方面，待证式左边的1应与条件中的“1”发生一定的联系.

$\because a,b,c\in\mathbf{R}^+, a+b+c=1$,

$\therefore \dfrac{1}{a}-1=\dfrac{1-a}{a}=\dfrac{(a+b+c)-a}{a}=\dfrac{b+c}{a}\geqslant\dfrac{2\sqrt{bc}}{a}>0$.

同理：$\dfrac{1}{b}-1\geqslant\dfrac{2\sqrt{ac}}{b}>0, \dfrac{1}{c}-1\geqslant\dfrac{2\sqrt{ab}}{c}>0$.

$\therefore(\dfrac{1}{a}-1)(\dfrac{1}{b}-1)(\dfrac{1}{c}-1)\geqslant\dfrac{2\sqrt{bc}}{a}\cdot\dfrac{2\sqrt{ac}}{b}\cdot\dfrac{2\sqrt{ab}}{c}=8$.

例4 求函数 $y=x+\dfrac{1}{x+1}(x\geqslant 0)$ 的最小值，并求相应的 x 值.

解析 本题属于求两项和的最小值问题，但由于 $x,\dfrac{1}{x+1}$ 不都是正数且其积也不是常数，所以不能直接使用前面的平均值不等式定理，应当把原函数作适当的变形：$y=(x+1)+\dfrac{1}{x+1}-1$. 此时前面两项满足平均值不等式定理的条件，但在求出与最值相对应的 x 值的时候，还应充分考虑原函数的定义域.

$\because x \geqslant 0, \therefore x+1>0, \frac{1}{x+1}>0.$

$\therefore y=x+\frac{1}{x+1}=(x+1)+\frac{1}{x+1}-1 \geqslant 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}}-1=1,$

当且仅当 $x+1=\frac{1}{x+1}$，即 $x=0$ 时，$y=x+\frac{1}{x+1}(x \geqslant 0)$ 取得最小值，最小值为 1.

例 5 设 $0<x<\frac{5}{2}$，求 x 为何值时，函数 $y=x(5-2x)^2$ 有最大值？最大值是多少？

解析 本题解题的关键在于通过转化使各因子满足平均值不等式定理的条件.

a+b+c/3 ≥ ∛abc

$\because 0<x<\frac{5}{2}, \therefore 4x>0, 5-2x>0.$

$\therefore y=x(5-2x)^2=\frac{1}{4}\cdot 4x(5-2x)\cdot(5-2x) \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{4x+5-2x+5-2x}{3}\right)^3=\frac{250}{27}$（当且仅当 $4x=5-2x$，即 $x=\frac{5}{6}$ 时上述"="号成立).

例 6 甲、乙两地相距 s km，汽车从甲地匀速行驶到乙地，速度不超过 c km/h，汽车每小时的运输成本（以元为单位）由可变部分和固定部分组成：可变部分与速度 v km/h 的平方成正比，比例系数为 b；固定部分为 a 元.

(1)把全程运输成本 y（元）表示成速度 v km/h 的函数，并指出这个函数的定义域.

(2)为了使全程运输成本最小，汽车应以多大的速度行驶？

解析 (1)由题意知，汽车每小时的运输成本由可变部分和固定部分组成. 设汽车每小时的运输成本为 P，则 $P=bv^2+a$，其中 a, b 为正常数. 由于汽车运输成本随着时间 t 的增加而增加，而全程运输成本 = 每小时运输成本 × 全程运输时间，汽车匀速行驶，则有 $t=\frac{s}{v}$，因此建立如下数学模型：

$$y=(bv^2+a)t=(bv^2+a)\cdot\frac{s}{v}=s\left(bv+\frac{a}{v}\right).$$