高等学校“十二五”规划教材

LISAN SHUXUE
XITI JIEXI YU SHIYAN ZHIDAO

离散数学
习题解析与实验指导

主　编　吴　杰
副主编　谷淑化　薛思清　蔡之华

中国地质大学出版社
ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE

高等学校“十二五”规划教材

离散数学
习题解析与实验指导

LISAN SHUXUE XITI JIEXI YU SHIYAN ZHIDAO

主　编　吴　杰

副主编　谷淑化　薛思清　蔡之华

中国地质大学出版社
ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE

内容简介

本书是中国地质大学(武汉)"十一五"规划教材《离散数学》(蔡之华,薛思清,吴杰,2008)的配套参考书,也是中国地质大学(武汉)"十二五"规划教材。全书分为两大部分,第1部分为习题解答,对《离散数学》教材中主要章节的习题给出了解答,并对其中的重点章节补充了新的习题;第2部分为课程实验,旨在帮助学生培养对离散数学课程的兴趣和动手能力。

本书既可以作为《离散数学》的教学参考书,也可以为其他学习离散数学的读者提供有益的帮助。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学习题解析与实验指导/吴杰主编. —武汉:中国地质大学出版社,2015.11

ISBN 978-7-5625-3762-5

Ⅰ.①离…

Ⅱ.①吴…

Ⅲ.①离散数学-高等学校-教学参考资料

Ⅳ.①O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 276998 号

离散数学习题解析与实验指导

吴　杰　主编

谷淑化　薛思清　蔡之华　副主编

责任编辑:舒立霞　　选题策划:张　琰　　责任校对:代　莹

出版发行:中国地质大学出版社(武汉市洪山区鲁磨路 388 号)　　邮政编码:430074

电　话:(027)67883511　　传真:67883580　　E-mail:cbb@cug.edu.cn

经　销:全国新华书店　　http://www.cugp.cug.edu.cn

开本:787 毫米×1092 毫米 1/16　　字数:320 千字　　印张:12.5

版次:2015 年 11 月第 1 版　　印次:2015 年 11 月第 1 次印刷

印刷:武汉市籍缘印刷厂　　印数:1—1000 册

ISBN 978-7-5625-3762-5　　定价:25.00 元

前言

离散数学是现代数学的一个重要分支，是计算机及其相关专业的重要基础课程。学习离散数学的关键是准确掌握其基本概念，运用其基本原理及基本运算。学好离散数学对于计算机相关的其他专业课程的学习将起着事半功倍的作用。

本书是中国地质大学（武汉）“十一五”规划教材《离散数学》（蔡之华，薛思清，吴杰，2008）的配套参考书，也是中国地质大学（武汉）“十二五”规划教材。全书分为两大部分，第1部分为习题解答，第2部分为课程实验。习题解答部分共分11章，前10章与《离散数学》教材的教学内容相对应，按章对相关知识点进行了全面的总结，对解题方法进行了系统的分析和阐述，不仅对教材中主要章节的习题给出了解答，还对其中的重点章节补充了新的习题，各章都按照内容回顾、习题解答、小测验进行组织。第11章给出了5套综合性的模拟试题，用于读者自我检测学习效果。第12章是课程实验部分，按照数理逻辑、集合论、代数结构、图论4个方面设计实验内容，这些实验都给出了必要的基础和实验指导，其目的是检验和巩固离散数学中的基本知识，加深对定义、定理、算法的理解，锻炼和培养实际操作技能和解决实际问题的能力，熟悉解决实际问题的过程，并有效地克服离散数学枯燥难懂的缺点。

本书既可以作为《离散数学》的教学参考书，也可以为其他学习离散数学的读者提供有益的帮助。

本书的撰写任务由中国地质大学（武汉）计算机学院离散数学课程组承担。在编写过程中，编者参考了国内外部分离散数学教材和习题集以及相关资料，从中获益良多，在此一并向有关作者致谢。

由于编者水平有限，书中错误疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2015年6月

目录

第1部分　习题解答

第2部分　课程实验

第1部分 习题解答

第1章 命题逻辑

1.1 内容回顾

1.1.1 命题与联结词

定义1.1 能够分辨真假的陈述句叫作**命题**。

定义1.2 真值确定的原子命题称为**命题常元**,真值不确定的原子命题称为**命题变元**。

最重要最常用的命题联结词有五个:否定词“$\neg$”、合取词“$\wedge$”、析取词“$\vee$”、蕴含词“$\rightarrow$”、等价词“$\leftrightarrow$”。

1.1.2 命题公式

定义1.3 命题公式归纳定义如下:

(1)命题变元是命题公式;

(2)如果α是命题公式,则$\neg\alpha$也是命题公式;

(3)如果α和β是命题公式,则$\alpha\wedge\beta$,$\alpha\vee\beta$,$\alpha\rightarrow\beta$,$\alpha\leftrightarrow\beta$均是命题公式;

(4)只有有限次地利用(1)~(3)形成的符号串才是命题公式。

由定义可看出,命题公式归根结底是由命题变元和命题联结词组成的公式,其基本元素是命题变元和联结词。

设n元公式α中所含有的不同命题元为$P_1,P_2,\cdots,P_n$,我们把这些命题元组成的变元组$(P_1,P_2,\cdots,P_n)$称为α的变元组,α的变元组$(P_1,P_2,\cdots,P_n)$的任意一组确定的值都称为该公式α关于该变元组$(P_1,P_2,\cdots,P_n)$的**完全指派**。如果仅对变元组中部分变元赋以确定的值,其余变元没有赋以确定的值,则这样的一组值称为该公式α关于该变元组$(P_1,P_2,\cdots,P_n)$的**部分指派**。

定义1.4 对于任一公式α,凡使得α为真的指派,不管是完全指派还是部分指派,都称为α的**成真指派**,凡使得α为假的指派,也不管是完全指派还是部分指派,都称为α的**成假指派**。

定义1.5 对于命题公式中命题变元的每一种可能的完全指派,以及由它们确定出的公式真值所列成的表,称为该命题公式的**真值表**。

定义1.6 设α为命题公式,β为α中的一个连续的符号串,且β为命题公式,则称β为α的**子公式**。

定义1.7 设α为任一命题公式。

(1)若公式α的所有完全指派均是成真指派,则公式α称为**重言式**或**永真式**;

(2)若公式α的所有完全指派均是成假指派,则公式α称为**矛盾式**或**永假式**;

(3)若公式 α 中有成真指派，则公式 α 称为**可满足式**。

1.1.3 等值演算

定义 1.8 设 α,β 是两个命题公式，若 α,β 构成的等价式 $\alpha\leftrightarrow\beta$ 为重言式，则称公式 α 与 β 是等值的，记作 $\alpha\Leftrightarrow\beta$。

下面是 16 组重要的等值式(在后面的推理演算中以大写字母 E 加以引用)，这些等值式也称作**命题定律**。在下面公式中出现的 α,β,γ 均为任意的命题公式。

(1)双重否定律

$$\alpha\Leftrightarrow\neg(\neg\alpha)$$

(2)等幂律

$$\alpha\Leftrightarrow\alpha\vee\alpha,\ \alpha\Leftrightarrow\alpha\wedge\alpha$$

(3)交换律

$$\alpha\vee\beta\Leftrightarrow\beta\vee\alpha,\ \alpha\wedge\beta\Leftrightarrow\beta\wedge\alpha$$

(4)结合律

$$(\alpha\vee\beta)\vee\gamma\Leftrightarrow\alpha\vee(\beta\vee\gamma),(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma\Leftrightarrow\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$$

(5)分配律

$$\alpha\vee(\beta\wedge\gamma)\Leftrightarrow(\alpha\vee\beta)\wedge(\alpha\vee\gamma)\quad(\vee\text{ 对 }\wedge\text{ 的分配律})$$

$$\alpha\wedge(\beta\vee\gamma)\Leftrightarrow(\alpha\wedge\beta)\vee(\alpha\wedge\gamma)\quad(\wedge\text{ 对 }\vee\text{ 的分配律})$$

(6)德摩根律

$$\neg(\alpha\vee\beta)\Leftrightarrow\neg\alpha\wedge\neg\beta,\ \neg(\alpha\wedge\beta)\Leftrightarrow\neg\alpha\vee\neg\beta$$

(7)吸收律

$$\alpha\vee(\alpha\wedge\beta)\Leftrightarrow\alpha,\ \alpha\wedge(\alpha\vee\beta)\Leftrightarrow\alpha$$

(8)零一律

$$\alpha\vee 1\Leftrightarrow 1,\ \alpha\wedge 0\Leftrightarrow 0$$

(9)同一律

$$\alpha\vee 0\Leftrightarrow\alpha,\ \alpha\wedge 1\Leftrightarrow\alpha$$

(10)排中律

$$\alpha\vee\neg\alpha\Leftrightarrow 1$$

(11)矛盾律

$$\alpha\wedge\neg\alpha\Leftrightarrow 0$$

(12)蕴含等值式

$$\alpha\rightarrow\beta\Leftrightarrow\neg\alpha\vee\beta$$

(13)假言易位

$$\alpha\rightarrow\beta\Leftrightarrow\neg\beta\rightarrow\neg\alpha$$

(14)等价等值式

$$\alpha\leftrightarrow\beta\Leftrightarrow(\alpha\rightarrow\beta)\wedge(\beta\rightarrow\alpha),\ \alpha\leftrightarrow\beta\Leftrightarrow(\alpha\wedge\beta)\vee(\neg\alpha\wedge\neg\beta)$$

(15)等价否定等值式

$$\alpha\leftrightarrow\beta\Leftrightarrow\neg\alpha\leftrightarrow\neg\beta$$

(16)归谬论

$(\alpha\to\beta)\wedge(\alpha\to\neg\beta)\Leftrightarrow\neg\alpha$

定义 1.9 设 α 是一个命题公式，$P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是其中出现的所有命题变元。

(1)用某些公式代换 α 中的某些命题变元；

(2)若用公式 A 代换 $P_i(i=1,2,\cdots,n)$，则必须用 A 代换 α 中所有的 P_i。

那么，由此而得到的新公式 β 叫作公式 α 的一个**代换实例**。

定理 1.1(代入定理) 对于重言式中的任一命题变元出现的每一处均用同一命题公式代入，得到的仍是重言式。

定理 1.2(置换定理) 设 A 是公式 α 的一个子公式且 $A\Leftrightarrow B$。如果将公式 α 中的子公式 A 置换成公式 B 之后，得到的公式是 β，则 $\alpha\Leftrightarrow\beta$。

定义 1.10 如果命题公式 α 中只出现命题变元，命题常元，命题联结词 $\neg$、$\wedge$ 和 $\vee$，则称 α 为**限制性命题公式**。

定义 1.11 在限制性公式 α 中，将联结词 $\wedge$ 换成 $\vee$，将 $\vee$ 换成 $\wedge$，将 0 换成 1，将 1 换成 0，所得到的公式称为 α 的**对偶式**，记为 α^*。

显然，α 和 α^* 互为对偶式。

定理 1.3 设 α 和 α^* 是互为对偶的两个公式，$P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是其命题变元，则：

$$\neg\alpha(P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_n)\Leftrightarrow\alpha^*(\neg P_1,\ \neg P_2,\ \cdots,\ \neg P_n)$$

定理 1.4(对偶定理) 设 $\alpha(P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_n)$ 和 $\beta(P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_n)$ 是两个公式，若 $\alpha\Leftrightarrow\beta$，则 $\alpha^*\Leftrightarrow\beta^*$。

1.1.4 范式

原子命题“P”及其否定“$\neg P$”统称**文字**。

文字或者一些文字的合取称为**质合取式**。

文字或者一些文字的析取称为**质析取式**(或称**子句**)。

P 与 $\neg P$ 称为**互补对**。

定理 1.5 (1)质合取式为矛盾式的充要条件：它包含有一个互补对；

(2)质析取式为重言式的充要条件：它包含有一个互补对。

定义 1.12 若干个质合取式的析取式称为**析取范式**。亦即该公式具有形式 $\alpha_1\vee\alpha_2\vee\cdots\vee\alpha_n$，其中 $\alpha_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 为质合取式。

定义 1.13 若干个质析取式的合取式称为**合取范式**。亦即该公式具有形式 $\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\cdots\wedge\alpha_n$，其中 $\alpha_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 为质析取式。

定理 1.6(范式存在定理) 任一命题公式都存在着与之等值的析取范式和合取范式。

定理 1.7 (1)公式 α 为重言式的充要条件：α 的合取范式中每一质析取式至少包含一个互补对；

(2)公式 α 为矛盾式的充要条件：α 的析取范式中每一质合取式至少包含一个互补对。

定义 1.14 在含 n 个命题变元的质合取式(质析取式)中，若每个命题变元与其否定不同时存在，而二者之一必出现且仅出现一次，且第 i 个命题变元或其否定出现在从左算起的第 i 位上(若命题变元无下标，则按字典顺序排序)，这样的质合取式(质析取式)称为**极小项(极大项)**。

定理 1.8 设 m_i 和 M_i 是命题变元 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 形成的极小项和极大项，则：

$\neg m_i \Leftrightarrow M_i, \neg M_i \Leftrightarrow m_i$

定义 1.15 设命题公式 α 中含 n 个命题变元,如果 α 的析取范式(合取范式)中的质合取式(质析取式)都是极小项(极大项),则称该析取范式(合取范式)为 α 的**主析取范式(主合取范式)**。

定理 1.9 任何一个不为矛盾式(重言式)的命题公式都存在着与之等值的主析取范式(主合取范式),并且是唯一的。

1.1.5 联结词的完备集

定义 1.16 称 $F:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 为 n 元**真值函数**。

定义 1.17 设 S 是一个联结词集合,如果任何 $n(n\geqslant 1)$ 元真值函数都可以由仅含 S 中的联结词构成的公式表示,则称 S 是**联结词完备集**。

定理 1.10 $S=\{\neg,\wedge,\vee\}$ 是联结词完备集。

推论 1.1 以下联结词集都是完备集:

(1) $S_1=\{\neg,\wedge,\vee,\to\}$;

(2) $S_2=\{\neg,\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow\}$;

(3) $S_3=\{\neg,\wedge\}$;

(4) $S_4=\{\neg,\vee\}$;

(5) $S_5=\{\neg,\to\}$。

定义 1.18 设 P,Q 为两个命题,复合命题"P 与 Q 的否定式"("P 或 Q 的否定式")称为 P,Q 的与非式(或非式),记作 $P\uparrow Q(P\downarrow Q)$。符号 $\uparrow(\downarrow)$ 称作**与非联结词(或非联结词)**。

定理 1.11 $\{\uparrow\},\{\downarrow\}$ 都是联结词完备集。

1.1.6 命题逻辑的推理演算

定义 1.19 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$ 都是命题公式。若 $(\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\cdots\wedge\alpha_n)\to\beta$ 是重言式,则称由前提 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 推出 β 的推理是**有效**的或**正确**的,并称 β 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的**有效结论**或**逻辑结果**,记为 $\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\cdots\wedge\alpha_n\Rightarrow\beta$ 或 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\Rightarrow\beta$,记号 $\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\cdots\wedge\alpha_n\Rightarrow\beta$ 也称为**重言蕴含**或**推理形式**。

推理过程中常用的几条推理规则如下。

1. 前提引入规则(P)

在推理过程中,可以随时引入已知的前提。

2. 结论引用规则(T)

在推理过程中,前面已推出的有效结论都可作为后续推理的前提引用。

3. 置换规则(R)

在推理过程中,命题公式中的子公式都可以用与之等值的命题公式置换,得到证明的公式序列的另一公式。

4. 代入规则(S)

在推理过程中,重言式中的任一命题变元都可以用一命题公式代入,得到的仍是重言式。

定理 1.12 设 α,β 是两个命题公式，$\alpha \Leftrightarrow \beta$ 当且仅当 $\alpha \Rightarrow \beta$ 且 $\beta \Rightarrow \alpha$。

定理 1.13 设 α,β,γ 是命题公式，若 $\alpha \Rightarrow \beta$ 且 $\beta \Rightarrow \gamma$，则 $\alpha \Rightarrow \gamma$。

定理 1.14 设 α,β 是命题公式，则 $\alpha \Rightarrow \beta$ 的充要条件是 $\alpha \wedge \neg\beta$ 是矛盾式。

下面列出一些常用的推理定律(在后面的推理演算中以大写字母 I 加以引用)。

(1)化简律

$$\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha,\ \alpha \wedge \beta \Rightarrow \beta$$

(2)附加律

$$\alpha \Rightarrow \alpha \vee \beta,\ \beta \Rightarrow \alpha \vee \beta$$

(3)假言推理(又称分离规则)

$$\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta) \Rightarrow \beta$$

(4)假言三段论

$$(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma) \Rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$$

(5)等价三段论

$$(\alpha \leftrightarrow \beta) \wedge (\beta \leftrightarrow \gamma) \Rightarrow (\alpha \leftrightarrow \gamma)$$

(6)析取三段论

$$(\alpha \vee \beta) \wedge \neg\beta \Rightarrow \alpha$$

(7)拒取式

$$\neg\beta \wedge (\alpha \rightarrow \beta) \Rightarrow \neg\alpha$$

(8)二难推理

$$(\alpha \rightarrow \gamma) \wedge (\beta \rightarrow \gamma) \wedge (\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma$$

(9)$\alpha,\ \beta \Rightarrow \alpha \wedge \beta$

(10)$\neg\alpha \Rightarrow \alpha \rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \alpha \rightarrow \beta$

(11)$\neg(\alpha \rightarrow \beta) \Rightarrow \alpha, \neg(\alpha \rightarrow \beta) \Rightarrow \neg\beta$

(12)$(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha) \Rightarrow (\alpha \leftrightarrow \beta)$

(13)$\alpha \rightarrow \beta \Rightarrow (\alpha \vee \gamma) \rightarrow (\beta \vee \gamma), \alpha \rightarrow \beta \Rightarrow (\alpha \wedge \gamma) \rightarrow (\beta \wedge \gamma)$

(14)$\alpha \leftrightarrow \beta \Rightarrow \alpha \rightarrow \beta, \alpha \leftrightarrow \beta \Rightarrow \beta \rightarrow \alpha$

在命题逻辑中，常用的推理方法有三种：真值表法、直接证法和间接证法。

1. 真值表法

设 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是出现于前提 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和结论 β 中的全部命题变元，对 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的所有情况作完全指派，这样能对应地确定 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和 β 的所有真值，列出这个真值表，即可判断如下推理形式是否成立：

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_m \Rightarrow \beta \text{ 或 } \alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m \Rightarrow \beta$$

若从真值表上找出 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 均为 1 的行，β 对应的行也为 1，则上式成立。或者，若 β 为 0 的行，对应的行中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 至少有一个 0，则上式也成立。

2. 直接证法

直接证法就是由一组前提，利用前面的四条推理规则，根据已知的命题等值公式(命题定律的 16 组公式)和推理定律，推演而得到有效的结论。

3. 间接证法

间接证法主要有两种：一种就是我们经常用的反证法；另外一种称之为CP规则。

1)反证法

要证明推理形式 $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_m \Rightarrow \beta$ 成立（记作 $\alpha \Rightarrow \beta$），根据定理1.14可知，只需证明 $\alpha \wedge \neg\beta$ 是矛盾式。因此，只需把 $\neg\beta$ 作为附加前提加入推理过程中，推出矛盾即可。

2)CP规则

欲证 $\alpha \Rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$，即证 $\alpha \Rightarrow (\neg\beta \vee \gamma)$，亦即 $\alpha \rightarrow (\neg\beta \vee \gamma)$ 永真。因为 $\alpha \rightarrow (\neg\beta \vee \gamma) \Leftrightarrow \neg\alpha \vee (\neg\beta \vee \gamma) \Leftrightarrow \neg(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \Leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$，所以若将 β 作为附加前提，证明 $\alpha \wedge \beta \Rightarrow \gamma$ 成立，即得证 $\alpha \Rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ 成立。这一证明方法称为CP规则。

1.2 习题解答

1. 指出下列语句哪些是命题，哪些不是命题。如果是命题，请指出其真值。

(1)离散数学是计算机科学系的一门必修课。

(2)$\pi > 2$ 吗？

(3)明天我去看电影。

(4)请勿随地吐痰。

(5)不存在最大质数。

(6)如果我掌握了英语、法语，那么学习其他欧洲的语言就容易多了。

(7)$9+5<12$。

(8)$x<3$。

(9)月球上有水。

(10)我正在说假话。

解：

(1)是命题，真值为1。

(2)不是命题。

(3)是命题，真值视具体情况而定。

(4)不是命题。

(5)是命题，真值为1。

(6)是命题，真值为1。

(7)是命题，真值为0。

(8)不是命题。

(9)是命题，真值视具体情况而定。

(10)不是命题。

2. 判断下列语句是否是命题，若是命题则请将其形式化。

(1)$a+b$。

(2)$x>0$。

(3)“请进！”