



普通高等教育“十三五”规划教材

PUTONG GAODENG JIAOYU “13-5” GUIHUA JIAOCAI

传感器与测试技术

主 编 杨运强

副主编 王仪明 唐力伟 阎绍泽



冶金工业出版社
www.cnmp.com.cn



普通高等教育“十三五”规划教材

传感器与测试技术

主 编 杨运强

副主编 王仪明 唐力伟 阎绍泽

北 京

冶金工业出版社

2016

内 容 提 要

本书主要包括传感与测试技术基础、测试系统的基本特性、传感器技术、信号的变换与调理、信号分析基础和现代测试技术等。本书可根据不同专业的授课要求具体进行教学使用,注重实践,可增加传感器内容的讲授;注重理论,可将理论部分作为重点。

本书可作为高等院校非电类专业的专业基础课教学用书,也可供部分电类专业或相关专业的高校师生、专业技术人员等阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

传感器与测试技术/杨运强主编. —北京:冶金工业出版社,
2016. 1

普通高等教育“十三五”规划教材

ISBN 978-7-5024-7165-1

I. ①传… II. ①杨… III. ①传感器—测试技术—高等学校—教材 IV. ①TP212.06

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第010537号

出 版 人 谭学余

地 址 北京市东城区嵩祝院北巷39号 邮编 100009 电话 (010)64027926

网 址 [www. cn mip. com. cn](http://www.cn mip. com. cn) 电子信箱 [yjcbs@cnmip. com. cn](mailto:yjcbs@cnmip.com.cn)

责任编辑 徐银河 唐晶晶 美术编辑 彭子赫 版式设计 孙跃红

责任校对 郑 娟 责任印制 李玉山

ISBN 978-7-5024-7165-1

冶金工业出版社出版发行;各地新华书店经销;三河市双峰印刷装订有限公司印刷
2016年1月第1版,2016年1月第1次印刷

787mm×1092mm 1/16;14印张;338千字;214页

36.00元

冶金工业出版社 投稿电话 (010)64027932 投稿信箱 [tougao@cnmip. com. cn](mailto:tougao@cnmip.com.cn)

冶金工业出版社营销中心 电话 (010)64044283 传真 (010)64027893

冶金书店 地址 北京市东四西大街46号(100010) 电话 (010)65289081(兼传真)

冶金工业出版社天猫旗舰店 [yjgycbs. tmall. com](http://yjgycbs.tmall.com)

(本书如有印装质量问题,本社营销中心负责退换)

前 言

测试技术课程是一门理论和实用性都很强的课程,其中理论部分有一定的深度。本书编者从事多年的测试技术教学工作,涉及多个专业,学生既有大学本科生也包括硕士研究生。由于专业发展方向不同,多数学校将测试技术作为选修课程,课时少,学生相关基础不一,增大了这门课程的授课难度。基于不同专业授课综合考虑,编者精选和渐进式地安排本书内容,将其分为6章。

第1章传感与测试技术基础,介绍测试的基本概念、传感器技术基础、信号的分类与描述及误差分析与数据处理。

第2章测试系统的基本特性,介绍测试系统的基本组成、线性定常系统的主要性质、测试系统的静态特性、测试系统的动态特性描述、各种测试装置的动态特性、不失真测试及测试系统的辨识与标定。

第3章传感器技术,介绍应变式电阻传感器、变阻器式电阻传感器、电感式传感器、电容式传感器、霍尔传感器、压电式传感器、光电式传感器、热电式传感器、磁电式传感器、旋转变压器和感应同步器、位置编码式数字传感器、增量编码式数字传感器及传感器的选用原则。

第4章信号的变换与调理,介绍放大电路、信号的调制与解调及滤波电路。

第5章信号分析基础,介绍信号的特征值分析、信号的概率密度函数分析、信号的相关分析、信号的频域分析及信号数字化基础。

第6章现代测试技术,介绍测量仪器发展历程、虚拟仪器及网络测控技术——网络仪器。

不同专业授课时,可以根据实际教学需要进行选择,对于注重实践的专业,授课时可增加传感器内容,特别是新型传感器内容的学时。对于注重测试理论的专业,应将本书理论部分作为重点,有关传感器电路部分的内容本书并没有涉及,读者可以参阅相关专门书籍。

本书由中国地质大学(北京)杨运强教授主编,北京印刷学院王仪明教授、石家庄军械工程学院唐力伟教授、清华大学阎绍泽教授担任副主编,清华

大学吴嘉宁博士、天津大学李君兰博士、北京邮电大学刘春博士参加编写。

本书在编写过程中参考了许多资料，已作为本书参考文献列出，编者在此特别向这些文献的作者表示感谢。

由于编者的水平和经验所限，同时，传感器与测试技术发展很快，不断有新理论和新方法产生，书中欠妥之处敬请同行专家和广大读者批评指正。

作 者

2015 年 10 月

目 录

1 传感与测试技术基础	1
1.1 测试的基本概念	1
1.1.1 测量方法	2
1.1.2 测试技术基本任务	2
1.2 传感器技术基础	3
1.2.1 传感器的定义	3
1.2.2 传感器的分类	3
1.2.3 传感器技术的作用与地位	4
1.3 信号的分类与描述	4
1.3.1 信号的分类	4
1.3.2 信号的基本描述方法	5
1.3.3 周期信号的描述	5
1.3.4 非周期信号的描述	11
1.3.5 随机信号的描述	18
1.3.6 典型信号的频谱	19
1.4 误差分析与数据处理	24
1.4.1 误差基本概念与分类	24
1.4.2 测量数据中随机误差的处理	26
1.4.3 测量数据中粗大误差的判定和剔除	29
1.4.4 测量数据中系统误差的发现和修正	31
1.4.5 测量不确定度及其评定方法	32
1.4.6 实验数据的表示方法	36
习题	39
2 测试系统的基本特性	41
2.1 测试系统的基本组成	41
2.2 线性定常系统的主要性质	42
2.3 测试系统的静态特性	43
2.3.1 灵敏度	44
2.3.2 线性度	44
2.3.3 迟滞特性	45
2.3.4 重复性	45

2.3.5 测量范围和量程	46
2.4 测试系统的动态特性描述	46
2.4.1 传递函数——动态特性的复频域描述	46
2.4.2 频率响应函数——动态特性的频域描述	47
2.4.3 脉冲响应函数——动态特性的时域描述	47
2.5 各种测试装置的动态特性	48
2.5.1 一阶系统——惯性环节	48
2.5.2 二阶系统——振荡环节	52
2.5.3 高阶系统动态特性	57
2.6 不失真测试	58
2.6.1 不失真的含义及其实现条件	58
2.6.2 波形失真原因分析	59
2.6.3 一阶系统实现不失真测试的条件	60
2.6.4 二阶系统实现不失真测试的条件	60
2.7 测试系统的辨识与标定	61
2.7.1 系统的静态标定	61
2.7.2 单自由度系统的动态标定	62
2.7.3 多自由度系统	71
习题	72
3 传感器技术	74
3.1 应变式电阻传感器	74
3.1.1 应变式传感器工作原理	75
3.1.2 电桥	79
3.1.3 应力、应变的测量	86
3.2 变阻器式电阻传感器	94
3.2.1 变阻器式传感器工作原理	94
3.2.2 变阻器传感器的特点及应用	96
3.3 电感式传感器	97
3.3.1 自感式传感器	98
3.3.2 互感式传感器	103
3.3.3 电涡流式传感器	106
3.4 电容式传感器	108
3.4.1 电容式传感器工作原理	108
3.4.2 电容式传感器的特点及应用	113
3.5 霍尔传感器	114
3.5.1 霍尔效应	114
3.5.2 霍尔传感器的应用	115
3.6 压电式传感器	119

3.6.1 压电效应	119
3.6.2 压电传感器的等效电路	122
3.6.3 压电传感器的转换电路	122
3.6.4 压电式传感器的应用	123
3.7 光电式传感器	124
3.7.1 光电效应	125
3.7.2 光纤传感器	126
3.7.3 色标传感器	128
3.8 热电式传感器	129
3.8.1 热电偶	130
3.8.2 金属热电阻	134
3.8.3 热敏元件	136
3.8.4 集成温度传感器	138
3.9 磁电式传感器	140
3.9.1 工作原理	140
3.9.2 磁电式传感器的应用	145
3.10 旋转变压器和感应同步器	146
3.10.1 旋转变压器式互感式传感器	146
3.10.2 感应同步器式互感式传感器	147
3.11 位置编码式数字传感器	150
3.11.1 位置式编码器的编码方式	150
3.11.2 测量精度的提高	151
3.12 增量编码式数字传感器	152
3.12.1 基本原理及结构	152
3.12.2 方向辨别和计数	154
3.12.3 测量精度的提高	155
3.13 传感器的选用原则	158
习题	160
4 信号的变换与调理	165
4.1 放大电路	165
4.1.1 基本放大电路	165
4.1.2 测量放大电路	166
4.1.3 隔离放大电路	167
4.2 信号的调制与解调	168
4.2.1 幅值调制与解调	169
4.2.2 频率调制与解调	171
4.3 滤波电路	172
4.3.1 滤波器的种类	173

4.3.2 理想滤波器	173
4.3.3 实际滤波器	174
习题	176
5 信号分析基础	177
5.1 信号的特征值分析	177
5.2 信号的概率密度函数分析	179
5.2.1 概率密度函数	179
5.2.2 概率密度函数的应用	180
5.3 信号的相关分析	181
5.3.1 互相关函数	181
5.3.2 自相关函数	183
5.3.3 相关函数的应用	185
5.4 信号的频域分析	187
5.4.1 巴塞伐尔定理	187
5.4.2 功率谱分析	187
5.4.3 相干函数	189
5.4.4 倒谱分析	190
5.5 信号数字化基础	190
5.5.1 数字信号的预处理	190
5.5.2 截断、泄漏和加窗处理	191
5.5.3 栅栏效应	195
5.5.4 时域采样与采样定理	197
5.5.5 离散傅里叶变换 (DFT)	197
5.5.6 快速傅里叶变换 (FFT)	199
习题	199
6 现代测试技术	200
6.1 测量仪器发展历程	200
6.2 虚拟仪器	201
6.2.1 虚拟仪器概述	202
6.2.2 虚拟仪器语言——LabVIEW 简介	205
6.3 网络测控技术——网络仪器	209
6.3.1 基于集散控制系统的网络测控技术	209
6.3.2 基于现场总线控制系统的网络测控技术	209
6.3.3 基于工业以太网技术的网络测控技术	210
6.3.4 基于 Internet 的嵌入式系统远程测控技术	210
6.3.5 基于 Multi-Agent 的网络化智能测控	212
习题	213
参考文献	214

获取信息是人类最基本的活动之一。在工程实际中,无论是工程研究、产品开发,还是质量监控、性能试验等,都离不开测试技术,测试技术已渗透到人类活动的每个领域。

工程测试获得的信息总是通过某些物理量的形式表现出来,这些物理量就是信号。信号是信息的载体,信息则是信号所载的内容。信息与信号是互相联系的两个概念,但是信号不等于信息。任何研制过程,只能通过严格和标准的测试,才能为改进和进行优化过程提供各种数据,缩短研制周期、降低研制费用、提高技术指标。传感和测试技术还是实现过程自动控制的基础。新型装备都是在大量应用先进测试技术的基础上发展起来的。高新设备都离不开测试技术。

测试技术属于信息科学的范畴,与计算机技术、自动控制技术、通信技术构成完整的信息技术学科。现代信息技术的三大基础是信号采集、信息传输和信息处理技术,即传感技术、通信技术和计算机技术分别构成或比喻成信息技术的器官、神经和大脑。

1.1 测试的基本概念

测试 (Measurement and Test) 是测量与试验的概括,是人们借助于一定的装置,依靠一定的科学技术手段,定量地获取某种研究对象原始信息的过程,是指以确定被测对象属性量值为目的的全部操作。测试是具有试验性质的测量或者可以理解为测量和试验的综合。测试技术是测量技术和实验技术的总称。

测量是指以确定被测对象的量值为目的而进行的实验过程,是用专门的仪器和设备靠实验和计算方法求得被测量的数值。一个完整的测量过程必定涉及被测对象、计量单位、计量方法和测量误差,它们被称为测量的四要素。从本质上讲,测量过程一方面是采集和表达被测物理量,另一方面是与标准比较。在满足以下两个基本条件下才能实施测量:(1) 测量标准必须通过协议事先确定,精确已知;(2) 被测量必须有明确的定义,工作稳定,经得起检验。

测试技术内容包括四个方面:测量原理、测量方法、测量系统、数据处理。测试是按一定的目的和要求,获取感兴趣的、有限的某些特定信息,而不是全部信息,而且信息是以信号形式表现出来的。从广义的角度讲,测试工作涉及试验设计、模型试验、传感器、信号加工与处理(传输、加工和分析、处理),误差理论、控制工程、系统辨识和参数估计等内容。因此,测试工作者应具有这方面相关的知识。从狭义的角度讲,测试工作是指在选定的激励方式下所进行的信号检测、变换、处理、显示、记录及电量输出和数据处理。

1.1.1 测量方法

测量方法是测量原理和测量方式的组合。测量有三种不同的分类方式。

(1) 按照信号获取的手段, 测量方法可分为直接测量和间接测量。

1) 直接测量: 无需通过函数关系的计算, 直接通过测量仪器得到被测量。它又可分为直接比较和间接比较。直接比较是直接将被测量和标准量进行比较, 如长度测量、电桥测电阻等。间接比较是利用仪器仪表把原始形态的待测物理量的变化变换成为与之保持已知函数关系的另一种物理量的变化, 并以人的感官所能接受的形式, 在测量系统的输出端显示出来。如水银温度计测量温度、用弹簧测力、用直流电流表测电流等。

2) 间接测量: 是在直接测量的基础上, 根据已知的函数关系, 计算出所要测量的物理量的大小, 如速度测量。间接测量准确度往往不如直接测量高, 一般尽可能不采用间接测量。

(2) 按照测量精度, 测量方法可分为等精度测量和不等精度测量。

1) 等精度测量: 用相同仪表与测量方法对同一被测量进行多次重复测量。

2) 不等精度测量: 用不同精度的仪表或不同的测量方法, 或在环境条件相差很大时对同一被测量进行多次重复测量。

(3) 按照测量信号来源, 测量方法可分为偏差式测量、零位测量和微差法测量。

1) 偏差式测量: 用仪表指针位移 (即偏差) 确定被测量的测量方法。它是根据仪表指针的刻度的指示值来决定被测量的数值。偏差式测量具有简单、快捷、直观的特点, 但测量精度不高。

2) 零位测量: 将已知标准量直接与被测量相比较, 用零位指示仪表来检测测量系统的平衡状态, 测量系统达到平衡时, 被测量的数值可以直接由已知的标准量数值获得。零位测量在如下方面得到广泛应用: 天平、电位差计等。使用前必须进行指针零位校准。零位测量可以获得较高的测量精度; 但测量过程比较复杂、费时, 不适应于测量迅速变化的信号。

3) 微差法测量: 将被测量与已知标准量先进行比较并取得差值, 再用偏差法测得该差值 (微差)。被测量数值 = 已知标准量值 + 微差。微差法测量的特点是: 综合了偏差式测量和零位测量的优点, 测量精度高, 测量过程较零位测量简便, 费时少, 适应于在线控制参数的测量。微差法测量在自控系统应用较多。

1.1.2 测试技术基本任务

测试技术的基本任务包括:

(1) 分析被测信号类别、构成及特征参数, 使工程测试人员了解被测对象的特征参数, 以便深入了解被测对象内在的物理本质。为正确选用和设计测试系统提供依据。

(2) 为产品质量和性能提供客观评价、分析故障根源、监测设备运行、为新定律新理论提出和论证提供实验依据。

通过测试手段, 对研究对象中的有关信号做出比较客观、准确的描述, 使人们对其有一个恰当的全面的认识, 并达到进一步改造和控制研究对象的目的。

1.2 传感器技术基础

1.2.1 传感器的定义

传感器是能感受规定的被测量,并按照一定规律以一定精度将被测量转换为与之有确定关系的便于应用的某种物理量的测量器件或装置。虽然信息的获取有多种途径,我们所需要的最直接的信息却只有通过传感器才能获取。传感器是一切信息的来源,是测试系统的第一级。

国家标准 GB 7665—1987 对传感器下的定义是:能感受规定的被测量并按照一定的规律转换成可用信号的器件或装置,通常由敏感元件和转换元件组成。传感器是一种检测装置,能感受到被测量的信息,并能将检测感受到的信息,按一定规律变换成为电信号或其他所需形式的信息输出,以满足信息的传输、处理、存储、显示、记录和控制等要求。它是实现自动检测和自动控制的首要环节。

1.2.2 传感器的分类

传感器有不同的分类方法,下面简单介绍 6 种分类方法:

(1) 按传感器的工作原理可以分为机械式传感器、电阻式传感器、电感式传感器、电容式传感器、压电式传感器、磁电式传感器、光电式传感器、气电式传感器、热电式传感器、射线式传感器、波式传感器、半导体式传感器、其他原理传感器。

(2) 按传感器用途可以分为位移传感器、力传感器、温度传感器、加速度传感器、湿度传感器等。

(3) 按传感器的构成原理可以分为结构型传感器、物性型传感器和复合型传感器。结构型传感器是依靠传感器结构参量的变化来实现信号的转换。被测量的变化引起传感器元件几何尺寸或形状的变化,再把这些几何尺寸或形状的变化转换成电阻、电容、电感等量的变化,从而获得被测信号。例如:电容式传感器依靠的是极板间距离变化引起电容量变化;电感式传感器依靠的是衔铁位移引起自感或互感变化等。物性型传感器是依靠敏感元件材料本身物理性质的变化来实现信号变换的。例如:利用水银的热胀冷缩现象制成水银温度计来测温;利用石英晶体的压电效应制成压电测力计等。如敏感材料、智能材料、半导体材料、压电陶瓷、磁性材料、形状记忆合金、生物材料。物理效应有压电、压阻、热阻、光阻、湿阻、霍尔效应等。

(4) 按传感器的敏感元件与被测量之间的能量关系可以分为能量转换型传感器和能量控制型传感器。能量转换型传感器也称无源传感器。直接由被测对象输入能量使其工作。能量控制型传感器也称有源传感器。从外部供给辅助能量并由被测量控制外部供给能量的变化。

(5) 按传感器的工作机理可以分为物理型传感器、化学型传感器和生物型传感器。物理型传感器基于光、电、声、磁、热效应的物理效应。化学型传感器基于化学吸附、选择性化学反应的化学效应。生物型传感器基于酶、抗体、激素等分子识别功能和生物传感功能的生物效应。

(6) 按传感器的信号输出方式分为模拟式传感器和数字式传感器。模拟式传感器包括

电阻应变式传感器、电位器式传感器、电感式传感器、电容式传感器、压电式传感器、光电式传感器、霍尔式传感器、磁电式传感器等；数字式传感器包括编码器、栅式传感器、感应同步器和谐振式传感器。

1.2.3 传感器技术的作用与地位

传感器在很多行业都有着重要的应用，其重要性主要体现在如下几点：

- (1) 传感器技术能替代、补充、延伸人类感觉器官。
- (2) 传感器技术处于自动检测与控制技术之首，是感知、获取和检测信息之首。
- (3) 传感器技术也是各国相互竞争的核心技术之一。

1.3 信号的分类与描述

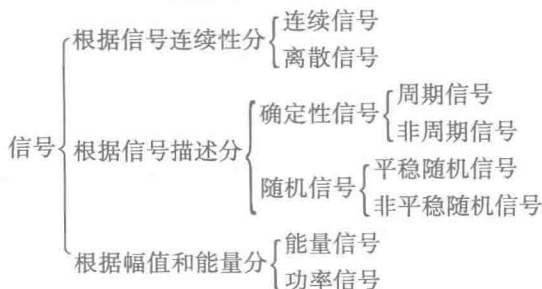
1.3.1 信号的分类

根据沿时间轴演变的特性，信号可以分为两大类：确定性信号和随机信号。

(1) 确定性信号是可以用确定性的图形、曲线或明确数学关系式来完整地描述或预测其随时间演变情形的信号（信号可表示为一个确定的时间函数，可以确定任何时刻的量值）。包括：周期信号、非周期信号。周期信号是满足下面关系式的信号： $x(t) = x(t + kT)$ 。式中， T 为周期。它是按一定时间间隔周而复始，重复出现，无始无终的信号。周期信号一般又分为简谐信号（有单一的频率，即正余弦信号）、多谐复合信号和伪随机信号。多谐复合信号是由多个乃至无穷多个频率成分叠加而成，由频率比为有理数的不同频率的正弦信号叠加而成，叠加后存在公共周期，周期的确定根据各频率值的最大公约数的倒数来确定。非周期信号是不具有周期重复性的确定信号。它包括准周期信号和瞬变非周期信号两类。准周期信号是由两种以上的周期信号组成的合成信号，与周期信号不同，其组成分量间无法找到公共周期（组成信号的正（余）弦信号的频率比不是有理数），因而无法按某一时间间隔周而复始重复出现。瞬变非周期信号是在一定时间区间存在，随着时间的增长而衰减至零的信号，即时间历程短的信号。

(2) 随机信号无法用数学关系式或图表描述其关系，具有不能被预测的特性，只能用概率统计的方法由过去估计未来的信号称为非确定性信号。虽然随机信号无法预测未来瞬时值，但它具有某些统计特征，可以通过统计观察来加以描述，能用概率统计方法由其过去估计其未来。它包括平稳随机信号和非平稳随机信号。

总结起来，根据观察信号的不同角度，信号可分为：



以上只是对这些信号进行简单介绍,更多了解需要读者在今后的测试工作中去深刻体会。

1.3.2 信号的基本描述方法

1.3.2.1 时域分析法

直接观察或记录到的信号,一般是以时间为独立变量的,称为信号的时域描述,它能反映信号的幅值随时间变化的关系,但不能明显揭示信号的频率组成关系。

采用时域分析法分析系统时,除采用经典的微分或差分方程外,还引入单位脉冲响应和单位序列响应的概念,借助卷积积分的方法。

1.3.2.2 频域分析法

为了研究信号的频率结构和频率成分的幅值、相位关系,应对信号进行频率分析,把信号的时域描述通过适当方法变成信号的频域描述,即:通过频谱分析以频率为独立变量来表示信号。它能反映信号的频率构成,即组成信号的谐波的幅值、初相位与谐波频率之间的关系,从而帮助人们从另一个角度来了解信号的特征,方便研究信号的频率结构和各种频率成分的幅值、相位关系。在频域中,每个信号都需同时用幅频谱和相频谱来描述。信号的频域描述(频谱)是研究测试系统的动态特性、提取信号中有用信息的最重要的技术基础。

对于连续系统和信号来说,常采用傅里叶变换和拉普拉斯变换;对于离散系统和信号则采用Z变换。频域分析法将时域分析法中的微分或差分方程转换为代数方程,给问题的分析带来了方便。

图 1-1 为信号的时域描述和频域描述示意图。

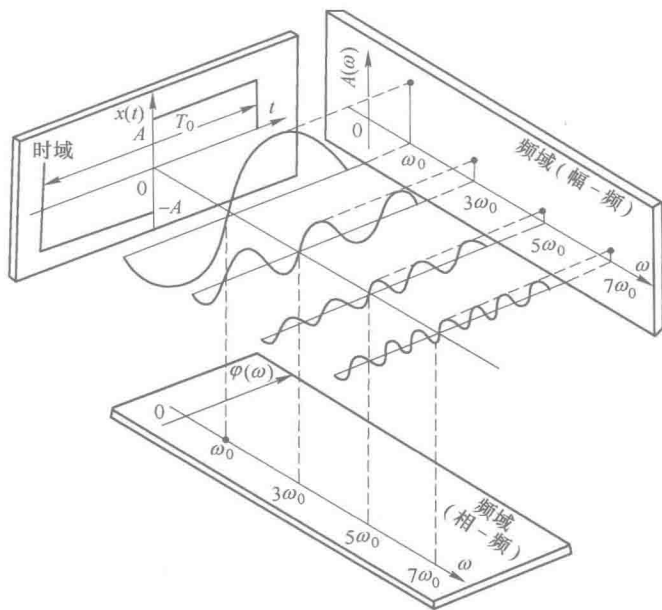


图 1-1 信号的时域描述与频域描述

1.3.3 周期信号的描述

正弦信号是最为简单的周期信号,常称为简谐信号。工程中常见的方波、三角波、锯

齿波等都是周期信号,虽然它们都满足 $x(t) = x(t + kT)$ 关系,但是它们却是非简谐的,包含着多次谐波。进一步分析可知,周期信号是由一系列频率互不相同的谐波(正弦信号)叠加而成的,这些谐波分量的幅值、初相位与谐波频率之间的关系就是周期信号的频谱。进行周期信号频谱分析的数学工具是傅里叶级数。

1.3.3.1 周期函数 $x(t)$ 的三角函数展开式

已经证明,在有限区间上,如果满足狄里赫利条件,周期信号 $x(t)$ 就可以通过傅里叶级数展开成傅里叶级数三角函数展开式。

狄里赫利(Dirichlet)条件如下:

- (1) 函数在任意有限区间内连续,或只有有限个第一类间断点(左、右极限均存在)。
- (2) 在一个周期内,函数有有限个极大值或极小值。
- (3) 函数收敛。

傅里叶级数三角函数展开式如下:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_0 t + \varphi_n) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n), \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned} \quad (1-1)$$

式(1-1)中,傅里叶系数分别由下式获得:

$$\text{常值分量} \quad a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt \quad (1-2)$$

$$\text{余弦分量幅值} \quad a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (1-3)$$

$$\text{正弦分量幅值} \quad b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (1-4)$$

式中 T_0 ——周期;

ω_0 ——角频率(基频), $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$ 。

继续对周期函数 $x(t)$ 的三角函数展开式进行变换:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \\ &= a_0 + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos n\omega_0 t + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin n\omega_0 t \right) \right] \end{aligned} \quad (1-5)$$

如果令: $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\cos \varphi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$, 则: $\sin \varphi_n = -\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$

有:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

同时有:

$$\varphi_n = \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right) \quad \text{或} \quad \tan \varphi_n = -\frac{b_n}{a_n}$$

如果令: $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\sin \theta_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$, 则: $\cos \theta_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$

有:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n)$$

同时有:

$$\theta_n = \arctan\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \quad \text{或} \quad \tan\theta_n = \frac{a_n}{b_n}$$

因此, 还可以得到周期函数 $x(t)$ 的三角函数展开式的另一更为直观的表达形式:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n), (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1-6)$$

式中, $A_0 = a_0$ 为常值分量或直流分量, 即信号的平均值; $A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$ 或 $A_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n)$ 为信号 $x(t)$ 的 n 次谐波分量; $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ 为第 n 次谐波分量的幅值(幅值谱); $\varphi_n = \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$ 或 $\theta_n = \arctan\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ 为第 n 次谐波分量的初相位(相位谱)。

由此可见, 周期信号是由其直流分量和频率为基频整数倍的正弦谐波分量叠加而成的, 各次谐波分量的频率、幅值、初相位一般是不同的。

由于正余弦的不同, 信号的相位谱有两种表达方法, 为了与后面傅里叶复数展开式相频谱表示法表达方式一致, 可以采用上述 φ_n 表达方式表达, 但很多书采用 θ_n 表达方式表达, 读者需注意其表达方式的不同。

例 1-1 求所示的周期方波信号 $x(t)$ 的傅里叶级数三角函数表达式(见图 1-2)。

解: 信号 $x(t)$ 在它的一个周期中的数学表达式为:

$$x(t) = \begin{cases} -1, & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ 1, & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

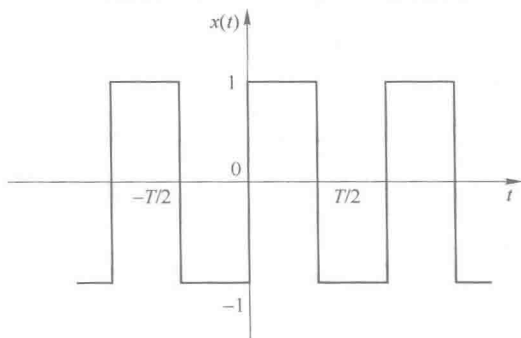


图 1-2 例 1-1 图

应用周期函数三角函数展开式, 可以求得:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt = 0 \\ a_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos n\omega_0 t dt = 0 \\ b_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt \\ &= \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} \sin n\omega_0 t dt = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} \sin n\omega_0 t d \frac{n\omega_0 t}{n\omega_0} = \frac{4}{T_0} \frac{-1}{n\omega_0} \int_0^{T_0/2} \cos n\omega_0 t dt \\ &= \frac{4}{T_0} \frac{-1}{n\omega_0} \cos n\omega_0 t \Big|_0^{T_0/2} = \frac{4}{2n\pi} (1 - \cos n\pi) \\ &= \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases} \end{aligned}$$

因此, 图 1-2 所示周期方波信号的傅里叶级数表达式为:

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \cdots \right) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1)\omega_0 t$$

所求信号的频谱图如图 1-3 所示。

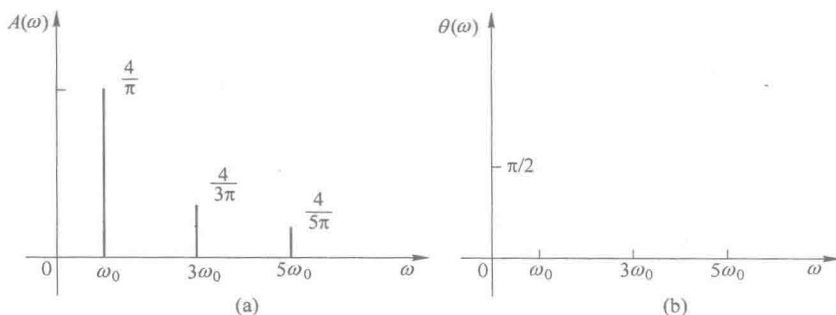


图 1-3 周期方波信号的频谱图

(a) 幅值谱; (b) 相位谱

注意: 本例中 $x(t)$ 为一奇函数, 而 $\cos n\omega_0 t$ 为偶函数, 两者的积 $x(t) \cos n\omega_0 t$ 也为奇函数, 而一个奇函数在上、下限对称区间上的积分值等于零。

类似地, 还可以求得其他周期函数的频谱, 见表 1-1, 读者可根据上述公式练习推导。

表 1-1 常见信号的傅里叶三角函数展开式及频谱

信号名称	时域波形	傅里叶三角函数展开式	幅频谱图
周期方波 (奇函数)		$x(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \cdots \right)$ $= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin[(2n-1)\omega_0 t]$	
周期方波 (偶函数)		$x(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \omega_0 t - \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \cdots \right)$ $= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4 \times (-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi} \sin[(2n-1)\omega_0 t]$	
周期三角波		$x(t) = \frac{8}{\pi^2} \left(\cos \omega_0 t + \frac{1}{9} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{25} \sin 5\omega_0 t + \cdots \right)$ $= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(2n-1)^2 \pi^2} \sin[(2n-1)\omega_0 t]$	
周期锯齿波		$x(t) = \frac{2}{\pi} \left(-\sin \omega_0 t - \frac{1}{2} \sin 2\omega_0 t - \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t - \cdots \right)$ $= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2}{n\pi} \sin n\omega_0 t$	
全波整流		$x(t) = \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{2}{3} \cos 2\omega_0 t - \frac{2}{15} \cos 4\omega_0 t - \frac{2}{35} \cos 6\omega_0 t - \cdots \right)$ $= \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-4}{(4n^2-1)\pi} \cos n\omega_0 t$	