21世纪保险精算系列教材

Actuarial Science

21世纪保险精算系列教材

中国人民大学风险管理与精算中心主编

Fundamentals of Actuarial Science

# 精算学基础

孟生旺　张连增　刘乐平　编著

中国人民大学出版社

21世纪保险精算系列教材

Actuarial Science

21世纪保险精算系列教材

中国人民大学风险管理与精算中心主编

# Fundamentals of Actuarial Science

# 精算学基础

孟生旺　张连增　刘乐平　编著

中国人民大学出版社

· 北京 ·

**图书在版编目（CIP）数据**

精算学基础/孟生旺等编著. —北京：中国人民大学出版社，2016.1
21 世纪保险精算系列教材
ISBN 978-7-300-22289-9

Ⅰ.①精… Ⅱ.①孟… Ⅲ.①保险-计算方法-教材 Ⅳ.①F840.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 316600 号

21 世纪保险精算系列教材
中国人民大学风险管理与精算中心主编
**精算学基础**
孟生旺　张连增　刘乐平　编著
Jingsuanxue Jichu

| | | | |
|---|---|---|---|
| **出版发行** | 中国人民大学出版社 | | |
| **社　　址** | 北京中关村大街 31 号 | **邮政编码** | 100080 |
| **电　　话** | 010－62511242（总编室） | | 010－62511770（质管部） |
| | 010－82501766（邮购部） | | 010－62514148（门市部） |
| | 010－62515195（发行公司） | | 010－62515275（盗版举报） |
| **网　　址** | http://www.crup.com.cn | | |
| | http://www.ttrnet.com（人大教研网） | | |
| **经　　销** | 新华书店 | | |
| **印　　刷** | 北京鑫丰华彩印有限公司 | | |
| **规　　格** | 185 mm×260 mm　16 开本 | **版　　次** | 2016 年 1 月第 1 版 |
| **印　　张** | 11.75 插页 1 | **印　　次** | 2016 年 1 月第 1 次印刷 |
| **字　　数** | 243 000 | **定　　价** | 28.00 元 |

# 总 序

自1775年英国公平人寿最早将运用数学工具为产品定价的专门人员命名为精算师以来，精算师职业在国际上已有200多年的发展历史。这一职业最早在人寿和养老金业务中发挥作用，之后逐步向非寿险、社会保障等领域扩展。20世纪以后，精算师的职业进一步延伸到银行、投资、公司财务、金融工程等领域。精算师职业领域的扩展与精算职业组织的发展和精算教育水平的提高密切相关。1848年后欧美一些国家陆续成立的精算师协会以及国际精算师协会，为提高全球精算教育标准做出了贡献。例如，国际精算师协会早在1998年就公布了初级精算教育标准，要求2005年后加入国际精算师协会的成员在精算教育标准上符合国际教育标准。2007年，国际精算师协会再次公布了重新修订的初级精算教育标准及教育大纲。国际上著名的精算师职业组织，包括北美寿险精算师协会、北美非寿险精算师协会、英国精算师协会等，也从2000年后陆续对其精算教育标准和精算师考试体系进行改革，强调精算学与统计学、金融学、投资学、会计学、经济学等学科的融合，强调精算学科培养复合型风险管理人才的目标。

我国精算教育和精算师职业发展起步较晚，1992年后才陆续引入北美寿险精算师考试、英国精算师考试、日本精算师考试、北美非寿险精算师考试等，2000年后，中国精算师考试体系逐步建立起来。目前，中国精算师考试的考点已增加到15个。2006年12月，民政部批准中国精算师协会正式筹备成立。中国精算师协会的成立，必将进一步推动中国精算教育和精算师职业的发展，也迫切要求对当前的精算教育体系和精算师考试体系进行必要的改革，以尽快向国际精算师协会发布的精算教育标准看齐。

中国人民大学统计学院是国内较早开展风险管理与精算教育的大学学院之一。1992年就开始招收风险管理与精算专业方向的硕士研究生，1993年开始招收该方向的本科生，1996年招收了该专业方向的第一批博士研究生。2004年，经教育部批准备案，统计学院设立了独立的风险管理与精算学硕士学位点和博士

学位点，标志着在风险管理与精算人才培养上，形成了学士、硕士、博士多层次、专业化的人才培养教育体系。其专业课程设置完全与国际接轨，涵盖了北美、英国和中国精算师初级课程考试的基本内容，教学大纲紧跟国际精算师协会公布的精算教育指南，同时根据学科发展的国际趋势，每年重新修订课程和教学大纲。在研究方面，设立了中国人民大学风险管理与精算中心。多年来，在寿险风险管理与精算、非寿险特别是汽车保险风险管理与精算、养老金、社会保障等领域取得了很多有影响的成果，进一步促进了风险管理与精算教育的发展。为适应我国精算教育改革与发展的需要，并与国际精算师协会的精算教育标准接轨，中国人民大学风险管理与精算中心精心组织编写了一套精算学系列教材，分两个阶段完成。第一阶段涵盖精算师考试初级课程的全部专业课内容，包括《金融数学》、《风险理论》、《寿险精算学》、《非寿险精算学》、《精算中常用的统计模型》5 本教材和配套的学习辅导书，共 10 本。第二阶段涵盖精算师考试高级课程的全部内容，分寿险、非寿险、养老金、健康保险、社会保障、投资等不同系列。这套教材一方面可以满足各高校精算专业的教学需求，另一方面也可以作为参加各类精算师资格考试学员的学习参考资料，同时，也可以作为对精算学科有兴趣的同仁了解和学习精算的参考书。

这套教材的特点，一是在内容上涵盖了北美寿险、北美非寿险、英国、中国精算师考试最新的内容，同时紧跟国际精算师协会提出的精算教育标准，涵盖了国际精算教育大纲的基本内容；二是为了便于读者自学和教师讲授，我们为每本教材编写了学习辅导书，辅导书中包括学习要点、教材习题解答和一部分补充练习题及其解答等；三是在写法上，力求把精算学的数理理论与实务结合起来，注意精算学背后的实践意义，努力从实际意义上解释各种数学关系。

本套教材凝结了中国人民大学风险管理与精算中心全体教师的心血，特别是王晓军、孟生旺、黄向阳、王燕、肖争艳、肖宇谷等老师，他们为本套教材的编写付出了极大的艰辛，统计学院部分硕士研究生和本科生对辅导书中的习题解答进行了验证，感谢他们为本套教材做出的贡献，同时也感谢中国人民大学出版社的编辑们为本套教材的出版付出的辛勤劳动。

袁卫

# 前　言

保险是对未来可能发生的不确定性损失提供经济补偿的一种风险管理手段。保险公司在为被保险人提供经济保障的同时，需要收取一定的保险费，也就是为保险产品定价。厘定保险产品的价格是精算学的核心内容之一。保险产品的一个重要特点是收取保费在先，提供损失赔偿或支付保险金在后，时间延迟可能长达数年甚至数十年，因此，保险公司在收取的保费中，要预留足够的资金用于应对未来的赔付支出，即需要计提保险准备金，以确保保险公司具有充足的偿付能力。计提保险准备金是精算学的另一个重要内容。

保险定价和准备金评估是保险公司经营管理活动的核心工作，也是保险精算学的基础内容。作为保险专业的学生，掌握保险产品的定价原理和准备金评估的基本方法，对于深刻理解保险公司的运行机理、确保保险公司的稳健经营和偿付能力都具有十分重要的意义。

保险专业毕竟不同于精算专业，所以对保险定价和准备金评估的学习内容在深度和广度上都应该与精算专业有所区别。本书是专门为保险专业的本科生编写的一本精算学基础教材，主要讲解寿险精算和非寿险精算的基本概念和基本方法。在写作过程中，力求用通俗的语言和简明的示例来介绍保险定价和准备金评估的基本原理和方法，删除了不必要的数学推导，回避了较为复杂的数学概念。使用本书的读者仅需掌握概率统计的基础知识。

任何精算问题的解决都离不开计算工具。作为精算学的基础教材，本书涉及的计算问题并不复杂，大多可以通过 Excel 来完成。在解决一些比较复杂的保险定价或准备金评估等问题时，就需要使用更加高级的统计软件，如 R 或 SAS 等，但这不属于本书的教学内容。

全书共分 12 章，前 6 章是寿险精算，后 6 章是非寿险精算，由中国人民大学统计学院孟生旺教授、南开大学金融学院张连增教授和天津财经大学统计学院刘乐平教授共同完成。为本书编写做出贡献的还有王选鹤、王明高、刘新红、陈

静仁、李政宵和杨亮，在此向他们表示衷心感谢。

本书的三位作者有10多年精算教学的经验，为精算专业的学生编写过《金融数学》、《寿险精算学》、《非寿险精算学》等教材，积累了丰富的教学材料，这为本书的编写奠定了良好的基础。尽管如此，书中还是难免存在疏漏之处，望读者批评指正。

与本书相关的教学资源可从 http://blog. sina. com. cn/mengshw 下载。

孟生旺

# 目　录

# 第1章 复利理论

Chapter 1

复利理论是寿险精算学的重要基础。本章主要介绍利息的度量工具，如实际利率、名义利率、贴现率和利息力等，以及年金现值和终值的计算。

## 1.1 累积函数和实际利率

累积函数（accumulation function）是指期初的1单位本金在时刻 $t$ 的累积值，记为 $a(t)$。根据累积函数的定义，显然有 $a(0)=1$。

实际利率（effective rate of interest）是指1单位本金在一个时期末所赚取的利息金额，通常用百分数表示，如5%的实际利率表示1元本金在一个时期末赚取的利息是0.05元。

如果用累积函数表示实际利率，则从时刻 $t-1$ 到时刻 $t$ 的实际利率为：

$$i_t=\frac{a(t)-a(t-1)}{a(t-1)} \tag{1.1}$$

式中，分母是在时刻 $t-1$ 的累积值；分子是该累积值在时期（$t-1$，$t$）赚取的利息金额。时期（$t-1$，$t$）表示从时刻 $t-1$ 到时刻 $t$ 的时间区间。

显然，在时期（0，1）的实际利率可以表示为：

$$i_1=\frac{a(1)-a(0)}{a(0)}=a(1)-1$$

**【例1—1】**

已知累积函数为 $a(t)=1.2^t+0.05t$，计算 $t=2$ 时的500万元在 $t=3$ 时的价值。

**【解】** 根据累积函数的定义，1单位本金在 $t=2$ 时的累积值为 $a(2)$，在 $t=3$

时的累积值为 $a(3)$，也就是说，从 $t=2$ 到 $t=3$，资金的价值增长了 $a(3)/a(2)$ 倍，所以 $t=2$ 时的 500 万元在 $t=3$ 时的价值为：

$$500\times\frac{a(3)}{a(2)}=500\times\frac{1.2^3+0.05\times3}{1.2^2+0.05\times2}=609.74(\text{万元})$$

## 1.2 复 利

复利的累积函数为：

$$a(t)=(1+i)^t,\ t\geqslant0 \tag{1.2}$$

在复利条件下，累积值的增长过程可以如下解释：

假设年利率为 $i$，那么 1 元本金在第一年末的累积值为（$1+i$）；

将第一年末的累积值作为第二年的本金进行投资，可赚取利息 $i(1+i)$，再加上年初的本金（$1+i$），即得第二年末的累积值为（$1+i)^2$；

将第二年末的累积值作为第三年的本金进行投资，可赚取利息 $i(1+i)^2$，再加上年初的本金（$1+i)^2$，即得第三年末的累积值为（$1+i)^3$。

依此类推，即得以后各年末的累积值。

在复利条件下，若记 $i$ 为复利利率，则在时期（$t-1$，$t$）的实际利率 $i_t$ 可以表示为：

$$\begin{aligned}i_t&=\frac{a(t)-a(t-1)}{a(t-1)}\\&=\frac{(1+i)^t-(1+i)^{t-1}}{(1+i)^{t-1}}\\&=i\end{aligned}$$

由此可见，在复利条件下，实际利率恒等于复利利率。

**【例 1—2】**

设复利的年利率为 5%，初始本金为 20 000 元，计算：

(1) 在 9 个月末的累积值；

(2) 在 2 年零 3 个月末的累积值。

**【解】**

(1) 9 个月相当于 $t=9/12=0.75$ 年，所以在 9 个月末的累积值为：

$$20\,000\times(1+0.05)^{0.75}=20\,745.4(\text{元})$$

(2) 2 年零 3 个月相当于 $t=2+3/12=2.25$ 年，所以在 2 年零 3 个月末的累积值为：

$$20\,000\times(1+0.05)^{2.25}=22\,320.6(\text{元})$$

## 1.3 名义利率和利息力

实际利率是指每年末复利一次的利率，也就是说，在每年末将当年的利息结转为下一年的本金。名义利率是指在一年内复利多次或多年复利一次的利率。

例如，设年利率为 6%，每个季度复利一次，那么在每个季度末，被计入的利息就是 6%/4=1.5%。这等价于把 1 年划分成 4 个周期，每个周期的利率为 1.5%。因此当初始资本为 1 时，一年后会增加到 $(1.015)^4=1.061\ 36$，由此可见，对于按季度计息的年名义利率 6%，等价的实际利率为 6.136%。

设 $i$ 为给定的年实际利率，记 $i^{(m)}$ 为与 $i$ 等价的每年计息 $m$ 次的名义利率，每个计息周期的实际利率为 $i^{(m)}/m$。设初始资本为 1，为使在两种利率下的累积值相等，就得到如下等价式

$$\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m=1+i \tag{1.3}$$

从而得到

$$i^{(m)}=m[(1+i)^{1/m}-1] \tag{1.4}$$

当 $m\to\infty$ 时，对应于连续计息，此时有

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}i^{(m)}&=\lim_{m\to\infty}m[(1+i)^{1/m}-1]\\&=\lim_{x\to 0}\frac{(1+i)^x-1}{x}(\text{令 } x=1/m)\\&=\ln(1+i)\\&=\delta\end{aligned}$$

即

$$\delta=\ln(1+i) \tag{1.5}$$

$$e^\delta=1+i \tag{1.6}$$

式中，$\delta$ 称为与 $i$ 等价的利息力。

**【例 1—3】**

令 $i=6\%$，求与 $m=1,2,3,4,6,12,\infty$ 相对应的名义利率 $i^{(m)}$。

**【解】** 当 $m=1$ 时，$i^{(m)}=i=6\%$。

当 $m=2$ 时，$i^{(2)}=2\times[(1+6\%)^{1/2}-1]=5.913\%$。

其他计算结果如表 1—1 所示。

**表 1—1** 名义利率

| $m$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 12 | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i^{(m)}$ | 0.060 00 | 0.059 13 | 0.058 84 | 0.058 70 | 0.058 55 | 0.058 41 | 0.058 27 |

## 1.4 贴现函数和实际贴现率

累积函数表示资金随着时间的推移而增长变化的过程，用于计算累积值（accumulated value）或终值（future value），即资金在未来时刻的价值。贴现函数是累积函数的倒数，用于计算现值（present value），即未来的一笔资金在当前的价值。

根据累积函数的定义，在时刻 0 的 1 元本金在时刻 $t$ 的累积值为 $a(t)$。如果在时刻 $t$ 希望获得 1 元的累积值，在时刻 0 的本金应该是多少？这是一个求现值的过程，即贴现过程。贴现过程与累积过程是互逆的。如果在时刻 $t$ 希望获得 1 元的累积值，在时刻 0 的本金应该是 $a^{-1}(t)=1/a(t)$。$a^{-1}(t)$ 就是所谓的贴现函数（discount function）。

复利的贴现函数为：

$$a^{-1}(t)=(1+i)^{-t} \tag{1.7}$$

**【例 1—4】**

假设复利的年利率为 5%，投资者希望：(1) 在 9 个月末获得 20 000 元；(2) 在 2 年零 3 个月末获得 20 000 元。在上述两种情况下分别计算投资者在期初应该投入到基金中的本金为多少。

**【解】** 应用复利的贴现函数，投资者在期初应该投入的本金分别为：

(1) $20\,000\times(1+0.05)^{-0.75}=19\,281.4$（元）

(2) $20\,000\times(1+0.05)^{-2.25}=17\,920.7$（元）

实际利率是一定时期内产生的利息与期初本金的比率，而实际贴现率（effective rate of discount）是一定时期内产生的利息与期末累积值的比率。

在时期（$t-1$，$t$）的实际贴现率定义为：

$$d_t=\frac{a(t)-a(t-1)}{a(t)} \tag{1.8}$$

式中，分母是期末的累积值；分子是期初的利息收入。

如果使用复利的累积函数，则时期（$t-1$，$t$）的实际贴现率是一个常数，可以表示为：

$$d=\frac{(1+i)^t-(1+i)^{t-1}}{(1+i)^t}=\frac{i}{1+i} \tag{1.9}$$

根据实际利率和实际贴现率的关系，复利条件下的累积函数也可以用实际贴现率表示如下：

$$a(t)=(1-d)^{-t} \tag{1.10}$$

由此可得，$a(0)=1$，$a(1)=1/(1-d)$。这就意味着，期初的1元相当于期末的$1/(1-d)$元，也就是期初的$1-d$元相当于期末的1元。

期初的$1-d$元累积到期末为1元，表明当期的利息为$d$元，利率为：

$$i=\frac{d}{1-d} \tag{1.11}$$

上式就是用实际贴现率表示的实际利率。

## 1.5 名义贴现率

名义贴现率（nominal rate of discount）用于度量不足一年的一个时间区间内的实际贴现率。例如，如果年名义贴现率为6%，每月贴现1次，那么每月的实际贴现率为6%/12=0.5%。在已知每月的实际贴现率的情况下，也可以计算出年实际贴现率。不妨假设年实际贴现率为$d$，则根据月实际贴现率计算的现值应该等于根据年实际贴现率计算的现值，即

$$(1-0.5\%)^{12}=1-d$$

由此可得年实际贴现率为$d=1-(1-0.5\%)^{12}=5.8\%$。

如果用$d^{(m)}$表示年名义贴现率，每$1/m$年贴现一次，则每$1/m$年的实际贴现率为$d^{(m)}/m$，因此年末的1元在年初的现值为$(1-d^{(m)}/m)^m$，它应该等于按年实际贴现率$d$计算的现值$(1-d)$，即

$$(1-d^{(m)}/m)^m=1-d$$

故由年名义贴现率表示的年实际贴现率为：

$$d=1-(1-d^{(m)}/m)^m \tag{1.12}$$

由年实际贴现率表示的年名义贴现率为：

$$d^{(m)}=m[1-(1-d)^{1/m}] \tag{1.13}$$

**【例1—5】**

如果每月复利一次的年名义利率为6%，请计算当每个季度贴现一次的名义贴现率为多少时，名义利率与名义贴现率是等价的。等价的含义是指无论按名义利率计算还是按名义贴现率计算，期末的1元在期初的现值是相等的，或期初的1元在期末的累积值是相等的。

**【解】**根据题意，有

$$(1+0.06/12)^{12}=(1-d^{(4)}/4)^{-4}$$

等式左边是期初的1元按名义利率计算的期末累积值，右边是按名义贴现率计算的期末累积值。解上述方程即得每个季度贴现一次的名义贴现率为

$d^{(4)}=5.94\%$。

**【例 1—6】**

令 $i=6\%$，求与 $m=1, 2, 3, 4, 6, 12, \infty$ 相对应的名义贴现率 $d^{(m)}$ 的值。

**【解】** 当 $m=1$ 时，$d=i/(1+i)=5.66\%$。

当 $m=2$ 时，$d^{(2)}=2\left[1-(1-d)^{1/2}\right]=5.743\%$。

其他计算结果如表 1—2 所示。

**表 1—2** 名义贴现率

| $m$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 12 | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d^{(m)}$ | 0.056 60 | 0.057 43 | 0.057 71 | 0.057 85 | 0.057 99 | 0.058 13 | 0.058 27 |

## 1.6 年金的现值

年金有等额年金和变额年金之分。等额年金是指定期付款一次，每次支付相等金额的现金流。本节仅介绍等额年金的现值和终值。

年金的现值是指年金的一系列付款在期初时的价值。

如果年金的支付期限是 $n$ 个时期，在每个时期末支付 1 元，那么这种年金就是期末付定期年金（annuity-immediate）。

期末付定期年金的现值用符号 $a_{\overline{n|}}$ 表示。期末付定期年金的现值计算公式为：

$$a_{\overline{n|}}=\frac{1-v^n}{i} \tag{1.14}$$

**证明：**

$$\begin{aligned} a_{\overline{n|}} &= v+v^2+\cdots+v^n \\ &= \frac{v(1-v^n)}{1-v} \\ &= \frac{1-v^n}{i} \end{aligned}$$

**【例 1—7】**

一笔年金在 20 年内每年末支付 4，另一笔年金在 10 年内每年末支付 5。如果年实际利率为 $i$，则这两笔年金的现值相等。如另一笔款项在 $n$ 年内以利率 $i$ 投资则可以翻番，求 $n$。

**【解】** 根据题意有等式：

$$4a_{\overline{20|}}=5a_{\overline{10|}}$$

故有

$$4 \cdot \frac{1-v^{20}}{i} = 5 \cdot \frac{1-v^{10}}{i}$$

$$4v^{20} - 5v^{10} + 1 = 0$$

$$v^{10} = 0.25$$

$$i = 0.148\,698$$

假设另一笔款项的投资额为 $x$，则有 $x(1+i)^n = 2x$，由此可解得 $n=5$。

如果年金的支付期限是 $n$ 个时期，在每个时期初支付 1 元，那么这种年金就是期初付定期年金（annuity-due）。期初付定期年金的现值用符号 $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ 表示。

期初付年金的每 1 元款项都比期末付年金提前了一个时期，而期初的 1 元相当于期末的（$1+i$）元，因此将期末付年金的现值乘以（$1+i$）即可得到期初付年金的现值，即

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = (1+i)a_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{d} \tag{1.15}$$

**【例 1—8】**

企业租用了一间仓库，一次性支付 50 000 元的租金后可以使用 8 年，假设年实际利率为 6%，计算如果每年初支付租金，该仓库的年租金应该是多少。

**【解】** 设每年初的租金为 $x$，则根据题意，可以建立下述方程：

$$50\,000 = x\ddot{a}_{\overline{8}|6\%}$$

因此每年初的租金应为：

$$A = \frac{50\,000}{\ddot{a}_{\overline{8}|6\%}} = \frac{50\,000}{6.582\,4} = 7\,596(\text{元})$$

永续年金（perpetuity）是指无限期地支付的年金，因此，其现值等于定期年金的现值在支付期限 $n \to \infty$ 时的极限。若用 $a_{\overline{\infty}|}$ 表示期末付永续年金的现值，则有

$$a_{\overline{\infty}|} = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-v^n}{i} = \frac{1}{i}$$

永续年金的计算公式表明，如果在期初将 $1/i$ 的本金按利率 $i$ 投资，那么在本金保持不变的情况下，可以无限期地在每期末获得 1 元的利息。

如用 $\ddot{a}_{\overline{\infty}|}$ 表示期初付永续年金的现值，则有

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \lim_{n\to\infty} \ddot{a}_{\overline{n}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-v^n}{d} = \frac{1}{d}$$

## 1.7　年金的终值

终值（future value）也称累积值（accumulated value），是指现金流在未来