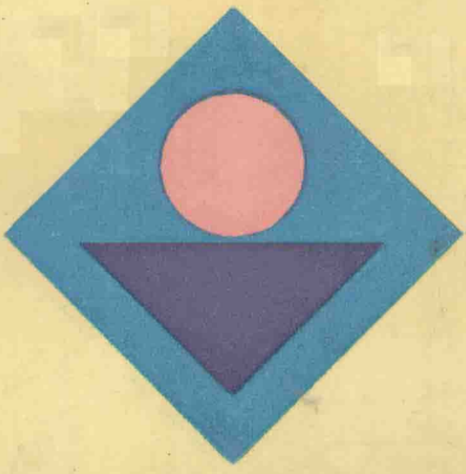
高中数学典型例题分析

—思路 方法 规律—

李永福 陈百年 岳世型 主编



化学工业出版社

高中数学典型例题分析

思路　方法　规律

李永福　陈百年　岳世型　主编
徐放民　路益言　主审

化学工业出版社
·北　京·

(京)新登字 039 号

图书在版编目(CIP)数据

高中数学典型例题分析:思路、方法、规律/李永福等主编。-北京:化学工业出版社,1994.12

ISBN 7-5025-1475-9

Ⅰ.高… Ⅱ.李… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 12888 号

责任编辑:郑永吉 刘俊之

封面设计:郑小红

*

化学工业出版社 出版

(北京市朝阳区惠新里 3 号)

北京市通县京华印刷厂

新华书店北京发行所发行

*

开本 787×1092 $1/32$ 印张 $10\frac{1}{8}$ 字数 234 千字

1994 年 12 月第 1 版 1994 年 12 月北京第 1 次印刷

印 数 1—6,500

定 价 8.10 元

前　言

为了帮助高中学生全面系统地掌握中学课程内容，在编写了《高中数学 40 个专题》和《高中数学学习指导》后，作者经过教学实践，在广泛征求意见的基础上，又编写了《高中数学典型例题分析》一书。

此书围绕现行统编教材的知识系统，精心选编各章的典型范例，选题新颖、灵活，注重知识和技能的覆盖等，每范例从分析的思路，从方法到解答，从题型归纳到规律总结都进行了认真研究和精心编写。目的是使学生学会用数学思想方法来处理各种数学问题，从而寻找解题思路、探求解题途径、掌握解题方法、总结解题规律，以便提高学生分析问题和解决问题的能力。如果读者通过此书的学习和使用，能够在这些方面有所收益，我们将感到欣慰。

参加本书编写的有：李永福、陈百年、岳世型、徐放民、路益言、张世温、史海涌、李谦、吉云、丁培义、原春信、王珍民、任向阳、梁宏康、张玉转、卫会民、徐小玲、雷佩娟、冯文娟、董学章、孙从兴、王端生、姜接力，最后由李永福、陈百年、张世温、史海涌统阅，徐放民、路益言审定。

由于水平有限，难免有所疏漏，恳请广大读者批评指正。

编　者

目　录

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

从集合理论出发，运用映射观点，给出函数的现代定义。通过对一般函数的单调性、奇偶性的研究和对几类具体基本初等函数图象及性质的讨论，建立起运用函数理论解决数学问题的思想方法与理论，是学习本章的目的所在，因此，掌握确定函数的定义域、值域、解析式的方法，掌握各类基本初等函数的图象及性质，掌握复合函数的研究方法，并能运用方程与函数的方法，数形结合的方法解决其它数学问题，是学好本章的关键。

函数是中学数学中基本而最重要的内容之一。为能对本章知识有深刻理解和掌握，并能运用这些知识解决实际问题，特举数例。通过对它们的分析处理，以期达到上述之目的。

例 1　已知集合 $A=\{x,xy,\lg(xy)\}$，集合 $B=\{0,|x|,y\}$，且 $A=B$，求 x 与 y。

分析　题中给出了两个含有三个元素的集合，首先由所给集中每个元素都有意义可知，$xy>0$，因此 $x\neq0$，$y\neq0$，$xy\neq0$，但由 $A=B$ 知，B 中元素 0 属于 A，且只能是 $\lg(xy)=0$，于是 $xy=1$，此时 $A=\{x,1,0,\}$。再由 $A=B$ 知元素 $1\in B$，即 $|x|=1$ 或 $y=1$，若 $y=1$，则由 $xy=1$ 知 $x=1$，这样 A 中出现重复元素，与集合中元素的互异性矛盾，故 $y\neq1$，所以 $|x|=1$，且只能是 $x=-1$，从而由 $xy=1$ 即知 $y=-1$，这时 $A=B=\{-1,0,1\}$。

解　略

说明　利用集合相等的定义解题，应特别注意集合中元素的确定性、互异性和无序性这三个特征的运用。

例 2 已知集合 A 和集合 B 中各含有 12 个元素，$A\cap B$ 含有 4 个元素，试求同时满足下面两个条件的集合 C 的个数：

i $C\subset A\cup B$，且 C 中含有 3 个元素

ii $C\cap A\neq\Phi$

分析 由于题中涉及到集合 A、B、$A\cup B$、$A\cap B$ 及各集中元素的个数，因此应借助韦恩图进行形象化分析，如图 1-1。A 与 B 有 4 个公共元素，要确定同时满足 i 和 ii 两个条件的集合 C 的个数，就是要计算由 $A\cup B$ 中的 20 个元素中每次取出 3 个不同元素，且其中至少有一个元素属于 A 的组合个数，这样问题便转化为一个条件组合问题，从而可解。

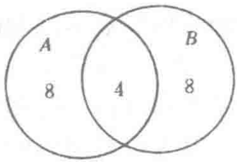


图 1-1

解 如上分析，满足两个条件的集合 C 的个数等于从集合 $A\cup B$ 的 20 个不同的元素中任取 3 个的组合种数减去从集合 B 中不属于 A 的 8 个元素中任取 3 个的组合种数。即

$$C_{20}^{3}-C_{8}^{3}=1140-56=1084$$

故满足条件的集合 C 共有 1084 个。

说明 i 利用韦恩图形象化地表示集合，可使集合间的关系直观明了，为进一步分析和解决问题提供了"几何背景"。ii 利用数学各部分知识间的联系，将问题转化，是数学的基本思想方法，应予以重视。

例 3 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[a, b]$，且 $b>-a>0$。求下列函数的定义域：

(1) $F(x)=f(x)-f(-x)$；

(2) $G(x)=f(x+c)+f(x-c)$，$(c>0)$。

分析 求函数的定义域就是求函数中自变量的取值范围。

因此问题的关键是依条件合理的列解关于自变量的不等式(或组),因为 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$,而 $f(-x)$、$f(x+c)$、$f(x-c)$ 具有同一对应法则 f,从这个意义来看,在 $f(-x)$、$f(x+c)$、$f(x-c)$ 中的 $-x$、$x+c$、$x-c$ 就相等于在 $f(x)$ 中的 x,因此应有 $a\leqslant -x\leqslant b$、$a\leqslant x+c\leqslant b$、$a\leqslant x-c\leqslant b$,解这些不等式即可。

解 (1) $\because f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$,即 $a\leqslant x\leqslant b$

$\therefore$ 由 $a\leqslant -x\leqslant b$ 得 $f(-x)$ 的定义域为 $-b\leqslant x\leqslant -a$

又 $b>-a>0$,由 $\begin{cases}a\leqslant x\leqslant b\\ -b\leqslant x\leqslant -a\end{cases}$ 得 $F(x)$ 的定义域为 $[a,-a]$。

(2) 解不等式组 $\begin{cases}a\leqslant x+c\leqslant b\\ a\leqslant x-c\leqslant b\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a-c\leqslant x\leqslant b-c\\ a+c\leqslant x\leqslant b+c\end{cases}$

$\because$ $G(x)$ 是函数,而函数的定义域为非空数集

$\therefore$ $a+c\leqslant b-c$

$\therefore$ 当 $0<c\leqslant\frac{1}{2}(b-a)$ 时,$G(x)$ 的定义域为 $[a+c,b-c]$

说明 i 函数的定义域即函数中自变量的取值范围,因此求函数的定义域的实质就是合理的列解不等式(或组)。 ii 确定复合函数的定义域关键是利用中间变量的取值范围应是函数的定义域的子集这一要求。这里有两个方面的问题应加以区别,一类是如本例的情形,已知 $y=f(u)$ 的定义域 $a\leqslant u\leqslant b$,其中 $u=g(x)$ 为中间变量,而求 $y=f[g(x)]$ 的定义域,这只需解不等式 $a\leqslant g(x)\leqslant b$ 即可。另一类是已知 $y=f[g(x)]$ 的定义域 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$,而求 $y=f(u)(u=g(x))$ 的定义域,即求中间变量 u 的取值范围,而这实质上是已知 $u=g(x)$ 的定义域为 $[\alpha,\beta]$ 时,确定 u 的值域。

例 4 求函数 $y=\frac{x^2+2x-1}{x-1}$,$\left(-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right)$ 的值域。

分析 1 确定函数的值域,就是求函数中函数值的集合,即

y 的取值范围。一般应根据函数的定义域、解析式及函数具有的性质列解关于 y 的不等式(或组)。注意到函数解析式亦可视为关于 x,y 的二元方程,并且该方程在所给定义域上恒有实数解。这样我们即可利用方程有实数解的条件,建立起关于 y(看作关于 x 的方程的系数)的不等式而解之。为此可将原函数变形为:

$$x^2+(2-y)x+y-1=0 \tag{1-1}$$

但它的判别式:

$$\Delta=(2-y)^2-4(y-1)=y^2-8y+8\geqslant 0 \tag{1-2}$$

(1-2)是使方程(1-1)在实数集 R 上有实数解的充要条件,并非在定义域$\left[-1,\frac{1}{2}\right]$上有实数解的充要条件,因此由(1-2)所得的 y 的取值范围一般要比原函数的值域大,所以,在原函数的定义域不是 R,或不是 R 中仅去掉有限个点的情形时,不能单纯用判别式求函数的值域。为了找到方程(1-1)在区间$\left[-1,\frac{1}{2}\right]$上至少有一实根的条件,联系二次方程与二次函数的图象关系,

令:$f(x)=x^2+(2-y)x+y-1,x\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$

则所找条件为 $f(x)$ 的图象与 x 轴上$\left[-1,\frac{1}{2}\right]$的线段至少有一个公共点,而这等价于

$$f(-1)f\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant 0 \tag{1-3}$$

或

$$\begin{cases}(2-y)^2-4(y-1)\geqslant 0\\-1<\dfrac{y-2}{2}<\dfrac{1}{2}\\f(-1)>0\\f\left(\dfrac{1}{2}\right)>0\end{cases} \tag{1-4}$$

由(1-3)得$-\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1$，由(1-4)得$1<y\leqslant 4-2\sqrt{2}$，从而可得函数的值域为$\left[-\frac{1}{2},4-2\sqrt{2}\right]$。

分析 2 由于所给函数的解析式是关于x的假分式，因此可将其变形：$y=\frac{(x-1)^2+4(x-1)+2}{x-1}=(x-1)+\frac{2}{x-1}+4$。作变量代换$t=x-1$，则$y=t+\frac{2}{t}+4,t\in\left[-2,-\frac{1}{2}\right]$。为此，我们可先求函数$y=t+\frac{2}{t}$在$\left[-2,-\frac{1}{2}\right]$上的值域。因为此函数在$\left[-2,-\sqrt{2}\right]$上是增函数，而在$\left[-\sqrt{2},-\frac{1}{2}\right]$上是减函数，且在$\left[-2,-\frac{1}{2}\right]$上的最大值是$-2\sqrt{2}$，最小值是$-\frac{9}{2}$，由此可得原函数的值域为$\left[-\frac{1}{2},4-2\sqrt{2}\right]$。

解 略

例 5 求函数$y=x+\sqrt{x(2-x)}$的值域。

分析 此函数解析式是一个无理式，其定义域为$[0,2]$。可将原函数解析式有理化，即将其变形为$y-x=\sqrt{x(2-x)}$，再通过平方将其等价变为$\begin{cases}(y-x)^2=x(2-x)\\ y-x\geqslant 0\end{cases}$

然后再仿照上例解法一，利用二次方程的理论即可求解。上述解法较麻烦，问题的关键是处理开方，即设法将被开方式变为完全平方式。考察$x(2-x)=-x^2+2x=-(x-1)^2+1$，联想到三角函数中的平方关系式，则问题可通过三角代换而获解。

解 $\because$ $\sqrt{x(2-x)}=\sqrt{1-(x-1)^2}$

由函数的定义域为$[0,2]$，得$x-1\in[-1,1]$

令$x-1=\sin\theta,\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

则 $y=1+\sin\theta+\cos\theta=1+\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

$\because\quad \theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\qquad\therefore\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$

$\therefore\quad 0\leqslant y\leqslant 1+\sqrt{2}$

故原函数的值域为$[0,1+\sqrt{2}]$

说明 i 求函数的值域有多种方法,如判别式法、二次方程理论法、反函数法、不等式放缩法、单调性法、变量代换法等等,方法虽多,但其本质相同,即正确列出关于函数 y 的不等式(或组)而解之。在应用时应根据题目特征加以选择。ii 在变量代换中,三角代换用的较多。一般遇到下列情形可以考虑用三角代换:

$\sqrt{a^2-x^2}$ 令 $x=\sin\theta$, $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$\sqrt{x^2-a^2}$ 令 $x=a\sec\theta$, $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$

$\sqrt{x^2+a^2}$ 令 $x=a\mathrm{tg}\theta$, $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

iii 函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}(a>0)$的单调增区间为$(-\infty,-\sqrt{a}]$, $[\sqrt{a},+\infty)$,减区间为$[-\sqrt{a},0)$, $(0,\sqrt{a})$,其极小值为 $2\sqrt{a}$,极大值为$-2\sqrt{a}$,这个函数应用较广,应引起注意。

例 6 已知函数 $f(x+1)=x^2-3x+2$ 的定义域为 $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$,求 $f^{-1}(x)$和它的定义域。

分析 由题意应先求出 $f(x)$及其定义域。根据函数的定义,我们只需将 x^2-3x+2 用 $x+1$ 表出,且求出 $u=x+1$ 的值域即可。因为 $f(x+1)=(x+1)^2-5(x+1)+6$,故知 $f(x)=x^2-5x+6$,且由 $x\in\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$ 知 $x+1\in\left(-\infty,\frac{5}{2}\right)$,从而问题

变为求 $f(x)=x^2-5x+6,x\in\left(-\infty,\frac{5}{2}\right)$ 的值域及反函数。

解 由 $f(x+1)=x^2-3x+2=(x+1)^2-5(x+1)+6$，$x\in\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$

得 $f(x)=x^2-5x+6=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4},x\in\left(-\infty,\frac{5}{2}\right)$

且 $y\in\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$

再由 $y=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

得 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=y+\frac{1}{4}$

$\therefore\quad x-\frac{5}{2}=\pm\sqrt{y+\frac{1}{4}}$

$\because\quad x<\frac{5}{2}$

$\therefore\quad x=\frac{5}{2}-\sqrt{y+\frac{1}{4}}$

$\therefore\quad f^{-1}(x)=\frac{5}{2}-\sqrt{x+\frac{1}{4}}=\frac{5-\sqrt{1+4x}}{2}$，$x\in\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$

说明 i $y=f(x+1)$ 的定义域是自变量的取值范围，即 $x\in\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$，而不是中间变量 $u=x+1$ 的取值范围，即不能错误地理解为 $x+1\in\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$。ii 求反函数过程中解 x 开方时，究竟选择正号还是负号是个难点，其依据是 $f(x)$ 的定义域。iii 由 $f(x+1)$ 求 $f^{-1}(x)$，必须先求出 $f(x)$，然后再由 $f(x)$ 求 $f^{-1}(x)$，不能由 $f(x+1)$ 直接求 $f^{-1}(x+1)$，再由 $f^{-1}(x+1)$ 利用变换再求 $f^{-1}(x)$。

例 7 已知 $f(x)=8+2x-x^2$，如果 $g(x)=f(2-x^2)$，讨论 $g(x)$ 的单调性。

分析 设 $u(x)=2-x^2$，则 $g(x)$ 是 $u(x)$ 与 $f(u)$ 的复合函数，所以可以利用复合函数单调性的"同增异减"法则进行讨论。

解 设 $u(x)=2-x^2$，则 $u(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为增函数，而在 $[0,+\infty)$ 上为减函数

又 $f(u)=8+2u-u^2=-(u-1)^2+9$ 在区间 $(-\infty,1]$ 上为增函数，在 $(1,+\infty)$ 上为减函数

所以，当 $x\leqslant 0$ 且 $u\geqslant 1$ 即 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时函数 $g(x)$ 为减函数

当 $x\leqslant 0$ 且 $u<1$，即 $x<-1$ 时，函数 $g(x)$ 为增函数

当 $x>0$ 且 $u>1$，即 $0<x<1$ 时，函数 $g(x)$ 为增函数

当 $x>0$ 且 $u\leqslant 1$，即 $x\geqslant 1$ 时，函数 $g(x)$ 为减函数。

说明 我们所接触的函数大部分是复合函数，所以对复合函数的有关性质应引起重视，关于复合函数的单调性有如下结论：

设 $F(x)=f[g(x)]$，则 i 当 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 的单调性相同时，$F(x)$ 为增函数；ii 当 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 的单调性相反时，$F(x)$ 为减函数，可简记为"同增异减"。

例 8 已知函数 $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$，$(x\in R)$，其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$。

(1) 证明 $f(x)$ 在 R 上不单调；

(2) 证明 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数。

分析 要证明 $f(x)$ 在 R 上不单调，按函数单调性的定义，只须证当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)-f(x_2)$ 的符号不确定，但是，由于 $f(x)$ 解析式是指数函数 a^x 的复合函数，因此 $f(x_1)-f(x_2)$ 的符号判断起来比较麻烦。注意到函数 $f(x)$ 显然是 R 上的偶函

数。而偶函数图象关于 y 轴对称，因而不难运用反证法证明 $f(x)$ 在 R 上不单调。

在证明 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数时，可分 $a>1$ 与 $0<a<1$ 两种情形，利用 a^x 的单调性及定义证明。

证明 (1) 对于任意 $x\in R$，因 $f(-x)=\dfrac{a^{-x}+a^x}{2}=f(x)$，故 $f(x)$ 是 R 上的偶函数，用反证法证明 $f(x)$ 在 R 上不单调。

若 $f(x)$ 是 R 上的增函数，则对任意的 $x_1,x_2\in R$ 且 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)<f(x_2)$。现任取 $x_0\in R$，$x_0>0$，那么 $-x_0<0$，故 $-x_0<x_0$，但已证 $f(x)$ 是偶函数，因此 $f(-x_0)=f(x_0)$，这与 $f(-x_0)<f(x_0)$ 矛盾，所以 $f(x)$ 不是 R 上的增函数。

同理可证 $f(x)$ 不是 R 上的减函数。

(2) 当 $a>1$ 时，任取 $0\leqslant x_1<x_2$，由于 a^x 是 $[0,+\infty)$ 上的增函数，故 $0<a^{x_1}<a^{x_2}$。

$$\because\quad f(x_1)-f(x_2)=\frac{a^{x_1}+a^{-x_1}}{2}-\frac{a^{x_2}+a^{-x_2}}{2}$$

$$=\frac{a^{x_1}-a^{x_2}+a^{-x_1}-a^{-x_2}}{2}=\frac{a^{x_1}-a^{-x_2}}{2}\left(1-\frac{1}{a^{x_1+x_2}}\right)$$

$$\because\quad a^{x_1}-a^{x_2}<0,\ x_1+x_2>0,\ \therefore\quad a^{x_1+x_2}>1,$$

$$\therefore\quad 0<\frac{1}{a^{x_1+x_2}}<1$$

$$\therefore\quad f(x_1)-f(x_2)<0\ \text{即}\quad f(x_1)<f(x_2)$$

因此，当 $a>1$ 时，$f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的增函数。

当 $0<a<1$ 时，有 $\dfrac{1}{a}>1$，由 $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}=\dfrac{\left(\frac{1}{a}\right)^{-x}+\left(\frac{1}{a}\right)^{x}}{2}$ 知 $f(x)$ 仍是 $[0,+\infty)$ 上的增函数。

综上所述，当 $0<a$ 且 $a\neq1$ 时，$f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的增函数。

说明 研究函数单调性的基本方法是利用单调性的定义。但是，对于复合函数，利用定义判断时往往比较麻烦，因此除应注意利用复合函数单调性的判定法则之外，还应注意各个题目自身的特殊性，如本例所给函数是偶函数，而偶函数在其定义域上不可能是单调函数。此外，本题还体现了分类讨论在解题中的作用。

例 9 已知 $g(x)$是实数集上的奇函数，试判断 $f(x)=g(x)\left(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)$（其中 $a>0$ 且 $a\neq1$）的奇偶性。

分析 1 $f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，为判断 $f(x)$的奇偶性，据函数奇偶性定义，需考察 $f(-x)$与 $f(x)$之间的关系。由于 $f(x)$的解析式比较复杂，因此可先将其变形为 $f(x)=g(x)\frac{a^x+1}{2(a^x-1)}$，此时$f(-x)=g(-x)\frac{a^{-x}+1}{2(a^{-x}-1)}=-g(x)\frac{1+a^x}{2(1-a^x)}=g(x)\frac{a^x+1}{2(a^x-1)}=f(x)$，从而 $f(x)$是偶函数。

分析 2 $f(x)$由两个函数 $g(x)$ 与$\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}$之积构成，而 $g(x)$是奇函数，因此 $f(x)$的奇偶性由函数$\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}$的奇偶性决定。令 $h(x)=\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}=\frac{a^x+1}{2(a^x-1)}$，此函数定义域为 $x\neq0$，同分析一，易证 $h(x)$是奇函数，因此 $f(x)$是两个奇函数之积，$f(x)$是偶函数。

证明 略。

说明 判断函数的奇偶性，最基本的方法是根据定义考查 $f(-x)$与 $f(x)$的关系，但是还应注意以下几点：ⅰ 函数的定义域在数轴上对应的点集关于原点对称是函数为奇函数或偶函数的必要非充分条件；ⅱ $f(-x)=\pm f(x)$等价于 $f(-x)$

于$f(x)=0$,在$f(x)\neq 0$时,又等价于$\frac{f(-x)}{f(x)}=\pm 1$; iii 两个奇函数之积为偶函数,两个偶函数之积为偶函数,一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数; iv 对于复合函数则同奇才奇,有偶则偶。

例 10 已知$f(x)$是定义在$(-1,1)$上的奇函数且单调递减,若$f(2-a)+f(4-a^2)<0$,求a的取值范围。

分析 要求a的取值范围,就必须根据题设条件建立起关于a的不等式(或组)。题中虽给出一个含a的不等式,但其中还含有未知的函数记号f,因此,问题的关键便是怎样去掉不等式$f(2-a)+f(4-a^2)<0$中的f,对照题中另外三个条件,由定义域是$(-1,1)$可知去掉函数记号f后应有

$$-1<2-a<1 \tag{1-5}$$

$$-1<4-a^2<1 \tag{1-6}$$

$f(x)$是奇函数及减函数,则当$f(x_1)<f(x_2)$时(x_1与x_2是定义域内任意两点),应有$x_1>x_2$,这表明利用$f(x)$的单调性可以去掉函数记号f。为此将所给不等式变为$f(2-a)<-f(4-a^2)$,又$f(x)$是奇函数,即有$f(2-a)<f(a^2-4)$,

从而

$$2-a>a^2-4 \tag{1-7}$$

联立(1-5)、(1-6)、(1-7),不等式组之解即为所求a的范围。

解 因为$f(x)$是奇函数,因此由$f(2-a)+f(4-a^2)<0$得$f(2-a)<-f(4-a^2)=f(a^2-4)$,再由$f(x)$在定义域$(-1,1)$上递减即有

$$\begin{cases}-1<2-a<1\\ -1<a^2-4<1\\ 2-a>a^2-4\end{cases}$$

解此不等式组得a的取值范围是$\sqrt{3}<a<2$。

说明 一般求某个量的值,就是要列解关于该量的方程。而

求某个量的取值范围，则就是要合理列解关于该量的不等式(或组)，遇到解含未知函数记号 f 的不等式，首要问题就是去掉函数记号，而函数的单调性正具此功能。因此对函数性质，不仅会判断而且会灵活运用。

例 11 设 $f(x)=ax^3+bx+3$，$f(3)=6$，求 $f(-3)$ 的值。

分析 这是一个求函数值的问题，常规思路与解法是将自变量值 -3 代入后再计算。但是 $f(x)$ 中含有两个未知参数 a、b，这就需要两个独立条件，即需建立关于 a 和 b 的两个方程，而题中仅给出 $f(3)=6$ 这一个条件，所以不可能将 a 与 b 求出。故需另辟它径，注意到条件 $f(3)$ 与欲求 $f(-3)$ 中自变量值互为相反数，似乎应该利用函数的奇偶性。$f(x)$ 虽非奇函数或偶函数，但将 $f(x)$ 解析式分成两部分之和后，各自分别为奇函数与偶函数，从而问题可解。

解 设 $g(x)=ax^3+bx$，$h(x)=3$，则它们分别为奇函数与偶函数。且 $f(x)=g(x)+h(x)$ 由 $f(3)=g(3)+h(3)=6$ 得 $g(3)=h(3)=3$。

从而 $f(-3)=g(-3)+h(-3)=-g(3)+h(3)=-3+3=0$。

说明 函数的奇偶性应用十分广泛，关键是应灵活应用，如本例之技巧用法。实质上该方法与九四年高考客观题最后一题所述定理是一致的，即对定义在实数集 R 或关于原点对称的区间上的任意函数 $f(x)$，都可以表示成一个奇函数 $g(x)$ 与偶函数 $h(x)$ 之和，其中 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$，$h(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$。

例 12 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足以下两个条件：

i 对一切实数 x,y 都有

$$g(x-y)=g(x)g(y)+f(x)f(y) \tag{1-8}$$