offcn 中公·考研

最新 2016 二维码版

考研数学

真题精讲

4

20年真题分类精讲（数学二）

全国硕士研究生招生考试研究委员会◎编著

世界图书出版公司

offcn 中公·考研

考研数学

20年真题分类精讲
(数学二)

全国硕士研究生招生考试研究委员会◎编著

世界图书出版公司
北京·广州·上海·西安

图书在版编目(CIP)数据

考研数学·20年真题分类精讲. 数学二 / 全国硕士研究生招生考试研究委员会编著. —北京:世界图书出版公司北京公司，2015.3
ISBN 978-7-5100-9500-9

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①全… Ⅲ. ①高等数学—研究生—招生考试—题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 053901 号

考研数学·20年真题分类精讲(数学二)

编　　著: 全国硕士研究生招生考试研究委员会
责任编辑: 夏　丹　孙志荣
装帧设计: 中公教育图书设计中心

出　　版: 世界图书出版公司北京公司
发　　行: 世界图书出版公司北京公司
(地址: 北京朝内大街 137 号　邮编: 100010　电话: 64077922)
销　　售: 各地新华书店
印　　刷: 北京佳诚信缘彩印有限公司

开　　本: 850mm×1168mm　1/16
印　　张: 20
字　　数: 480 千
版　　次: 2015 年 7 月第 1 版　2015 年 7 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5100-9500-9　　**定　价:** 45.00 元

如有质量或印装问题，请拨打售后服务电话 010－82838515

亲爱的读者，本书中的二维码为对应的题目视频讲解，只要扫一扫码，就可以听中公名师讲解，提高学习效率。建议在 Wi－Fi 环境下观看。

分类研究真题是考研数学提分的有效途径

科目分类复习　体系分类掌握　考点分类攻克

近几年，考研竞争日趋激烈，且备考难度也在逐年上升。考研数学(二)包括高等数学和线性代数两个科目，每个科目又可分为多个知识体系，每个知识体系又包含众多考点，考生既需要综合复习，又需要单独进行分类复习。另外，虽然考研数学试卷题量不大，一共23道题目，但150分的总分值使得每道题分值很高，考生一旦复习不到位，很容易丢分。所以考研想要获得高分，一定要有效提高数学分数。为了实现考研数学有效提分，考生要了解考研数学的试题特点和命题规律，最好的途径就是研究历年真题。经研究发现，在历年真题中，考研数学命题重心和考查方向相对稳定，很多核心考点经常被考查，因此本书对1996年～2015年共20年的真题按照科目、体系、考点分类，各个突破，帮助考生在较短时间内有效提高考研数学分数。

科目分类复习

考研数学(二)包含高等数学和线性代数两个科目，所占试卷分值比例分别为78%和22%.由于两个科目各具特点，因此针对两个科目需要采取不同的复习方法。

高等数学复习难度相对较大，所含考点较多，需要记忆的定理和公式较复杂，而且题型变化多端。考生在复习该学科时，不仅需要牢记相关定理和公式，还需通过研究真题把握不同题型的考查核心，以不变应万变。线性代数知识点之间的综合性较强，需要记忆的定理和公式相对较少，但计算量相对较大，考生需要在理清整个学科知识体系的前提下通过练习巩固做题思路。

总之，考研数学（二）两个科目之间交叉内容少，且考试的题目不会跨科考查。所以，复习考研数学（二）时要分科目进行。因此，本书按科目分为两篇，帮助考生根据各个科目的特点有针对性地进行复习。

体系分类掌握

考研数学（二）的两个科目中，每个科目都可以分成多个知识体系，不同的知识体系考查的侧重点不同。因此考生在掌握了不同科目的特点之后，应该将每个学科分体系复习，并将考研数学真题按照不同体系分类研究。将每个科目分体系复习，能使考生清楚掌握学科的重点。

表 1 和表 2 是高等数学和线性代数的体系分类，以及每个体系在 20 年内的出题频率，根据表 1 可以看出，函数、极限与连续及一元函数微积分学是高等数学的考查重点，而中值定理则相对考查较少，考生在复习高等数学时，考查次数多的知识需要重点掌握，而考查次数少的知识体系可以简单掌握。同样的道理，考生可以根据表 2 中知识点考查的频率，有侧重点地复习线性代数。

表 1　1996 年 ～ 2015 年（数学二）高等数学体系分类及出题频率

体系	函数、极限与连续	一元函数微分学	一元函数积分学	中值定理	多元函数微分学	二重积分	常微分方程
考查次数	79 次	90 次	72 次	15 次	25 次	21 次	55 次

表 2　1996 年 ～ 2015 年（数学二）线性代数体系分类及出题频率

体系	行列式	矩阵	向量	线性方程组	特征值和特征向量	二次型
考查次数	8 次	19 次	15 次	18 次	16 次	8 次

因此，本书对每一学科的知识体系分类编排为章。每章开头都设有“本章考试要求”，考生可以从中了解最新大纲对本章内容的基本要求；同时，每章均设有“历年真题分布统计表”，考生可以了解不同知识体系在历年真题中的考查情况，从而有重点地进行复习。

考点分类攻克

考研数学（二）的两个科目虽然考点众多，但绝大多数真题都以某一个考点为主要考查对象。所以考生在研究真题时，应按照不同考点将真题分类攻克，以便达到举一反三的效果。

1.（2011 年第 4 题） 微分方程 $y''-\lambda^2 y=e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}(\lambda>0)$ 的特解形式为（　　）

(A) $a(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x})$.　　　　(B) $ax(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x})$.

(C)$x(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x})$.　　　　(D)$x^2(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x})$.

2.(2012 年第 19 题) 已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$.

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的表达式;

(Ⅱ)求曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\mathrm{d}t$ 的拐点.

3.(2015 年第 12 题) 设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解,且在 $x=0$ 处 $y(x)$ 取得极值 3,则 $y(x)=$ ________.

【分析】以上三道题目主要考查的都是高等数学中常微分方程部分的知识,可见该考点可以通过不同题型进行考查。考生想要快速、准确地解答这些题目,必须要做到:

首先,掌握常微分方程部分的相关理论、公式等;

其次,练习所有属于求解常微分方程的真题。

这样通过真题的练习,考生才能扎实掌握基础知识和解题方法,并能熟练地运用这些知识和方法解答相关题目。此外,考生还可以通过同类型真题的训练,洞悉历年真题对该考点的考查难度和出题角度,真正做到全方位攻克每一个考点!

鉴于此,本书帮助考生将 20 年真题按照不同的考点归类。

第一,针对每个考点都归纳出了【解题核心要点】,给出了与该考点有关的定理、公式、方法等,便于考生记忆。

第二,将真题按照考点分类,真题的答案包括三部分:【思路分析】是对本题的主体思路和核心考点的概括;【解析】是本题的详细解题过程和步骤,多数题目为一题多解;【评注】是对每种题型核心考点和解题方法的归纳。

第三,书中近五年的真题均配有二维码,考生扫码即可观看题目视频讲解。

《考研数学·20 年真题分类精讲(数学二)》一书,旨在从科目、体系、考点三个角度全方位地帮助考生透彻研究 20 年真题,在最短的时间内实现考研数学的有效提分。

全国硕士研究生招生考试研究委员会

二〇一五年七月于北京

目录

第一篇 高等数学

第二篇 线性代数

第一篇

高等数学

第一章　函数、极限与连续

本章考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，并会建立应用问题的函数关系.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系.

6. 掌握极限的性质及四则运算法则.

7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

8. 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的比较方法，会用等价无穷小量求极限.

9. 理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判别函数间断点的类型.

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理），并会应用这些性质.

历年真题分布统计

1996 年 ～ 2015 年本章真题分布统计

考点／年份	函数的性质与计算	对收敛性及极限性质的考查	无穷小的比较	极限的计算	渐近线	连续性	间断点	总计
1996 年			3 分	3 分				6 分
1997 年	3 分		3 分	5 分		3 分		14 分
1998 年		3 分		3 分＋5 分	3 分		5 分	19 分
1999 年		3 分	3 分	5 分＋6 分				17 分
2000 年				3 分＋3 分＋6 分	3 分	3 分		18 分
2001 年	3 分		3 分	3 分			7 分	16 分
2002 年			8 分	3 分＋3 分＋8 分		3 分		25 分
2003 年		4 分	4 分	4 分			10 分	22 分
2004 年			4 分	10 分＋4 分			4 分	22 分
2005 年			4 分	11 分	4 分		4 分	23 分
2006 年			10 分	12 分	4 分	4 分		30 分
2007 年		4 分	4 分	4 分	4 分		4 分	20 分
2008 年		4 分		9 分		4 分	4 分	21 分
2009 年			4 分	9 分			4 分	17 分

（续表）

考点 年份	函数的性质与计算	对收敛性及极限性质的考查	无穷小的比较	极限的计算	渐近线	连续性	间断点	总计
2010 年				4 分	4 分		4 分	12 分
2011 年			4 分	10 分＋4 分＋10 分				28 分
2012 年		4 分		10 分＋4 分＋10 分	4 分			32 分
2013 年			4 分＋10 分	4 分＋11 分				29 分
2014 年			4 分	10 分＋4 分	4 分			22 分
2015 年			10 分				4 分	14 分
总计	6 分	22 分	82 分	200 分	30 分	17 分	50 分	407 分

概述：本章在考研中属于必考考点．每年都会有考查考题形式上：选择题、填空题、解答题均有涉及．总的来说，在考试中平均每年的分值（1996 年～2002 年的满分为 100 分，折合成满分 150 分之后再计算）约为 23 分．本章的考点分布有两个特点需要引起考生重视：一是考点分布比较集中，超过 50%以上的分值分布在极限的计算中；二是考点之间的关联比较明显：无穷小量的比较、渐近线的计算从本质上讲考查的都是极限的计算．所以，考生在复习本章时，极限的计算应该是绝对的核心，主要的复习任务就是掌握各类极限的常用计算方法．

历年真题分类精讲

考点一　函数的性质与运算

（一）解题核心要点

函数是高等数学的研究对象，函数的性质和运算是高等数学的基础内容，这一部分在考试中一般直接涉及的比较少，更多的是和后面的考点结合，作为解题的预备知识间接考查．在近二十年真题中，数学二出现过两道直接考查函数的试题，所涉及考点都是复合函数的计算，考生只需理解复合函数的基本概念，按照运算法则进行计算即可．

（二）历年真题精讲

1.（1997 年—3 分） 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]$ 为（　　）

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

【答案】 D

【思路分析】 题目考查函数的复合问题，分清内层函数的定义域与值域，要注意内层函数的值域又构成了外层函数的定义域．

【解析】 当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2>0$，则 $g[f(x)]=f(x)+2=x^2+2$；

当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=-x\leqslant 0$，则 $g[f(x)]=2-f(x)=2-(-x)=2+x$.

故 $g[f(x)]=\begin{cases}x^2+2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 因此应选 D.

2.（2001 年－3 分） 设 $f(x)=\begin{cases}1,|x|\leqslant 1,\\ 0,|x|>1,\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于（　　）

(A)0.　　　　(B)1.

(C)$\begin{cases}1,|x|\leqslant 1,\\ 0,|x|>1.\end{cases}$　　　　(D)$f(x)=\begin{cases}0,|x|\leqslant 1,\\ 1,|x|>1.\end{cases}$

【答案】 B

【思路分析】 按照复合函数的定义直接计算.

【解析】 因为 $f(x)=\begin{cases}1,|x|\leqslant 1,\\ 0,|x|>1,\end{cases}$ 所以在整个定义域内 $f(x)=0$ 或 $f(x)=1$，所以 $|f(x)|\leqslant 1$，于是 $f[f(x)]=1$，从而 $f\{f[f(x)]\}=f(1)=1$.

考点二　对收敛性及极限性质的考查

（一）解题核心要点

本考点主要考查极限收敛的条件及性质，常见的结论有：

极限的四则运算法则

收敛＋收敛＝收敛，收敛＋发散＝发散，发散＋发散＝?；

收敛×收敛＝收敛，收敛×发散＝$\begin{cases}\text{发散，收敛}\neq 0,\\ ?,\quad\text{收敛}=0,\end{cases}$ 发散×发散＝?

（问号表示结果不确定）.

夹逼定理

若存在自然数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，且有 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

单调有界收敛定理

单调递增有上界的数列必有极限；单调递减有下界的数列必有极限；单调无界的数列极限为 $+\infty$ 或 $-\infty$.

极限的保号性

有两个数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$：

若从某一项 N 开始，以后所有项都有 $x_n\geqslant y_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}y_n$；

若有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n>\lim\limits_{n\to\infty}y_n$，则从某一项 N 开始，以后所有项都有 $x_n>y_n$.

（二）历年真题精讲

3.（1998 年－3 分） 设数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则下列断言正确的是（　　）

(A) 若 $\{x_n\}$ 发散，则 $\{y_n\}$ 发散.　　　　(B) 若 $\{x_n\}$ 无界，则 $\{y_n\}$ 必有界.

(C) 若 $\{x_n\}$ 有界，则 $\{y_n\}$ 必为无穷小.　　(D) 若 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 为无穷小，则 $\{y_n\}$ 必为无穷小.

【答案】D

【思路分析】直接借助无穷小量的性质推导出正确选项或是举反例排除错误选项.

【解析】方法一：直接利用无穷小量的性质可以证明 D 是正确的.

由 $y_n = (x_n y_n) \cdot \dfrac{1}{x_n}$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = 0$ 可知 y_n 为两个无穷小之积，故 y_n 亦为无穷小，应选 D.

方法二：排除法.

选项 A 的反例：$x_n = n$，$y_n = \dfrac{1}{n^2}$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \dfrac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ 满足题设，但是 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ 不发散；

选项 B 的反例：$x_n = \begin{cases} 2k-1, & n = 2k-1, \\ 0, & n = 2k, \end{cases}$ $y_n = \begin{cases} 0, & n = 2k-1, \\ 2k, & n = 2k, \end{cases}$ $k = 1,2,\cdots$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$，但 y_n 不是有界数列；

选项 C 的反例：$x_n = \dfrac{1}{n}(n = 1,2,\cdots)$ 是有界数列，$y_n = 1(n = 1,2,\cdots)$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$，但 $\{y_n\}$ 不是无穷小；

排除掉 A,B,C，故选 D.

4. (1999 年－3 分)"对任意给定的 $\varepsilon \in (0, 1)$，总存在正整数 N，当 $n \geqslant N$ 时，恒有 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$"是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的(　　)

(A) 充分条件但非必要条件.　　(B) 必要条件但非充分条件.

(C) 充分必要条件.　　(D) 既非充分条件又非必要条件.

【答案】C

【思路分析】直接将该命题与数列极限的定义对比.

【解析】数列极限的精确定义是：对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，总存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时 $|x_n - a| < \varepsilon$，则称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a. 这里要抓住的关键是 ε 要能够任意小，才能使 $|x_n - a|$ 任意小.

将本题的说法改成：对任意 $\varepsilon_1 = 2\varepsilon \in (0,2) > 0$，总存在 $N_1 > 0$，使得当 $n \geqslant N > N_1$ 时，有 $|x_n - a| < 2\varepsilon = \varepsilon_1$，则称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a.

由于 $\varepsilon_1 \in (0,2)$ 可以任意小，所以 $|x_n - a|$ 能够任意小. 故两个说法是等价的.

5. (2003 年－4 分) 设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$，$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$，则必有(　　)

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立.　　(B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n c_n$ 不存在.　　(D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 不存在.

【答案】D

【思路分析】直接借助极限的性质进行推理得出正确选项或是举反例排除错误选项.

【解析】方法一：推理法.

由题设 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$，假设 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 存在并记为 A，则 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n c_n}{b_n} = A$，这与 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$ 矛盾，故假设不成立，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 不存在. 所以选项 D 正确.

方法二：排除法.

取 $a_n=\frac{1}{n}, b_n=\frac{n-1}{n}$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0, \lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，而 $a_1=1, b_1=0, a_1>b_1$，A 不正确；

取 $b_n=\frac{n-1}{n}, c_n=n-2$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1, \lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，而 $b_1=0>-1=c_1$，B 不正确；

取 $a_n=\frac{1}{n}, c_n=n-2$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0, \lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n=1$，C 不正确.

故选 D.

评 注

(1) 选项 A, B 容易和极限的保号性混淆，根据保号性：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n<\lim\limits_{n\to\infty}b_n$，所以存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有 $a_n<b_n$. 但要注意的是，这里 $a_n<b_n$ 只有对足够大的 $n(n>N)$ 才成立，无法保证对每一项都成立.

(2) 结合本题的推理过程和极限的四则运算法则，可以总结出如下结论：两个收敛的数列相乘一定是收敛的；收敛的数列和发散的数列相乘之后是否收敛取决于收敛的数列的极限值，如果该极限值不为零，则一定发散，如果该极限值为零，则有可能收敛也有可能发散. 同样的结论对函数极限也是成立的.

6. (2007 年－4 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶导数，且 $f''(x)>0$，令 $u_n=f(n)(n=1,2,\cdots)$，则下列结论正确的是(　　)

(A) 若 $u_1>u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛.　　(B) 若 $u_1>u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散.

(C) 若 $u_1<u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛.　　(D) 若 $u_1<u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散.

【答案】 D

【思路分析】 借助拉格朗日中值定理讨论.

【解析】 选项 A：设 $f(x)=-\ln x$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶导数，且 $f''(x)>0, u_1>u_2$，但 $\{u_n\}=\{-\ln n\}$ 发散，排除 A；

选项 B：设 $f(x)=\frac{1}{x}$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶导数，且 $f''(x)>0, u_1>u_2$，但 $\{u_n\}=\{\frac{1}{n}\}$ 收敛，排除 B；

选项 C：设 $f(x)=x^2$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶导数，且 $f''(x)>0, u_1<u_2$，但 $\{u_n\}=\{n^2\}$ 发散，排除 C；

选项 D：由拉格朗日中值定理，有

$$u_{n+1}-u_n=f(n+1)-f(n)=f'(\xi_n)(n+1-n)=f'(\xi_n),$$

其中 $\xi_n\in(n,n+1)(n=1,2,\cdots)$. 由 $f''(x)>0$ 知，$f'(x)$ 单调增加，故

$$f'(\xi_1)<f'(\xi_2)<\cdots<f'(\xi_n)<\cdots,$$

所以 $$u_{n+1}=u_1+\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1}-u_k)=u_1+\sum_{k=1}^{n}f'(\xi_k)>u_1+nf'(\xi_1)=u_1+n(u_2-u_1),$$

于是当 $u_2-u_1>0$ 时，推得 $\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}=+\infty$，故选 D.

7. (2008 年－4 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是(　　)

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.　　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛.　　(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛.

【答案】B

【思路分析】由题干的信息很容易联想到单调有界收敛定理，所以应该把讨论的焦点放在哪个选项能保证所给数列满足单调有界收敛定理的条件上.

【解析】因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，且 $\{x_n\}$ 单调. 所以 $\{f(x_n)\}$ 单调且有界. 故 $\{f(x_n)\}$ 一定存在极限，即 $\{f(x_n)\}$ 一定收敛.

注：本题也可以选取适当的特殊函数，采用排除法.

8.（2012 年一 4 分）设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的（　　）

(A) 充分必要条件.　　(B) 充分非必要条件.

(C) 必要非充分条件.　　(D) 既非充分也非必要条件.

名师讲解

【答案】B

【思路分析】运用单调有界收敛原理和极限的性质进行讨论.

【解析】由于 $a_n>0$，$\{S_n\}$ 是单调递增的，可知当数列 $\{S_n\}$ 有界时，$\{S_n\}$ 收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 是存在的. 此时有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim\limits_{n\to\infty}S_n-\lim\limits_{n\to\infty}S_{n-1}=0$，即 $\{a_n\}$ 收敛.

反之，$\{a_n\}$ 收敛，$\{S_n\}$ 却不一定有界. 例如，令 $a_n=1$，显然有 $\{a_n\}$ 收敛，但 $S_n=n$ 是无界的.

故数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分非必要条件，选 B.

考点三　无穷小量的比较

（一）解题核心要点

设在某极限过程 $x\to\square$ 中，函数 $\alpha(x)$，$\beta(x)$ 都为无穷小量，并且都不为 0：

如果 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称当 $x\to\square$ 时，$\alpha(x)$ 为 $\beta(x)$ 的高阶无穷小量，或 $\beta(x)$ 为 $\alpha(x)$ 的低阶无穷小量，记作 $\alpha(x)=o(\beta(x))$；

如果 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\neq0$，则称当 $x\to\square$ 时，$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同阶无穷小量；

在同阶无穷小量中，如果有 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称当 $x\to\square$ 时，$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等价无穷小量，记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

按照上述定义，要比较两个无穷小量，直接相除取极限即可.

（二）历年真题精讲

9.（1996 年一 3 分）设当 $x\to0$ 时，$\mathrm{e}^x-(ax^2+bx+1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小，则（　　）

(A) $a=\dfrac{1}{2},b=1$.　　(B) $a=1,b=1$.

(C) $a=-\dfrac{1}{2},b=-1$.　　(D) $a=-1,b=1$.

【答案】A

【思路分析】写出 e^x 的麦克劳林展开式，再进行无穷小的比较.

【解析】用带皮亚诺余项泰勒公式. 由

$$\mathrm{e}^x-(ax^2+bx+1)$$