中等專業學校教學用書

高等數學教程

下册

H. II. TAPACOB著　胥長辰譯
樓文林初校　許寶騄複校

商務印書館

中等專業學校教學用書

高等數學教程

下册

Н. П. 塔拉索夫著
胥長辰譯
樓文林初校
許寶騄複校

商務印書館

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико—теоретической литературы）出版的塔拉索夫（Н. П. Тарасов）著“中等技術學校高等數學教程”（Курс высшей математики для техникумов）1951年第七版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲中等技術學校教科書。

本書由鶴崗煤礦工業學校胥長辰翻譯，樓文林初校，並由北京大學許寶騄複校。

高　等　數　學　教　程

下　冊

胥　長　辰　譯

商　務　印　書　館　出　版

上海河南中路二一一號

〔上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號〕

新　華　書　店　總　經　售

商　務　印　書　館　印　刷　廠　印　刷

上海天通菴路一九〇號

（50857·2B）

1953年11月初版　1955年1月3版

版面字數111,000（1月第6次印）92,001—130,000

定價￥5,200

下 册 目 錄

高等數學教程

第七章　用導數研究函數

§ 73　函數的變化進程　設給定了某一函數 $y=f(x)$。大家知道，函數的圖形是一條曲線。這個曲線使我們對於函數隨着變元的變化而變化的進程有清晰的觀念。

假設圖 78 是這函數 $y=f(x)$ 的圖形。我們看出，曲線的某幾部分是上升的，某幾部分是下降的(順着横標增大方向來看)。曲線的上升與下降部分對應於函數的遞增與遞減區間。譬如說，圖 78 清楚地表明，在區間 (a, c_1)，(c_2, c_3)，(c_4, b) 內函數遞增，而在區間 (c_1, c_2)，(c_3, c_4) 內函數遞減。在點 M_1 和 M_3 處曲線升得比靠近這些點的曲線部分都高，而在點 M_2，M_4 處曲線降得比靠近點 M_2，M_4 的曲線部分都低。曲

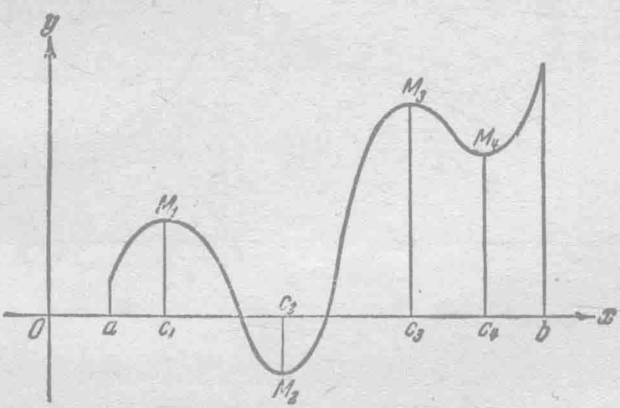

圖　78

線的這些最高的與最低的點對應於函數 $y=f(x)$ 的變元 x 的值 c_1，c_3，c_2，c_4，於此函數比靠近上述諸值的變元值相對應的函數值來說有最大的與最小的值。

函數的遞增和遞減，以及函數在各個部分內的最大值和最小值，是標誌函數的變化進程的特性的要素。在本章中，我們研究如何就已知函數決定它的變化進程的上述特徵。我們即將看到，這個問題可藉導數的概念獲得解決。

§ 74　函數在區間內的遞增與遞減

定義　如果在變元 x 的由值 a 到值 b $(a<b)$ 的變化區間內，函數 $y=f(x)$ 的值隨着 x 的增大而增大，則函數叫作在這個區間內遞增的。

同樣地，如果在由 a 到 b 的區間內，函數 $y=f(x)$ 的值隨着變元 x 的增大而減小，則函數叫作在這個區間內遞減的。

由定義可知，在區間 (a, b) 內遞增的函數的圖形，是順着橫標的增加方向而上升的曲線(圖 79)。

在區間 (a, b) 內遞減的函數的圖形，是順着橫標增大的方向而下降的曲線(圖 80)。

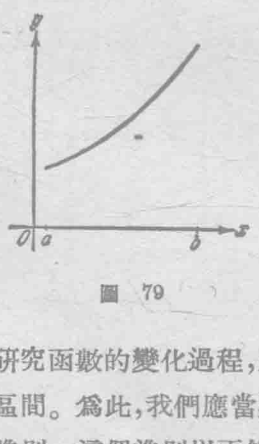

圖 79

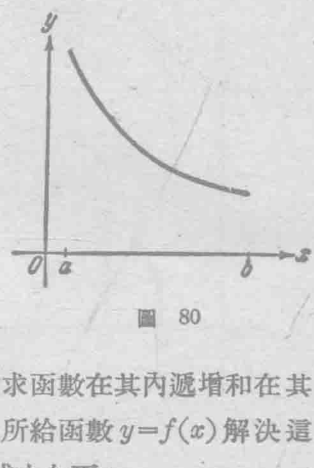

圖 80

要研究函數的變化過程，必須會求函數在其內遞增和在其內遞減的那些區間。爲此，我們應當建立就所給函數 $y=f(x)$ 解決這個問題的解析準則。這個準則以兩條定理述之如下：

定理(函數的遞增性的充分準則) 如果給定的函數的導數對於給定區間(a, b)內的一切x值都是正的,則該函數在此區間內遞增❶。

用幾何思考很容易看出這定理的正確性。我們記得,導數就是函數的圖形的切線的角係數,或函數的圖形的斜率。因此,當導數的符號爲正時,切線與軸Ox作成銳角,因而在區間(a, b)內切線保持向上傾斜,曲線本身亦遂共同上升(圖81)。

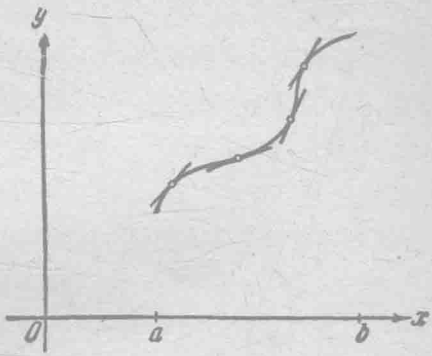

圖 81

定理(函數的遞減性的充分準則) 如果給定的函數的導數對於給定區間(a, b)內一切x值都是負的,則該函數在此區間內遞減。

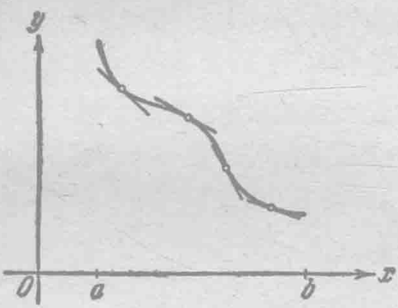

圖 82

當導數的符號在區間(a, b)內爲負時,函數的圖形的切線與軸Ox作成鈍角,因而切線向下傾斜,曲線本身亦遂共同下降(圖82)。

例 試求函數

$$y=x^3-3x^2+5$$

的遞增和遞減區間。

解 求出函數的導數:

$$y'=3x^2-6x\text{。}$$

現在必須確定對於變元x的哪些值導數爲正哪些值爲負。爲了簡單地解決這個問題,把多項式$3x^2-6x$分解成因子:

❶ 在解決這個問題時,我們只限於研究在區間內每點都有導數的函數。

$$y'=3x(x-2)。$$

從所得的導數形式很容易看出，對於所有 $x<0$ 的值，乘積 $3x(x-2)$ 是正的，因爲這時 x 與 $(x-2)$ 同號。當 x 爲正而小於 2 時，導數是負的；當 $x>2$ 時，它又變成正的了。所以函數在從 $-\infty$ 到 0 的區間內是遞增的，在從 0 到 2 的區間內是遞減的，在從 2 到 $+\infty$ 的區間內又是遞增的。圖 83 是這函數的圖形。

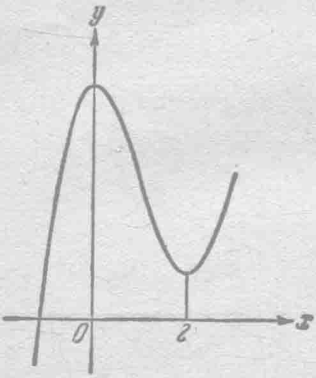

圖 83

§ 75 函數的極大與極小．函數的極值的求法 1. 關於求函數的遞增和遞減區間的問題，我們在前一節已經解決了。現在要講求函數 $y=f(x)$ 在何點(卽變元 x 的何值)比較着它在隣近點的值來說(見 §73)有最大值和最小值。

定義 如果函數 $y=f(x)$ 在點 $x=c$ 的值 $f(c)$，比它在附近各點的值都大，卽如果對於所有足夠靠近 c 的 x 值，不等式

$$f(c)>f(x)$$

都成立，則稱函數在點 $x=c$ 有一極大。

如果函數 $y=f(x)$ 在點 $x=c$ 的值 $f(c)$，比它在附近各點的值都小，卽如果對於所有足夠靠近 c 的 x 值，不等式

$$f(c)<f(x)$$

都成立，則稱函數在該點有一極小。

圖 78 給上述定義一個明晰的觀念。例如在點 c_1，該圖所表示的函數有一極大，因爲在區間 (a, c_2) 內所有 $x\neq c_1$ 的值都滿足不等式

$$f(c_1)>f(x)。$$

在點 c_3 函數也有一極大，在點 c_2 和 c_4 則有極小。

應該注意，在函數有極大和極小的點的函數值，不一定是函數的最

大值和最小值。圖 78 表明,就線段 $[a, b]$ 來說,函數並不是在極大值點,而是在 $x=b$,即在線段 $[a, b]$ 的終點,達到其最大值。此外,在點 $x=c_4$ 函數有一極小,但在這點的函數值 $f(c_4)$ 大於極大 $f(c_1)$。因此,上述定義中的函數的極大和極小應該叫作相對極大和相對極小:在極大點和極小點,函數只是比較其"附近"值來說有最大值和最小值。

函數的極大和極小有一個共同的名稱,叫作"極值"。

2. 現在我們建立求函數的極值的法則。

我們限於研究這樣的函數 $y=f(x)$ 它在區間 (a, b) 內連續,並且在此區間內有連續導數 $f'(x)$。

假設導數 $f'(x)$ 對於區間 (a, b) 內任何 x 都不等於零。這時它必在全區間內保持同一符號。事實上,如果,譬如說,當 $x=x_1$ 時導數是正的,而當 $x=x_2$ 時是負的,則由於導數的連續性,在 x_1 和 x_2 之間至少必有一個值 $x=x_0$ 使它為零(見 §49 定理 2)。但這是不可能的,因為 x_0 是在區間 (a, b) 以內,而我們已經假設在全區間 (a, b) 內導數永不為零。如果導數 $f'(x)$ 的符號保持不變,則函數 $y=f(x)$ 在區間 (a, b) 內或是永遠遞增或是永遠遞減(見 §74),因此沒有極值。

所以,如果函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 內有極值,則只有在導數 $f'(x)$ 變成零的這些點上才行。

現在假設在區間 (a, b) 內,$f'(x)$ 在某些點等於零,但這種點一共只有有限多個,設為 $c_1<c_2<c_3\cdots<c_k$ 諸點。那麼,按照以上的證明,在每個區間 (a, c_1), (c_1, c_2), $\cdots(c_k, b)$ 內,導數 $f'(x)$ 的符號不變。從 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 諸點中任取其一,例如 c_1。

假設在區間 (a, c) 內導數 $f'(x)$ 是正的,而在區間 (c_1, c_2) 內是負的。則在第一個區間內函數 $f(x)$ 遞增,而在第二個區間內遞減,因而在 $x=c_1$ 函數比它在區間 (a, c_1) 和 (c_1, c_2) 內的值來說有最大值。換言之,在點 $x=c_1$ 函數有一極大。反之,如果在區間 (a, c_1) 內導數 $f'(x)$ 是負的,而在區間 (c_1, c_2) 內是正的,則在第一個區間內函數遞減,而在第二

個區間內遞增,因而函數在點 $x=c_1$ 有一極小。最後,假設 $f'(x)$ 在區間 (a, c_1) 和 (c_1, c_2) 內有同號,例如(+)號。這時兩個區間都是函數 $f(x)$ 的遞增區間,亦即函數在全區間 (a, c_2) 內遞增,因而在 $x=c_1$ 既無極大又無極小。顯然,如果 $f'(x)$ 在區間 (a, c_1) 和 (c_1, c_2) 內都有(−)號,它在 $x=c_1$ 也沒有極值。

關於在其餘各點

$$c_2, c_3, \cdots, c_k$$

的函數的極值問題,可用同樣的推理解決。

所得結果很容易幾何地說明。

函數 $f(x)$ 的極值點相當於作為其圖形的曲線的"頂點"。顯然,在頂點曲線的切線與軸 Ox 平行(圖 84 的 M_2 和 M_4 兩點)。因此,根據導數的幾何意義,在函數有極值的點,導數 $f'(x)=0$。

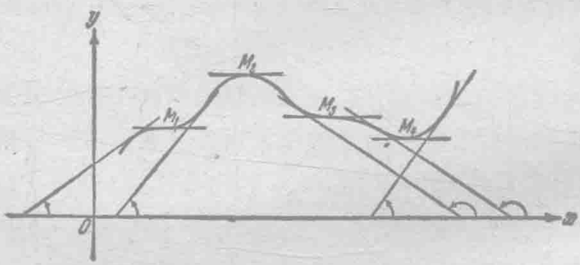

圖 84

反之,如果 $f'(x)$ 於某一 x 值變成了零,則在相應的點處,曲線的切線與軸 Ox 平行。然而如果經過這個 x 值時導數的符號不變,則在曲線上相應點的左方與右方,切線的斜角或則恆為銳角或則恆為鈍角,從而切線保持向上傾斜或向下傾斜。因此,曲線或則經常上升或則經常下降,而切線在此平行於軸 Ox 的點就並不是曲線的頂點,而是"拐點"(圖 84 曲線的 M_1 和 M_3 兩點)。所以,函數在這種情況下沒有極值。如果導數的符號當通過所論的 x 值時起了變化,則曲線便從上升變成下降,

或從下降變成上升，而切線在此與軸 Ox 平行的點是曲線的"頂點"(圖 84 的 M_2, M_4 兩點)。所以，函數在這種情況下有極值。

3. 前段所作的推理，可以總結成求區間(a, b)內使函數 $f(x)$ 有極值的那些 x 值的法則，述之如下：

爲要求出對於 x 的何值函數 $f(x)$有極值，必須：

1) 算出導數 $f'(x)$;

2) 求在區間(a, b)內使 $f'(x)$ 變成零的 x 值；設這些值是：

$$c_1, c_2, \cdots, c_k;$$

3) 確定導數在(a, c_1), (c_1, c_2), $\cdots$, (c_k, b)各區間內的符號。此時便解決了導數在通過 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 各點時是否變號，又如變號，則是由(+)到(−)還是由(−)到(+)的問題。如果導數的符號是由(+)變(−)，則函數在相應的點有一極大。如果導數的符號是由(−)變(+)，則函數在相應的點有一極小。如果導數的符號不變，則函數在相應的點沒有極值。

此時注意，因爲在每個分區間內導數的符號不變。所以，爲了決定導數在每個分區間內的符號，只消知道導數在該區間內任何一個 x 值處的符號。

我們舉例說明上述法則。

例1　試求使函數

$$y=2x^3-3x^2-12x+21$$

有極值的變元的值。

解　1) 算出函數的導數：

$$y'=6x^2-6x-12=6(x^2-x-2)。$$

2) 求使導數等於零的 x 值。爲此，令導數等於零，得方程

$$x^2-x-2=0。$$

這個方程的根是 -1 和 2。

爲了此後研究導數方便起見，把它分解成因子：

$$y'=6(x+1)(x-2)。$$

3)函數是在區間$(-\infty,+\infty)$內被考察的。使導數變成零的變元值-1和2將整個的區間$(-\infty,+\infty)$分成三個部分：

$$(-\infty,\ -1),\quad (-1,2),\quad (2,\ +\infty)。$$

決定因子$(x+1)$和$(x-2)$在$x=-2$, $x=0$, $x=3$時的符號，以求導數在三個分區間內的符號：

在區間$(-\infty,\ -1)$內，$y'=(-)(-)=+$，

在區間$(-1,\ 2)$內，$y'=(+)(-)=-$，

在區間$(2,\ +\infty)$內，$y'=(+)+)=+$。

由此可見，當通過點$x=-1$時，導數的符號由$(+)$變$(-)$，當通過點$x=2$時，導數的符號由$(-)$變$(+)$。所以，在點$x=-1$函數有一極大，而在點$x=2$函數有一極小。

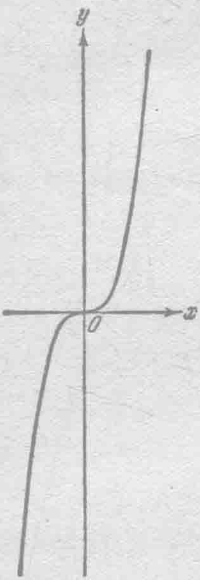

圖 85

例 2 試討論函數

$$y=x^3$$

的極大和極小。

解 1) $y'=3x^2$。

2) $3x^2=0$

由此，$x=0$。

3) 當$x<0$和$x>0$時，導數保持為正。因此，通過點$x=0$時導數的符號不變，可見當$x=0$時函數沒有極值。函數$y=x^3$的圖形(圖85)給所得的結果一個很清楚的觀念。

例 3 在一回路中(如圖86所示)，按照歐姆定律，電流強度I確定於公式

$$I=\frac{E}{R+r},$$

其中r是內電阻，而R是外電阻。大家知道，通過負荷R的電功率P

由公式

$$P=\frac{E^2R}{(R+r)^2}$$

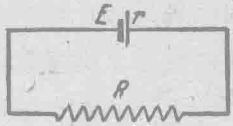

圖 86

表達。試求電功率最大時 R 的值。

解　在這裏必須研究自變量 R 的函數 P 的極大和極小。

根據所立的法則，得：

1) $P'=E^2\frac{(R+r)^2-2(R+r)R}{(R+r)^4}=E^2\cdot\frac{r-R}{(R+r)^3}$。

2) $r-R=0$，因此 $R=r$。

3) 當 $R<r$ 時，導數 $P'>0$。當 $R>r$ 時，導數 $P'<0$。

所以，當 $R=r$ 時，卽在回路中外電阻等於內電阻時，電功率 P 最大。

4. 在實際遇到的問題中，函數通常並非由現成的表達式給出。在這種情況下，須根據問題的條件形成函數關係式，由此再求函數的極大或極小。

我們往往能夠根據問題本身的性質判斷哪些使導數成零的變元值致成函數的極大，又哪些致成極小。這就省得我們在求得的變元值的左右決定導數的符號。

問題 1　要從邊長等於 a 的一塊正方形厚紙片，做一個無蓋的盒子，就必須在它的四個角上，各切去一小正方塊，然後將它凸出的部分上折成盒（圖 87）。爲要使得的盒子容積最大，所割去的小正方塊的邊長應是多少？

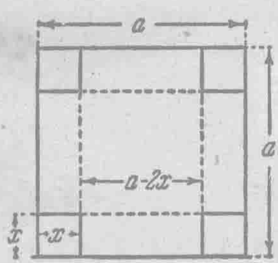

圖 87

解　用 x 表示切下去的小正方塊的邊長。這個 x 值也就是盒的高。這時盒底的長爲 $a-2x$，它的容積 $V=(a-2x)^2x=a^2x-$
$-4ax^2+4x^3$。

我們必須求函數 V 最大時的 x 值，也就是說，必須研究我們所作成的函數 V 的極大和極小。

1) $V'=a^2-8ax+12x^2$。

2) $a^2-8ax+12x^2=0$，由此得：$x_1=\frac{a}{2}$ 和 $x_2=\frac{a}{6}$。

我們無須作進一步的研究就可以斷定在 $x=\frac{a}{6}$ 時容積最大，因爲如果切去每邊長爲 $\frac{a}{2}$ 的小正方塊，則這塊厚紙就沒有剩餘，小盒的容積就等於零。

因此，被切去的小正方塊的邊長，必須等於所給的厚紙片的邊長的六分之一。

當 $x=\frac{a}{6}$ 時，容積 $V=\frac{2a^3}{27}$。

問題 2　一矩形樑的強度與它的寬和高的平方之乘積成正比。試求能從直徑爲 a 厘米的圓柱形的木料製出的最堅固的樑的尺寸。

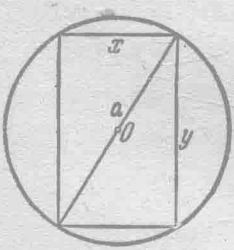

圖 88

解　木料和樑的截面如圖 88 所示。用 x 表示樑的寬，y 表示樑的高，這時便得：$x^2+y^2=$ $=a^2$。樑的強度 S 確定於關係式：

$$S=kxy^2=kx(a^2-x^2)=ka^2x-kx^3$$

其中 k 是比例係數。

這樣，我們造成了需要研究其極大和極小的函數。

1) $S'=k(a^2-3x^2)$。

2) $k(a^2-3x^2)=0$，由此 $x_1=\frac{a}{\sqrt{3}}$ 和 $x_2=-\frac{a}{\sqrt{3}}$。

因爲在我們的問題裏負解沒有意義，所以我們不必理會第二個根。

因爲樑的強度不能無限地大，所以一定有一極大。因此，我們所得的根 $x_1=\frac{a}{\sqrt{3}}$ 是函數 S 達到極大時的值。

當 $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$ 厘米時，高 $y=a\sqrt{\frac{2}{3}}$ 厘米，這就是最堅固的樑的尺寸。

問題 3　試求內接於半徑爲 r 的球體內容積最大的圓錐體的高。

解　用 x 表示圓錐體的底的半徑，並用 y 表示它的高(圖 89)，於是圓錐體的容積 V 等於：

$$V=\frac{1}{3}\pi x^2y。$$

從圖 89 得：$x^2=BC\cdot CD=y(2r-y)$。因此函數 V 可用變量 y 表示如下：

$$V=\frac{1}{3}\pi y^2(2r-y)。$$

研究這個函數的極大和極小，便得所求的高 $y=\frac{4}{3}r$。

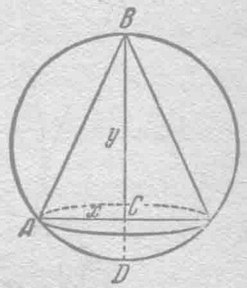

圖 89

5. 注意，我們只對於適合下列條件的函數研究了關於極值的問題：

1) 在所考察的區間內函數有連續導數❶；

2) 在這個區間內，只有有限個點使導數變成零。

在大多數實際問題中，我們所遇到的正是這樣的函數。

6. 爲了更全面地闡明問題，我們現在來說明，在所考察的區間內爲連續的函數 $f(x)$，也可以在導數並不存在的點上有極值。

函數 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ 就是這種情況的一例。不難判斷，在點 $x=0$ 這個函數有一極小，而在此點導數 $f'(x)$ 卻不存在。事實上，$f(0)=0$，而當 $x\neq0$ 時，不論 $x<0$ 或 $x>0$，$\sqrt[3]{x^2}$ 都是正量。

所以，對於 $x\neq0$ 的值，$f(0)<f(x)$，因而在點 $x=0$ 函數有一極小。但是 $f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$，由此可見，當 $x=0$ 時，導數 $f'(x)$ 不存在：當 $x=0$ 時，表達式 $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ 沒有意義。

❶ 根據 § 55 所述定理，函數本身在這區間內是連續的。

當 $x\to 0$ 時，$\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\to\infty$。這也就是説，表示這函數的圖形的曲線在點 O 有縱切線❶。函數 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 的圖形如圖 90 所示。

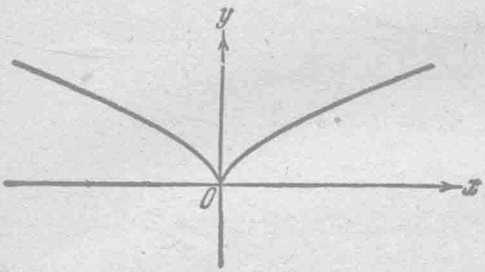

圖 90

在推演求變元 x 的值以使函數 $f(x)$ 有極值的法則時，我們假定了導數 $f'(x)$ 在所論區間 (a,b) 內連續，並且僅在有限個點上成零。不難肯定，第二段中的推理可以不加改動而完全適用於下述更廣泛的情況：1) 在區間 (a,b) 內連續的函數 $f(x)$ 有一導數 $f'(x)$，它在有限個點變成零或不存在；2) 除了在其不存在的點而外，導數處處連續。

在此種更廣泛的情況下，於算出導數之後，不僅必須求使導數變成零的 x 值，還要求出導數不存在時的 x 值。然後必須在導數的符號的變化上考察每個這樣得到的 x 值。

函數 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ 的導數 $f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$，當經過 O 點時，其符號由 $(-)$ 變 $(+)$。因此我們知道，當 $x=0$ 時，函數有一極小。

現在研究函數 $\varphi(x)=\sqrt[3]{x}$。計算它的導數 $\varphi'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$。於是看到，當 $x=0$ 時，導數 $\varphi'(x)$ 不存在。但是經過 $x=0$ 時它不變號：當 $x<0$ 或 $x>0$ 時，$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}>0$。根據求極值點的法則，可知當 $x=0$ 時，函數既無極大也無極小。這也可由直接研究函數 $\varphi(x)$ 本身加以證實：值 $\varphi(0)=0$ 與附近的值比較起來既不最大也不最小，因爲差 $\varphi(x)-\varphi(0)=\sqrt[3]{x}$ 當 $x<0$ 時是負量，當 $x>0$ 時是正量。

因爲 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=+\infty$，所以函數 $y=\sqrt[3]{x}$ 的圖形在 $(0,0)$ 點有縱切線(圖 91)。

註 在 § 55 我們曾經説過，在某點上連續的函數在該點未必有導數。剛才所研究的函數就是這個事實的例證。

---

❶ 更精確地説：若 x 保持爲正，則 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}=+\infty$；對於 $x<0$，則 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}=$ $=-\infty$。

可是不論在哪種情況下，切線對於 Ox 軸的斜角總是趨向 $\frac{\pi}{2}$：在第一種情況下，它是從三角圓的第一象限那邊趨向 $\frac{\pi}{2}$ 的，而在第二種情況下，是從第二象限那邊趨向的。所以，在點 $(0,0)$ 上，曲線有唯一的縱切線。