不确定系统的稳定性分析与控制

莫立坡 著

中国原子能出版社

不确定系统的稳定性分析与控制

莫立坡　著

中国原子能出版社

图书在版编目(CIP)数据

不确定系统的稳定性分析与控制 / 莫立坡著.
—北京：中国原子能出版社, 2012.8
ISBN 978-7-5022-5655-5
Ⅰ.①不… Ⅱ.①莫… Ⅲ.①不确定系统－稳定性－
研究 Ⅳ.①N94
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 193380 号

内 容 简 介

本书主要介绍了不确定非线性系统和不确定多智能体网络系统的鲁棒控制理论及其最新进展，具体内容包括四个部分。第一部分为第一章，主要介绍相关的数学基础知识；第二部分包括第二章至第四章，主要介绍不确定非线性系统的鲁棒镇定和鲁棒 H_∞ 控制问题、多输入凸多面体系统的鲁棒控制问题、以及非线性奇异系统的鲁棒控制问题；第三部分为第五章，主要介绍不确定非线性系统的有限时间 H_∞ 控制问题，包括有限时间干扰抑制问题和有限时间 H_∞ 逆最优控制问题；第四部分为第六章，主要介绍不确定多智能体网络的 H_∞ 一致性问题、保代价最优控制问题。

本书可以作为应用数学、运筹学与控制论等相关专业的科研工作者、工程技术人员、高等学校教师和研究生的参考书。

不确定系统的稳定性分析与控制

出版发行 中国原子能出版社（北京市海淀区阜成路 43 号 100048）
责任编辑 张 梅 侯茸方
责任校对 冯莲凤
责任印制 丁怀兰 潘玉玲
印　　刷 中国文联印刷厂
经　　销 全国新华书店
开　　本 787 mm×1092 mm 1/16
印　　张 9 **字　　数** 200 千字
版　　次 2012 年 8 月第 1 版 2012 年 8 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5022-5655-5 **定　　价** 25.00 元

网址：http://www.aep.com.cn　　E-mail: atomep123@126.com
发行电话：010-68452845

前　言

系统的数学模型是控制系统设计的基础. 系统模型与它们所表示的物理系统之间的关系是错综复杂的. 系统模型反映了从输入到输出的关系, 模型的优劣由其响应同真实物理系统的响应间的吻合程度所决定. 由于任何模型都不可能完全真实地反映实际系统, 因此，在此基础上所进行的控制协议的设计也就不可能完全准确. 系统模型和真实系统间必然存在某种差别和误差, 即不确定性. 实际上, 在现实生活中, 不确定性也是普遍存在的. 正是这种不确定性的存在, 使人类的各种社会活动更加具有挑战性, 也使得人生更加精彩. 如果实际生活中不存在不确定性, 那么人们的社会生活将变得索然无味. 但是对于实际工程技术而言, 这种不确定性的存在一般是不允许的. 工业生产的产品要求精确地满足某种性能指标, 并且这种性能指标一般是不允许在含有不确定性因素的意义下实现的. 对于控制系统而言, 理想的情况是设计出来的控制协议能够使闭环系统的性能能够准确地达到预期的设计要求, 但这对实际控制系统来讲几乎是不可能实现的. 因为自动控制系统一般由被控对象和控制器两部分组成. 从控制的角度来讲, 设计者能够自由支配的只有控制器, 而被控对象中存在的不确定性因素是设计者无法通过建立精确的数学模型反映的. 这意味着不确定性是自动控制系统的设计者所必须面对的一个挑战.

实际的控制系统都或多或少存在某种非线性特性. 线性数学模型一般都是被控对象在某一平衡点附近的动态品质的近似描述, 当这种近似描述的误差超出允许范围时, 必须采用非线性数学模型来描述被控对象. 并且基于线性的近似模型所得出的结论, 也不能完全代表非线性系统的真正特性, 甚至有些结论是完全不同的. 因此, 研究非线性系统的控制问题是非常必要的. 结合上系统模型的不确定性, 便可以得到系统与控制领域的一个很重要的课题, 即, 在具有非线性特性的被控对象存在某种不确定性的前提下, 如何设计控制律使得闭环系统尽可能接近所期望的设计指标. 当然, 对于一个非线性被控对象而言, 由于采用的控制器不同, 闭环系统的性能相对于不确定性因素的强健的程度是不一样的. 一般来说, 如果一个系统的性能, 比如稳定性、干扰抑制性能等, 对于系统中存在的不确定性不敏感, 则称该系统具有相应的鲁棒性.

近些年, 由于实际的工程需要, 不确定非线性系统的鲁棒控制问题都得到了长足的发展, 并且鲁棒控制的思想已经渗透到了各个控制领域, 比如, 系统的有限时间镇定问题, 复杂多智能体网络的一致性问题等等. 但是, 不确定非线性系统的鲁棒控制及其应用中还存在大量

的问题没有解决, 相信这一古老而年轻的方向必将吸引更多研究者的加入.

本书以鲁棒镇定和鲁棒干扰抑制问题为主线, 重点介绍不确定非线性系统的鲁棒镇定和鲁棒H_∞控制问题, 多输入凸多面体系统的鲁棒控制问题, 非线性奇异系统的鲁棒控制问题, 不确定非线性系统的有限时间控制问题, 包括有限时间干扰抑制问题和有限时间逆最优控制问题, 以及不确定复杂多智能体网络的H_∞一致性问题, 保代价最优控制问题等.

在完成本书的过程中, 先后得到了北京市属高校科技创新平台项目(项目批准号:201098), 国家自然科学基金项目数学天元专项基金(项目批准号: 11126210), 北京市属高校人才强教计划项目(项目批准号: 201106206)和北京工商大学青年教师科研启动基金项目(项目批准号: QNJJ2011-34)的资助. 作者在此对北京市教委, 国家自然科学基金委员会和北京工商大学科技处的支持深表谢意. 本书的很多成果是在我读博期间完成的, 感谢我的导师北京航空航天大学数学与系统科学学院的郑志明教授在我攻读博士学位期间对我的培养和帮助, 感谢贾英民教授在我读博期间给予我学术上的指导和帮助, 感谢北航数学学院的所有教过我的老师, 是他们的思想一直激励着我向前. 感谢林鹏, 张文广等博士同学在读博期间给予我的帮助. 感谢北京工商大学理学院院长曹显兵教授在我进入北工商工作两年来对我的关心和帮助, 并且资助我出版本书. 感谢北京工商大学数学系主任马玉兰教授为我提供本书的TEX模板, 这为本书的出版节省了很多时间. 感谢北京工商大学数学系马玉兰老师, 杨益民老师, 李晋明老师, 沙峰老师, 周艳杰老师, 熊令纯老师, 王家赠老师, 张艳慧老师, 李裕梅老师, 季语老师等同事对我的关心和帮助, 与他们一起共事, 使我感觉到身心愉悦. 也特别感谢中国原子能出版社的张梅老师和侯茸方老师在我完成书稿的过程中给予我的帮助. 最后, 衷心地感谢我的父母多年来对我的培养教育, 并一直供我读书到近三十岁, 感谢我的妻子吴蕊在结婚两年多来对我默默的支持和无怨无悔的帮助.

由于作者水平有限, 书中肯定存在不少错误和不足之处, 敬请广大读者及相关领域的专家给予批评指正.

2012年6月

于北京良乡大学城

目　录

第一章　数学基础

本章主要介绍为理解随后章节所需要的一些数学基础知识, 主要包括向量范数, 函数矩阵的微积分, 矩阵的Kronecker积, 线性矩阵不等式, 以及非线性系统的稳定性和有限时间稳定性等基本概念. 这些内容可以在许多现有的教科书中找到[1−7].

§1.1　向量, 矩阵和函数的范数

§1.1.1　向量的范数

定义1.1　设V是$\mathbb{F}$上的向量空间. 称V上的实值函数$\|\cdot\|$是V上的范数, 如果其满足如下三个条件:

(1)　$\|x\| \geq 0, \forall x \in V, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(2)　$\|kx\| = \|k\|\|x\|, \forall k \in \mathbb{F}, x \in V$;

(3)　$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in V$.

由该定义可知, 向量的范数是定义在向量空间V上的一个满足上述三个条件的非负实函数, 只要满足上述三个条件, 任何实函数都可以成为向量的范数. 例如$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}}$, $\forall x = [x_1, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{F}^n$; $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|$ 都是V上的范数, 分别称为$P-$范数和$\infty-$范数.

定理1.1(范数等价性定理)　设V是$\mathbb{F}$上的有限维线性空间, $\|\cdot\|_a$和$\|\cdot\|_b$是V上的两个范数, 则存在正常数c_m, c_M使得

$$c_m\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq c_M\|x\|_a, \ \forall x \in V.$$

§1.1.2　矩阵的范数

定义1.2　设A 为是实矩阵空间$\mathbf{R}^{n\times m}$ 的实矩阵. 按某一对应规则在$\mathbf{R}^{n\times m}$ 上定义一个实值函数, 记作$\|A\|$. 称实函数$\|A\|$是矩阵A 的范数, 如果该函数满足如下条件:

(1)　非负性, 即$\|A\| \geq 0$, $\forall A \in \mathbf{R}^{n\times m}$; $\|A\| = 0$ 当且仅当$A = 0$.

(2)　齐次性, 即$\|kA\| = \mathrm{k}\|A\|, \forall k \in \mathbf{R}, A \in \mathbf{R}^{n\times m}$.

(3)　三角不等式, 即$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|, \forall A, B \in \mathbf{R}^{n\times m}$.

(4)　相容性, 即当矩阵乘积AB有意义时, 有$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

常见的几种矩阵范数定义如下:

(1) (m_1–范数) $\|A\|_{m_1} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\|a_{ij}\|$, $\forall A \in \mathbf{R}^{n\times m}$;

(2) (m_∞–范数) $\|A\|_{m_\infty} = \max_{i,j}\|a_{ij}\|$, $\forall A \in \mathbf{R}^{n\times m}$;

(3) (m_2–范数) $\|A\|_{m_2} = (\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\|a_{ij}\|^2)^{\frac{1}{2}}$, $\forall A \in \mathbf{R}^{n\times m}$;

(4) (2–范数) $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)}$, $\forall A \in \mathbf{R}^{n\times m}$, 其中$\lambda_{\max}(\cdot)$表示矩阵的最大特征值;

(5) (∞–范数) $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n}\|a_{ij}\|$, $\forall A \in \mathbf{R}^{n\times m}$;

(6) (1–范数) $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{m}\|a_{ij}\|$, $\forall A \in \mathbf{R}^{n\times m}$.

§1.1.3 函数的范数

定义1.3 设F 是$\mathbf{R}$ 上的一个函数空间, 如果函数$\|\cdot\|: F \to \mathbf{R}^+$ 满足下述条件:

(1) 非负性, 即$\|f\| \geq 0, \forall f \in F$; $\|f\| = 0$ 当且仅当$f = 0$ 几乎处处成立.

(2) 齐次性, 即$\|kf\| = \mathbf{k}\|f\|, \forall k \in \mathbf{R}, f \in F$.

(3) 三角不等式, 即$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|, \forall f, g \in F$.

则称实函数$\|\cdot\|$为F 上的一个范数.

§1.2 函数矩阵的微积分

§1.2.1 函数矩阵对单变量的导数

定义1.4 若函数矩阵$A(t) = [a_{ij}(t)]_{m\times n}$, 若对任意的$1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ 都有$a_{ij}(t)$ 在$t = t_0$ 处可导, 称$A(t)$ 在$t = t_0$处可导, 并称

$$\begin{bmatrix} \dot{a}_{11}(t_0) & \dot{a}_{12}(t_0) & \cdots & \dot{a}_{1n}(t_0) \\ \dot{a}_{21}(t_0) & \dot{a}_{22}(t_0) & \cdots & \dot{a}_{2n}(t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{a}_{m1}(t_0) & \dot{a}_{m2}(t_0) & \cdots & \dot{a}_{mn}(t_0) \end{bmatrix}$$

为$A(t)$在t_0处的导数, 记作$A'(t_0)$.

定义1.5 若函数矩阵$A(t)$的所有元素均在区间I上可导, 则称$A(t)$在区间I上可导.

类似于标量函数, 函数矩阵具有如下性质:

若函数矩阵$A(t)$, $B(t)$均可导, k为纯量, 则

(1) $[A(t) \pm B(t)]' = A'(t) \pm B'(t)$;

(2) $[kA(t)]' = kA'(t)$;

(3) $[A(t)B(t)]' = A'(t)B(t) + A(t)B'(t)$.

同样, 还可以证明函数矩阵亦满足复合函数的求导公式.

§1.2.2 函数矩阵的积分

定义1.6 若函数矩阵$A(t)=[a_{ij}(t)]_{m\times n}$, 若对任意的$1\le i\le m$, $1\le j\le n$ 都有$a_{ij}(t)$在$[a,b]$ 上可积, 称$A(t)$ 在$[a,b]$上可积, 并称

$$\begin{bmatrix} \int_a^b a_{11}(t)dt & \int_a^b a_{12}(t)dt & \cdots & \int_a^b a_{1n}(t)dt \\ \int_a^b a_{21}(t)dt & \int_a^b a_{22}(t)dt & \cdots & \int_a^b a_{2n}(t)dt \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^b a_{m1}(t)dt & \int_a^b a_{m2}(t)dt & \cdots & \int_a^b a_{mn}(t)dt \end{bmatrix}$$

为$A(t)$在$[a,b]$上的积分, 记作$\int_a^b A(t)dt$.

类似于标量函数, 函数矩阵具有如下性质:

若函数矩阵$A(t),B(t)$在$[a,b]$上可积, k为纯量, 则

(1) $\int_a^b[A(t)\pm B(t)]dt=\int_1^b A(t)dt\pm\int_a^b B(t)dt$;

(2) $\int_a^b[kA(t)]dt=k\int_a^b A(t)dt$;

同样可以证明, 函数矩阵的积分具有像一元函数那样的牛顿-莱布尼茨公式.

§1.3 矩阵的Kronecker积和线性矩阵不等式

§1.3.1 矩阵的Kronecker积

定义1.7 设$A=[a_{ij}]\in\mathbf{C}^{m\times n}, B=[b_{ij}]\in\mathbf{C}^{p\times q}$, 称$mp\times nq$矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

为矩阵A与B的Kronecker积, 记作$A\otimes B$.

利用该定义, 容易证明矩阵的Kronecker积具有如下的性质:

定理1.2 设A,A_1,A_2,B,B_1,B_2,C和D是具有适当维数的复矩阵, 则

(1) $(A_1+A_2)\otimes B=A_1\otimes B+A_2\otimes B, A\otimes(B_1+B_2)=A\otimes B_1+A\otimes B_2$;

(2) $(aA)\otimes B=a(A\otimes B)=A\otimes(aB),\forall a\in\mathbf{C}$;

(3) $(A\otimes B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}\otimes B^{\mathrm{T}},\overline{A\otimes B}=\overline{A}\otimes\overline{B}$;

(4) $A\otimes B=0\Rightarrow A=0$或$B=0$;

(5) $(A\otimes B)(C\otimes D)=AC\otimes BD$.

定理1.3 设$A\in\mathbf{C}^{n\times n},B\in\mathbf{C}^{m\times m}$, 若$A,B$可逆, 则$A\otimes B$可逆, 且$(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1}$.

定理1.4 设$A\in\mathbf{C}^{n\times n},B\in\mathbf{C}^{m\times m}$, 若$\mathrm{rank}A=r$, $\mathrm{rank}B=s$, 则$\mathrm{rank}(A\otimes B)=rs$.

定理1.5 设$A\in\mathbf{C}^{n\times n},B\in\mathbf{C}^{m\times m}$, 则$\mathrm{tr}(A\otimes B)=(\mathrm{tr}A)(\mathrm{tr}B)$.

定理1.6 设$A\in\mathbf{C}^{n\times n},B\in\mathbf{C}^{m\times m}$, 则$A\otimes B$的特征值是矩阵$A$与$B$的特征值的乘积.

§1.3.2 线性矩阵不等式

定义1.8 称具有形式$F(x)=F_0+x_1F_1+\cdots+x_mF_m<0$的表达式为线性矩阵不等式(LMI), 其中$x_1,\cdots,x_m$是实变量, $F_i^{\mathrm{T}}=F_i,i=1,\cdots m$是实对称矩阵, 式中的“$<$”表示矩阵负定. 称变量$x=[x_1,\cdots,m]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^m$为决策变量.

对于给定的实对称矩阵$F_0,F_1,\cdots,F_m$, 容易证明集合$\{x:F(x)<0\}$是凸集. 因而, 形如线性矩阵不等式的约束条件是对变量的一个凸约束. 这个性质可以使用解决凸优化的方法来求解线性矩阵不等式. 目前, 很多系统与控制中的问题都可以转化为求解线性矩阵不等式, 并且可以使用MATLAB中的LMI工具箱进行求解.

定理1.7 (Schur补引理) 对于给定的实对称矩阵$S=\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12}\\ S_{21} & S_{22}\end{bmatrix}$, 其中$S_{11}$是方阵, 则以下三个命题等价:

(1) $S<0$;

(2) $S_{11}<0,S_{22}-S_{12}^{\mathrm{T}}S_{11}^{-1}S_{12}<0$;

(3) $S_{22}<0,S_{11}-S_{12}S_{22}^{-1}S_{12}^{\mathrm{T}}<0$.

§1.4 非线性系统的稳定性和有限时间稳定性

§1.4.1 稳定性

考虑由微分方程

$$\dot{x}=f(x,t) \tag{1.4.1}$$

描述的非线性系统, 其中$x\in\mathbf{R}^n$ 为状态变量, $t\in\mathbf{R}$ 为时间参数, 且$f(t,0)=0,\quad\forall t\in\mathbf{R}$.

定义1.9 考虑系统(1.4.1), 如果对于任意给定的$\epsilon>0$ 及初始时刻$t_0\geq0$, 存在一个常数$\delta>0$, 使得对任意满足$\|x_0\|<\delta$ 的初始条件x_0, 方程(1.4.1) 的解$\phi(t;t_0,x_0)$ 满足

$$\|\phi(t;t_0,x_0)\|<\epsilon,\qquad\forall t\geq t_0,$$

则称系统(1.4.1) 的平衡点是稳定的.

定义1.10 如果系统(1.4.1) 的平衡点$x^*=0$ 是稳定的, 且满足$\lim_{t\to+\infty}\|\phi(t;t_0,x_0)\|=0$, 则称系统(1.4.1)的平衡点$x^*=0$ 是渐近稳定的.

下面介绍Lyapunov 渐近稳定性定理.

定理1.8 对于给定的正数r, 令$U=\{x:x\in\mathbf{R}^n,\|x\|\le r\}$, 并记$J=[0,+\infty)$. 对于系统(1.4.1), 如果存在Lyapunov 函数$V:U\times J\to\mathbf{R}$ 和负定函数$W:U\to\mathbf{R}$, 使得沿系统(1.4.1) 的任意轨迹, 有

$$\dot{V}(x,t)\le W(x)<0,\quad \forall t\ge t_0,\ \ x\in U-\{0\},$$

则$x^*=0$ 是该系统的渐近稳定的平衡点.

下面介绍La Salle 不变性原理. La Salle 不变性原理主要是依据适当的Lyapunov 函数刻画系统运动的极限集位置, 从而利用极限集的不变性考察系统运动的渐近性.

定理1.9 考虑系统

$$\dot{x}=f(x),\tag{1.4.2}$$

这里$f:U\to\mathbf{R}^n$ 为连续的向量函数且满足局部Lipschitz 条件, U 为$\mathbf{R}^n$ 中含原点的一个区域, $f(0)=0$. 设$\Omega\subseteq U$ 是系统(1.4.2) 的有界闭正向不变集. 如果存在定义在U 上的连续可微函数$V:U\to\mathbf{R}$, 满足

$$\dot{V}(x)\le 0,\quad \forall x\in\Omega.$$

那么, 该系统对应于任意的初始状态$x_0\in\Omega$ 的解$x(t)$ 随时间t 趋向于M, 即

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{t\to\infty}\phi(t,x_0)\in M,$$

其中M 是集合$E=\{x:\dot{V}(x)=0\}$ 所包含的最大不变集.

§1.4.2 有限时间稳定性

定义1.11 考虑下面的时不变非线性系统

$$\dot{x}=f(x),\qquad f(0)=0,\qquad x\in\mathbf{R}^n,\tag{1.4.3}$$

其中$f:\widehat{U}_0\to\mathbf{R}^n$ 在原点的一个开邻域$\widehat{U}_0$ 上是连续的. 系统的平衡点$x=0$ 是(局部) 有限时间稳定的, 如果以下两个条件成立:

(1) 系统在$\widehat{U}$ 上是渐近稳定的, 其中$\widehat{U}$ 是原点的某个开邻域, 且满足$\widehat{U}\subseteq\widehat{U}_0$;

(2) 系统在$\widehat{U}$ 上是有限时间收敛的, 即, 对任意的$x_0 \in \widehat{U} \setminus \{0\}$, 存在一个停息时间$T > 0$, 使得系统(1.4.3) 的解$x(t, x_0)$ 满足对任意的$t \in [0, T)$, $x(t, x_0) \in \widehat{U} \setminus \{0\}$,

$$\lim_{t \to T} x(t, x_0) = 0, \tag{1.4.4}$$

并且如果$t \geq T$, $x(t, x_0) = 0$.

此外, 如果$\widehat{U} = \mathbf{R}^n$, 则称系统的平衡点$x = 0$ 是全局有限时间稳定的.

定义1.12 考虑下面的控制系统:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad x \in \mathbf{R}^n,\ u \in \mathbf{R}^m, \tag{1.4.5}$$

且$f(0) = 0$, $g(0) \neq 0$. 称系统(1.4.5) 是有限时间可镇定的, 如果存在一个连续的状态反馈控制律$u = \mu(x)$, 使得闭环系统$\dot{x} = f(x) + g(x)\mu(x)$ 的平衡点$x = 0$ 是有限时间稳定的.

定义1.13 称连续函数$V : D \subseteq \mathbf{R}^n \to [0, +\infty)$ 是正定的, 如果$V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. 定义在$\mathbf{R}^n$ 上的一个正定函数$V(x)$ 称为正则的, 如果$\lim_{\|x\| \to \infty} V(x) = \infty$.

下面的定理给出了系统(1.4.3) 的平衡点是有限时间稳定的平衡点的一个充分条件.

定理1.10 考虑非线性系(1.4.3). 假设存在一个定义在原点的邻域$\widehat{U} \subset U_0 \subset \mathbf{R}^n$ 上的C^1 函数$V(x)$, 实数$c > 0$ 及$0 < \alpha < 1$, 使得$V(x)$ 在$\widehat{U}$ 上是正定的, 并且$\dot{V}(x) + cV^{\alpha}(x)$ 沿着系统的轨线在$\widehat{U}$ 上是半负定的. 则系统(1.4.3) 的平衡点$x = 0$ 是局部有限时间稳定的, 且对任何初值$x_0 \in \widehat{U}$, 停息时间$T \leq \frac{V(x_0)^{1-\alpha}}{c(1-\alpha)}$. 如果$\widehat{U} = \mathbf{R}^n$ 且$V(x)$ 是正则的, 则系统(1.4.3) 的平衡点$x = 0$ 是全局有限时间稳定的.

对于渐近稳定性, 传统的Lyapunov 定理仅仅要求$\dot{V}(x)$ 是负定的且$V(x)$ 是正定的. 然而, 有限时间稳定性定理需要一个更强的条件. 在文献[8] 中, 该条件也是连续系统有限时间稳定的必要条件.

下面的引理给出了系统(1.4.6) 是局部有限时间稳定的充分条件[8].

定理1.11 考虑下面的非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y), \\ \dot{y} = f_2(x, y), \end{cases} \tag{1.4.6}$$

且$f_i(0, 0) = 0$, $i = 1, 2$. 如果存在一个C^1 的函数$V(x, y) = V_1(x) + V_2(y)$, 其中$V_1(x)$ 和$V_2(y)$ 分别关于x 和y 是正定的. 并且存在实数$c_i > 0$ 和$0 < \alpha_i < 1$ $(i = 1, 2)$, 使得

$$\dot{V} \leq -c_1 V_1^{\alpha_1} - c_2 V_2^{\alpha_2}$$

在原点的某个领域U 上成立, 则系统(1.4.6) 是局部有限时间稳定的.

§1.5 图论简介

设$\mathcal{G}(\mathcal{V},\varepsilon,\mathcal{A})$ 是一个n 阶有向图, 其中$\mathcal{V}=\{\mathrm{v}_1,\cdots,\mathrm{v}_n\}$ 是节点的集合, $\varepsilon\subseteq\mathcal{V}\times\mathcal{V}$ 是边的集合, 且$\mathcal{A}=[a_{ij}]$ 是该图的一个加权邻接矩阵. 节点的指标属于一个有限集$\mathcal{I}=\{1,2,\cdots,n\}$. 有向图的Laplacian 阵被定义为$L=\Delta-\mathcal{A}$, 其中$\Delta=[\Delta_{ij}]$ 是一个对角矩阵且$\Delta_{ii}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}$. 称有向边序列$(\mathrm{v}_{i_1},\mathrm{v}_{i_2}),(\mathrm{v}_{i_2},\mathrm{v}_{i_3}),\cdots$, 是一条有向路径, 其中$\mathrm{v}_{i_j}\in\mathcal{V}$ 是一个有向图的边. 如果对任意的$(\mathrm{v}_j,\mathrm{v}_i)\in\varepsilon$, 有向图满足$(\mathrm{v}_i,\mathrm{v}_j)\in\varepsilon$, 则称该图是无向图. 如果一个有向图的任何节点到其他节点都有一条有向路径, 则称该图是强联通的. 如果存在一个节点使得其他节点到该节点都有一条有向路径, 则称该图有一棵生成树. 显然, 任何无向图的Laplacian 矩阵都是对称矩阵, 并且任何无向图是强联通的当且仅当它有一棵生成树.

定理1.12 有向图$\mathcal{G}$ 有生成树当且仅当图$\mathcal{G}$ 的Laplacian 阵L 有一个单重零特征值(相应的特征向量为$\mathbf{1}_n$). 此外, 其他全部特征值都有正实部.

定理1.13 考虑一个有向图$\mathcal{G}$. 设D 是01-值矩阵且行列指标由图$\mathcal{G}$ 的节点和边决定, E 也是一个01-值矩阵且行列指标由图$\mathcal{G}$ 的边和节点决定, 且当节点u 是边f 的尾巴时, $D_{uf}=1$, 否则$D_{uf}=0$; 当节点u 是边f 的头时, $E_{fu}=1$, 否则$E_{fu}=0$. 则图$\mathcal{G}$ 的Laplacian 阵可以分解为$L=DW(D^{\mathrm{T}}-E)$, 其中$W=\mathrm{diag}\{w_1,w_2,\cdots,w_{\|\varepsilon\|}\}$, w_i 是图$\mathcal{G}$ 的第i 条边的权值, $\|\varepsilon\|$ 是图$\mathcal{G}$ 的边数.

证明 根据定义, $L=\Delta-\mathcal{A}$. 矩阵DWE 的第ij 位置的值可以写为$\sum_{p=1}^{\|\varepsilon\|}D_{ip}w_pE_{pj}$, 并且等于边$e_{ij}$ 的权值, 所以邻接矩阵可以记为$\mathcal{A}=DWE$. 类似地, 矩阵DWD^{T} 的第ij 位置的值可以写为$\sum_{p=1}^{\|\varepsilon\|}D_{ip}w_pD_{jp}$. 注意到每条边仅有一个尾巴, 因此对任意的$i\neq j$, $D_{ip}D_{jp}=0$. 故矩阵DWD^{T} 是一个对角矩阵且其第ii 位置的值等于尾巴是节点v_i 的边的权值之和. 因此, 我们有$\Delta=DWD^{\mathrm{T}}$.

定理1.14 考虑下面的矩阵

$$U=\begin{bmatrix}\frac{N-1}{N} & -\frac{1}{N} & \cdots & -\frac{1}{N}\\ -\frac{1}{N} & \frac{N-1}{N} & \cdots & -\frac{1}{N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -\frac{1}{N} & -\frac{1}{N} & \cdots & \frac{N-1}{N}\end{bmatrix}.$$

下面的结论成立.

(1) 矩阵U 的特征值有1 和0, 且1 的重数为$N-1$, 0 的重数为1. 向量$\mathbf{1}_N^{\mathrm{T}}$ 和$\mathbf{1}_N$ 分别为矩阵U 的相应于零特征值的左右特征向量.

(2) 存在一个正交矩阵J 使得$J^{\mathrm{T}}UJ = \begin{bmatrix} I_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 且最后一列是$\frac{\mathbf{1}_N}{\sqrt{N}}$. 设$\Xi_1 \in \mathcal{R}^{n\times n}$ 是任意一个有向图的Laplacian 阵, 则$J^{\mathrm{T}}\Xi_1 J = \begin{bmatrix} \vartheta_1 & 0 \end{bmatrix}$, $\vartheta_1 \in \mathcal{R}^{N\times(N-1)}$.

为了简便起见, 记

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & \bar{J}_1 \end{bmatrix},$$

其中$\bar{J}_1 = \frac{\mathbf{1}_N}{\sqrt{N}}$ 是矩阵J 的最后一列, 且J_1 是其余部分.