



普通高等教育“十三五”规划教材
电子信息科学与工程类专业 规划教材

数字信号处理

◆ 杨 燕 主编 ◆ 陈启强 岳 辉 副主编

Electronic Information
Science and Engineering



中国工信出版集团



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
<http://www.phei.com.cn>

电子信息科学与工程类专业规划教材

数字信号处理

杨 燕 主编

陈启强 岳 辉 副主编

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 · BEIJING

内 容 简 介

本书全面系统地介绍了数字信号处理的理论与实现,涉及的内容较为广泛,前6章是数字信号处理的经典理论,后面两章是现代理论。第1章和第2章,介绍了信号与系统的基础理论及数字信号处理的基础知识;第3章介绍数字信号处理的基本工具——离散时间傅里叶变换;第4章至第6章介绍滤波器和数字滤波器的设计、多采样率变换等内容;第7章介绍时频分析基础;第8章介绍现代功率谱估计的方法。本书内容全面,叙述深入浅出。阐述数学概念时,清晰的思路和严谨的推导将有助于读者掌握理论的来龙去脉。

本书可作为电子工程、通信工程、信号处理及计算机相关专业的本科生和研究生教材,也可供从事信号处理方向的工程技术人员参考。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理/杨燕主编. —北京:电子工业出版社,2016.2

电子信息科学与工程类专业规划教材

ISBN 978-7-121-28073-3

I. ①数… II. ①杨… III. ①数字信号处理—高等学校—教材 IV. ①TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 011916 号

策划编辑:凌 毅

责任编辑:凌 毅

印 刷:三河市双峰印刷装订有限公司

装 订:三河市双峰印刷装订有限公司

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本:787×1 092 1/16 印张:13.25 字数:340 千字

版 次:2016 年 2 月第 1 版

印 次:2016 年 2 月第 1 次印刷

定 价:35.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系。联系及邮购电话:(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010)88258888。

前 言

本书是作者近几年在为本科生和研究生讲授“数字信号处理”课程的基础上编写的,主要介绍离散时间信号、系统和现代数字处理的基础知识,以及它们在电子工程、电子信息、计算机工程和计算机科学等专业方面的应用。本书可作为本科生在离散系统和数字信号处理方面的一学期或两学期课程的教材,同时也可作为一年级研究生在数字信号处理方面的一学期或两学期课程的教材。

本书假定学生事先已掌握了微积分学(包括常微分方程)和连续时间信号的线性系统知识(包括拉普拉斯变换)。虽然本书第3章将描述周期或非周期的傅里叶级数和傅里叶变换,但我们期望读者在先修课程中已经了解了这部分内容。

本书在理论知识和实际应用之间进行了较好的折中,并提供了大量经过精心设计的习题,以便帮助学生掌握课程的内容。

第1章回顾了数字信号处理的基础知识。首先给出了数字信号处理系统的基本元素并定义了将模拟信号转换成便于处理的数字信号时所需要的操作,尤其重要的是采样定理。它由奈奎斯特于1928年提出,之后由香农于1949年在他的经典论文中加以推广。对于那些准备选修该课程的同学来讲,本章可以让他们了解本课程的一些基础知识。

第2章介绍如何利用离散时间处理方法来处理连续信号。对于数字滤波器一般结构的分析能够让读者明白如何使连续时间信号和离散时间信号与系统共存。此外,本章也介绍了量化噪声的统计特性(均值和方差)和一些现代数字化技术(如 Σ - Δ 调制)。

第3章介绍离散时间傅里叶变换(Discrete Time Fourier Transform, DTFT)、离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform, DFT)和快速傅里叶变换(Fast Fourier Transform, FFT)。本章结合谱分析、卷积计算、数据压缩和离散余弦变换(Discrete Cosine Transform, DCT)等应用做了更深入的讨论。对于DFT到DTFT的收敛性(许多情况下是不收敛的)和基本DCT的信息表示和熵等内容,本章做了详细的阐述。最后介绍了FFT的基本知识,并且详细分析了Radix-2的快速算法。

第4章主要介绍数字滤波器和模拟滤波器的设计,包括有限冲激响应(Finite Impulse Response, FIR)和无限冲激响应(Infinite Impulse Response, IIR)滤波器。其中,涉及的内容非常有限,包含两种基本的FIR滤波设计方法(窗函数法和等波纹法)、两种模拟滤波器映射到数字滤波器的方法(欧拉法和双线性法)及两种模拟滤波器的设计方法(巴特沃斯法和切比雪夫法)。目的是希望读者能够了解这些基本方法并清楚每种方法的局限性,同时零点和极点的直接映射作为一种计算传输函数的实用方法也进行了介绍。

在第4章对滤波器介绍之后,第5章对其实现进行了介绍。首先介绍了状态空间方程,特别介绍了低阶系统的分解及基于特征向量和特征值的分解;其次,介绍了一种稳定性很好的等波纹滤波器的实现方法。除此之外,对滤波器实现感兴趣的读者还可以在本章中找到很多其他的滤波器实现方法。

第6章介绍了多采样频率数字信号处理的基本方法。从复弦波信号入手,分析了上采样和下采样对频谱的影响,再将其结论推广到一般情况。在接触具体的数学公式推导前,对简单例子的分析能够让学生更准确地理解和把握多采样率信号处理的基本概念。最后,结合具体的应用

介绍了滤波器的实现和对信号的重采样。

第7章通过介绍傅里叶变换的作用与局限性从而引出适用于分析信号局部特征的4种变频变换——短时傅里叶变换(STFT)、盖博(Gabor)变换(GT)、连续小波变换(CWT)和小波变换(WT)。本章分别对4种变换做了详细的解释,并分析了如何利用短时傅里叶变换、盖博变换将信号展开成以时间 t 和 τ 频率为中心的且加窗的指数函数 $w(t-\tau)e^{j2\pi F\tau}$ 的基函数形式;为了解决窗函数的长度是固定的,而造成时间分辨率和频率分辨率存在局限性而引出了连续小波变换及小波变换的概念,讲述了反复地利用完全重建滤波器组将离散时间信号分解成若干频带的有效方法;最后分析了不同分辨率下的信号分解。

第8章主要介绍了功率谱估计的现代方法,包括基本原理、主要算法、工程实现和典型应用。其中,讲述了从经典谱估计到现代谱估计的应用发展历程,现代谱估计技术始于20世纪60年代,有自回归法(AR)、线性预测法(LP)和最大熵法(ME)3种互相等效的方法和最大似然法(ML)。本书主要介绍了自回归法(AR),AR谱估计隐含着自相关函数的外推,这也是AR谱估计分辨率高的根本原因;详细介绍了以参数模型为基础的谱估计方法的步骤,并阐述了3种模型离散随机信号 $x[n]$ 的有理传输函数模型、 q 阶滑动平均模型或简称为MA(q)模型、ARMA(p, q)模型(“极点-零点”模型)之间的联系,对AR模型的Yule-Walker方程、Levinson-Durbin算法、AR模型的稳定性及其阶的确定做了详细的解释,介绍了AR谱估计的性质、格型滤波器及3种AR模型参数的提取方法。

本书内容全面,叙述深入浅出。阐述数学概念时,清晰的思路和严谨的推导将有助于读者掌握理论的来龙去脉。

本书配有电子课件、习题答案等教学资源,读者可以登录华信教育资源网(www.hxedu.com.cn)免费下载。

本书由杨燕担任主编,陈启强、岳辉担任副主编。其中,第1、2、4章和5.1节~5.3节由杨燕编写,第3章和5.4节~5.5节由陈启强编写,第6、7、8章和附录由岳辉编写。在本书编写过程中,得到了万毅教授的帮助,在此表示衷心感谢。

由于编者水平有限,书中难免存在错误之处,敬请读者批评指正。

编 者

2016年1月

目 录

第 1 章 数字信号处理基础	1
1.1 认识数字信号处理	1
1.1.1 什么是数字信号处理	1
1.1.2 为什么要处理数字信号	1
1.1.3 数字信号处理的一般模式	1
1.1.4 DSP 技术的一些应用	1
1.2 模数和数模转换	2
1.2.1 模拟信号采样	3
1.2.2 采样定理	7
1.2.3 连续幅度信号的量化	10
1.2.4 正弦信号的量化	11
1.2.5 量化采样信号的编码	13
1.2.6 数模转换	13
1.3 一个简单滤波器的设计	13
习题 1	16
第 2 章 连续时间信号的离散分析	18
2.1 概述	18
2.2 数字滤波器的结构	18
2.3 数字滤波器的频域分析	19
2.3.1 采样	19
2.3.2 数字滤波	20
2.3.3 信号重建:零阶保持	21
2.4 量化误差	23
2.4.1 概述	23
2.4.2 量化误差的白噪声模型	24
2.4.3 采样频率和比特数	26
2.5 基于预测的采样法: Δ 调制和 Σ - Δ 调制	27
2.5.1 Δ 调制	28
2.5.2 Σ - Δ 调制	28
习题 2	30
第 3 章 离散时间信号的傅里叶分析	33
3.1 概述	33
3.2 离散时间傅里叶变换	33
3.2.1 离散时间傅里叶变换定义	33
3.2.2 离散时间傅里叶变换性质	34
3.2.3 离散时间傅里叶变换的计算	35

3.3	离散傅里叶变换	36
3.4	用 DFT 作为 DTFT 的估计	39
3.5	使用 DFT 的频谱估计	42
3.6	用 DFT 做卷积	46
3.7	用 DFT/DCT 进行压缩	49
3.8	快速傅里叶变换 FFT	53
3.8.1	为什么要进行快速傅里叶变换	53
3.8.2	快速傅里叶变换	53
3.8.3	离散傅里叶变换和卷积	53
3.9	离散余弦变换	55
3.9.1	离散余弦变换与离散傅里叶变换	55
3.9.2	离散余弦变换-II	56
3.10	线性卷积、圆周卷积及其关系	57
3.10.1	线性卷积	57
3.10.2	DFT 和圆周卷积	57
3.10.3	圆周卷积和线性卷积的关系	57
	习题 3	58
第 4 章	数字滤波器	62
4.1	认识滤波器——FIR 和 IIR	62
4.1.1	概述	62
4.1.2	FIR 和 IIR 的定义	62
4.1.3	FIR 滤波器和 IIR 滤波器的判别方法	63
4.1.4	FIR 和 IIR 的特点	64
4.2	理想滤波器和非理想滤波器	64
4.2.1	理想滤波器	64
4.2.2	非理想滤波器的特征	66
4.2.3	递归和非递归滤波器	67
4.3	有限冲激响应滤波器	68
4.3.1	基于窗的滤波器	68
4.3.2	对称性和线性相位特点	71
4.3.3	常用的窗	72
4.3.4	等波纹滤波器	75
4.3.5	切比雪夫逼近	76
4.3.6	普通滤波器	79
4.3.7	优化方法	80
4.4	无限冲激响应滤波器	80
4.4.1	引言	80
4.4.2	欧拉逼近	81
4.4.3	双线性变换	82
4.4.4	模拟滤波器的设计	86
4.4.5	巴特沃斯滤波器和切比雪夫滤波器的渐近性	91

4.4.6 频率变换	93
习题4	94
第5章 数字滤波器的实现	98
5.1 概述	98
5.2 基本操作	98
5.3 数字滤波器的状态空间实现	100
5.3.1 更通用的 IIR 滤波器状态空间表示法	103
5.3.2 将滤波器分解为一阶和二阶部分	105
5.4 稳健的数字滤波器实现方法	108
5.4.1 FIR 滤波器的格型实现	109
5.4.2 零点和反射系数	111
5.4.3 IIR 滤波器的格型实现	114
5.5 等波纹 FIR 滤波器的稳健实现	118
习题5	120
第6章 多采样率数字信号处理基本原理	124
6.1 概述	124
6.2 问题的描述和定义	125
6.3 对下采样和上采样的分析	126
6.3.1 离散时间序列的抽样	126
6.3.2 下采样	130
6.3.3 上采样	133
6.4 有理因子的采样率变换	135
6.4.1 基于整数因子 D 的抽取	135
6.4.2 基于整数因子 L 的内插	135
6.4.3 有理因子为 L/D 的重采样	135
6.5 数字滤波器的多级实现	137
6.6 多采样率系统的高效实现	140
6.6.1 恒等互换	140
6.6.2 线性滤波器的多相分解	142
6.7 多采样率 DSP 的应用:数模变换	143
6.8 采样频率和量化误差	144
习题6	145
第7章 时频展开简介	149
7.1 概述	149
7.2 短时傅里叶变换	151
7.3 盖博变换	155
7.4 小波变换	159
7.5 递归多分辨分解	166
习题7	175
第8章 功率谱估计的现代方法	176
8.1 从经典谱估计到现代谱估计	176

8.2 谱估计的参数模型方法	178
8.3 AR 模型的 Yule-Walker 方程	180
8.4 Levinson-Durbin 算法	181
8.5 AR 模型的稳定性及其阶的确定	183
8.6 AR 谱估计的性质	186
8.6.1 AR 谱估计隐含着自相关函数的外推	186
8.6.2 AR 谱估计与最大熵谱估计等效	188
8.6.3 AR 谱估计与线性预测谱估计等效	188
8.6.4 AR 谱估计等效于最佳白化处理	189
8.6.5 AR 谱估计的界	191
8.7 格型滤波器	191
8.8 AR 模型参数提取方法	193
8.8.1 Yule-Walker 法	194
8.8.2 协方差法	194
8.8.3 Burg 法	195
习题 8	197
附录 A 相关定理证明	199
附录 B 相关公式	201
参考文献	204

第 1 章 数字信号处理基础

1.1 认识数字信号处理

1.1.1 什么是数字信号处理

数字信号处理(Digital Signal Processing,简称 DSP)是一门涉及许多学科而又广泛应用于许多领域的新兴学科。它通过使用数学技巧执行转换或提取信息来处理信号,这些信号由数字序列表示。通俗来说,数字信号处理就是处理数字信号的学科或者技术。

1.1.2 为什么要处理数字信号

20 世纪以来,计算机技术不断普及和发展,广泛应用到社会生活的各个层面,大大提高了人们的办事效率和生活水平。计算机是基于二进制设计的,它只能处理“0”和“1”组成的代码,这些代码是离散的,而日常生活中人们所感知的信号大多是模拟的。因此,利用计算机处理模拟信号时,必须先把它转换为离散的数字信号,然后才能输入计算机进行处理。输出时再把经过 DSP 处理的数字信号转换为模拟信号。

1.1.3 数字信号处理的一般模式

图 1-1 中,A/D 用于把模拟信号转换为数字信号,D/A 用于把数字信号转换为模拟信号,DSP 用于处理数字信号。

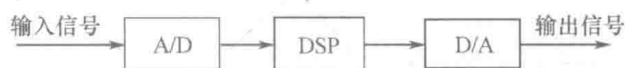


图 1-1 数字信号处理的一般模式

1.1.4 DSP 技术的一些应用

图像/图形方面:二维和三维图形处理、图像压缩与传输、图像识别、动画、机器人视觉、多媒体、电子地图、图像增强等。

语音处理方面:语音编码、语音合成、语音识别、语音增强、语音邮件、语音存储等。

军事方面:保密通信、雷达处理、声呐处理、导航、全球定位、跳频电台、搜索和反搜索等。

仪器仪表方面:频谱分析、函数发生、数据采集、地震处理等。

自动控制方面:控制、深空作业、自动驾驶、机器人控制、磁盘控制等。

医疗方面:助听、超声设备、诊断工具、病人监护、心电图等。

家用电器方面:数字音响、数字电视、可视电话、音乐合成、音调控制、玩具与游戏等。下面列举两个生物医学信号处理的实例。

CT:计算机 X 射线断层摄影装置(其中,发明头颅 CT 的英国 EMI 公司的豪斯菲尔德获得诺贝尔奖)。

CAT:计算机 X 射线空间重建装置。实现全身扫描,心脏活动立体图形,脑肿瘤异物、人体躯干图像重建,心电图分析。

1.2 模数和数模转换

在实际应用中,我们感兴趣的大多是模拟信号,如语音信号、生物学信号、地震信号、雷达信号、声呐信号和各种通信信号等。要通过数字方法处理模拟信号,有必要先将它们转换成数字形式,即转换成具有有限精度的数字序列。这一过程称为模数转换(A/D),而相应的设备称为 A/D 转换器(ADC)。

从概念上,将 A/D 转换视为三步过程,如图 1-2 所示。

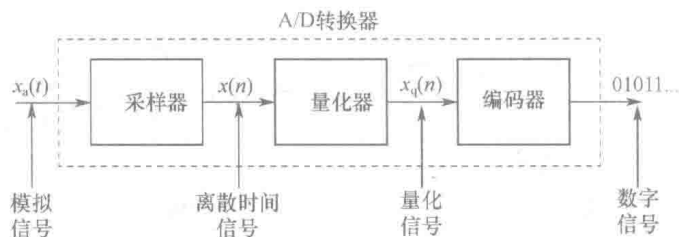


图 1-2 模数转换器的基本组成部分

1. 采样

这是连续时间信号到离散时间信号的转换过程,通过对连续时间信号的离散时间点处取样本值获得。因此,如果 $x_a(t)$ 是采样器的输入,那么输出是 $x_a(nT) \equiv x(n)$,其中 T 称为采样间隔。

2. 量化

这是离散时间连续值信号转换到离散时间离散值(数字)信号的转换过程。每个信号样本值是从可能值的有限值中选取的。未量化样本 $x(n)$ 和量化输出 $x_q(n)$ 之间的差称为量化误差。

3. 编码

在编码的过程中,每个离散值 $x_q(n)$ 由 b 位的二进制序列表示。

虽然我们将 A/D 转换器模型化为采样器,然后是量化器和编码器,但实际上 A/D 转换是由单个设备执行的,输入 $x_a(t)$ 而产生一个二进制码字。采样和量化操作可以按任意顺序执行,但实际上采样总是在量化之前执行的。

在实际应用的很多场合(例如,语音处理),需要将处理的数字信号转换成模拟信号(很明显,我们不能听到代表语音信号的采样序列,或者不能看到相应于一个电视信号的数字)。将数字信号转换成模拟信号的过程是熟知的数模(D/A)转换。所有 D/A 转换器通过执行某种插值操作连接数字信号中的各点,其精度依赖于 D/A 转换过程的质量。图 1-3 说明了简单的 D/A 转换,称为零阶保持或阶梯近似。其他近似也是可能的,如线性连接一对连续样本(线性插值),通过 3 个连续样本点的二次插值,等等。存在一种最优(理想)插值吗? 对于具有有限频率范围(有限带宽)的信号,在下面的章节中引入的采样定理指定了插值的最优形式。

采样和量化在本节中论述。特别地,在信号带宽有限的情况下,采样既不会导致信号丢失,也不会引入信号失真。原则上,模拟信号可以从样本重构,只要采样率足够高以避免通常所说的“混叠”问题。另一方面,量化是一个导致信号失真的不可颠倒或不可逆的过程。我们将要证明失真量依赖于 A/D 转换过程的精度,通常由位数测量。影响选择 A/D 转换器精度的因素是费用和采样率。一般来说,随着精度和/或采样率的增加,成本也会增加。

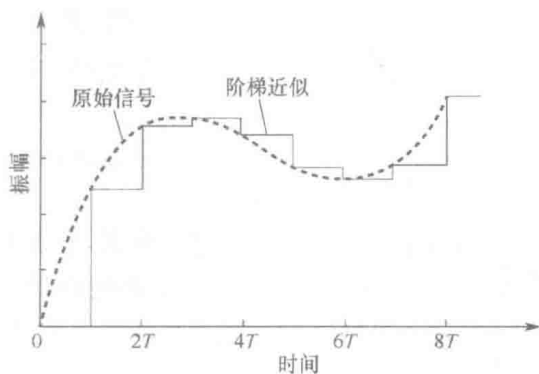


图 1-3 零阶保持数模转换

1.2.1 模拟信号采样

模拟信号采样有很多方式。本书只限于讨论在实际中最常使用的采样类型,即周期采样或均匀采样。这可由下列关系式描述

$$x(n) = x_a(nT), \quad -\infty < n < \infty \quad (1-2-1)$$

其中, $x(n)$ 是通过对模拟信号 $x_a(t)$ 每隔 T 秒取样本值获得的离散时间信号。这一过程在图 1-4 中描述。在两个连续的样本之间的时间间隔 T 称为采样周期或采样间隔,其倒数 $1/T = F_s$ 称为采样率(样本数/s)或采样频率(Hz)。

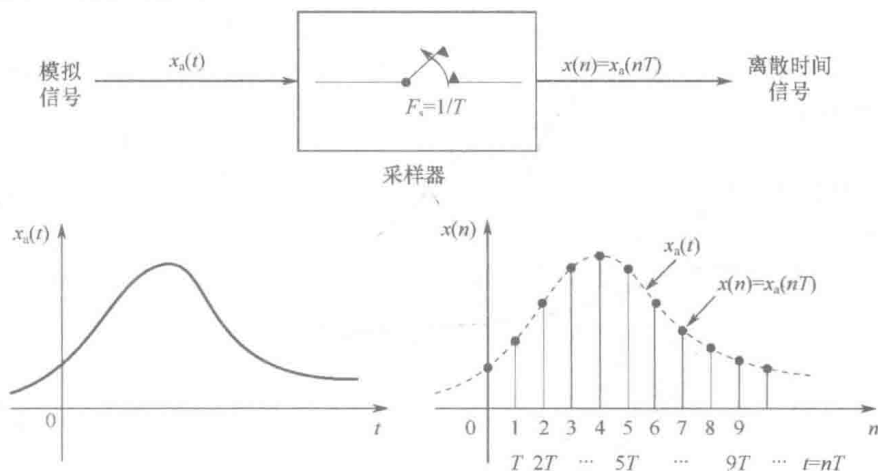


图 1-4 模拟信号的周期采样

周期采样建立了连续时间信号的时间变量 t 和离散时间信号的时间变量 n 之间的关系。事实上,这些变量是通过采样周期 T 或等价地通过采样率 $F_s = 1/T$ 线性相关的,即

$$t = nT = \frac{n}{F_s} \quad (1-2-2)$$

由式(1-2-2)推出,在模拟信号的频率变量 F (或 Ω)和离散时间信号的频率变量 f (或 ω)之间存在一种关系。为建立此关系,考虑模拟正弦信号形式

$$x_a(t) = A \cos(2\pi Ft + \theta) \quad (1-2-3)$$

如果以 $F_s = 1/T$ 的采样率进行周期采样,那么有

$$x_a(nT) = x(n) = A \cos(2\pi F n T + \theta) = A \cos\left(\frac{2\pi F n}{F_s} + \theta\right) \quad (1-2-4)$$

如果比较式(1-2-4)和式 $x(n) = A \cos(2\pi f n + \theta)$, $-\infty < n < \infty$,则会注意到两个频率变量 F

和 f 呈线性关系,即

$$f=\frac{F}{F_s} \tag{1-2-5}$$

或等价于

$$\omega=\Omega T \tag{1-2-6}$$

或式(1-2-5)中的关系证实了相对频率或归一化频率这一命名,它有时用来描述频率变量 f 。如式(1-2-5)的含义那样,只要知道了采样率 F_s ,就可以用 f 确定以赫兹为单位的频率 F 。

下面回顾一下连续时间正弦信号,连续时间正弦信号的频率变量 F 或 Ω 的范围是

$$\begin{aligned} -\infty < F < \infty \\ -\infty < \Omega < \infty \end{aligned} \tag{1-2-7}$$

然而,离散时间正弦信号的情形不同。从离散时间正弦信号的知识可以看到

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} < f < \frac{1}{2} \\ -\pi < \omega < \pi \end{aligned} \tag{1-2-8}$$

将式(1-2-5)、式(1-2-6)代入式(1-2-8),可以发现当以 $F_s=1/T$ 的采样率采样时,连续时间正弦信号的频率一定会落在某个范围,即

$$-\frac{1}{2T} = -\frac{F_s}{2} \leq F \leq \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T} \tag{1-2-9}$$

或等价于

$$-\frac{\pi}{T} = -\pi F_s \leq \Omega \leq \pi F_s = \frac{\pi}{T} \tag{1-2-10}$$

这些关系总结在表 1-1 中。

表 1-1 频率变量之间的关系

连续时间信号	离散时间信号
$\Omega=2\pi F$ $\frac{\text{弧度}}{\text{秒}} \text{ Hz}$	$\omega=2\pi f$ $\frac{\text{弧度}}{\text{样本}} = \frac{\text{周期数}}{\text{样本}}$
$-\infty < \Omega < \infty$ $-\infty < F < \infty$	$-\pi \leq \omega \leq \pi$ $-\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$ $-\pi/T \leq \Omega \leq \pi/T$ $-F_s/2 \leq F \leq F_s/2$

从这些关系可以看出,连续时间信号和离散时间信号的基本不同是:频率 F 和 f 或者 Ω 和 ω 的取值范围不同。连续时间信号的周期采样包含了无限频率范围的变量 F (或 Ω)到有限频率范围的变量 f (或 ω)的映射。由于离散时间信号的最高频率是 $\omega=\pi$ 或 $f=1/2$,由此推出,对于某一个采样率 F_s ,相应的 F 和 Ω 的最高值是

$$\begin{aligned} F_{\max} &= \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T} \\ \Omega_{\max} &= \pi F_s = \frac{\pi}{T} \end{aligned} \tag{1-2-11}$$

所以,采样引入了争议,既然连续时间信号的最高频率 $F_{\max}=F_s/2$ 或 $\Omega_{\max}=\pi F_s$,即信号以速率 $F_s=1/T$ 采样时可以被唯一区分,那么对于频率大于 $F_s/2$ 的信号会如何呢? 让我们看看下面的例子。

【例 1-1】 考察下面两种模拟正弦信号,这些频率关系的含义可以被正确地描述为

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \cos 2\pi(10)t \\ x_2(t) &= \cos 2\pi(50)t \end{aligned} \quad (1-2-12)$$

其采样率为 $F_s=40\text{Hz}$ 。相应的离散时间信号或序列为

$$\begin{aligned} x_1(n) &= \cos 2\pi\left(\frac{10}{40}\right)n = \cos \frac{\pi}{2}n \\ x_2(n) &= \cos 2\pi\left(\frac{50}{40}\right)n = \cos \frac{5\pi}{2}n \end{aligned} \quad (1-2-13)$$

然而, $\cos 5\pi n/2 = \cos(2\pi n + \pi n/2) = \cos \pi n/2$ 。因此 $x_2(n) = x_1(n)$ 。于是两个正弦信号是相同的,结果是不可区分的。如果给出由 $\cos(\pi/2)n$ 所生成的样本值,那么样本值是对应于 $x_1(t)$ 还是 $x_2(t)$ 就会引起争议。既然当两个信号以 $F_s=40$ 个样本/s 的速率采样时, $x_2(t)$ 准确等于 $x_1(t)$,我们就说,在 40 个样本/s 的采样率时,频率 $F_2=50\text{Hz}$ 的信号是频率 $F_1=10\text{Hz}$ 的信号的混叠。

值得注意的是,不只 F_2 是 F_1 的混叠。事实上,对于 40 个样本/s 的采样率,频率 $F_3=90\text{Hz}$ 同样是 F_1 的混叠,还有频率 $F_4=130\text{Hz}$,等等。所有以 40 个样本/s 的采样率的正弦信号 $\cos 2\pi \cdot (F_1+40k)t, k=1,2,3,4,\dots$ 均生成相等的值。结果,它们都是 $F_1=10\text{Hz}$ 的信号的混叠。

一般来说,连续时间正弦信号

$$x_a(t) = A \cos(2\pi F_0 t + \theta) \quad (1-2-14)$$

以 $F_s=1/T$ 的采样率采样将产生一个离散时间信号

$$x(n) = A \cos(2\pi f_0 n + \theta) \quad (1-2-15)$$

其中, $f_0=F_0/F_s$ 是正弦信号的相对频率。如果假定 $-F_s/2 \leq F_0 \leq F_s/2$,那么 $x(n)$ 的频率 f_0 就会落在频率范围 $-1/2 \leq f_0 \leq 1/2$,即离散时间信号的频率范围。在这种情况下, F_0 和 f_0 之间是一一对应的关系,因此有可能从样本 $x(n)$ 表示(或重建)模拟信号 $x_a(t)$ 。

另一方面,如果正弦信号

$$x_a(t) = A \cos(2\pi F_k t + \theta) \quad (1-2-16)$$

其中

$$F_k = F_0 + kF_s \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1-2-17)$$

以速率 F_s 采样,很明显,频率 F_k 将会落在基本频率范围 $-F_s/2 \leq F_0 \leq F_s/2$ 之外。于是采样后的信号是

$$\begin{aligned} x(n) &\equiv x_a(nT) = A \cos\left(2\pi \frac{F_0 + kF_s}{F_s} n + \theta\right) \\ &= A \cos(2\pi n F_0 / F_s + \theta + 2\pi k n) \\ &= A \cos(2\pi f_0 n + \theta) \end{aligned}$$

它与从式(1-2-14)采样所得到的式(1-2-15)中的离散时间信号相同。因此,无数的连续时间正弦信号通过采样可由相同的离散时间信号(即相同样本集)表示出来。从而,如果给定序列 $x(n)$,那么这些样本值表示哪一个连续时间信号 $x_a(t)$ 将会引起争议。也就是说,频率 $F_k = F_0 + kF_s, -\infty < k < \infty$ (k 是整数)在采样以后与频率 F_0 是无法区分的,因此它们是 F_0 的混叠。这种连续时间信号和离散时间信号的频率之间的关系如图 1-5 所示。

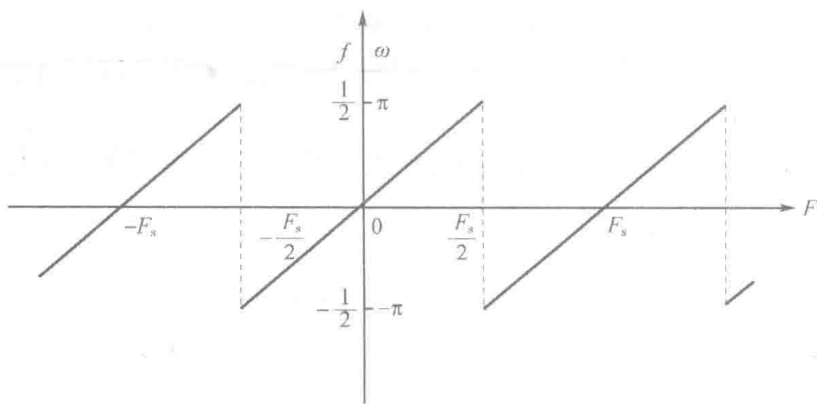


图 1-5 在周期采样的情况下,连续时间信号和离散时间信号的频率变量之间的关系

一个混叠的例子在图 1-6 说明,当所有的采样率为 $F_s = 1\text{Hz}$ 时,频率为 $F_0 = \frac{1}{8}\text{Hz}$ 和 $F_1 = -\frac{7}{8}\text{Hz}$ 的两个正弦信号生成相同的样本。从式(1-2-17)容易推出,对于 $k = -1$, $F_0 = F_1 + F_s = (-\frac{7}{8} + 1)\text{Hz} = \frac{1}{8}\text{Hz}$ 。

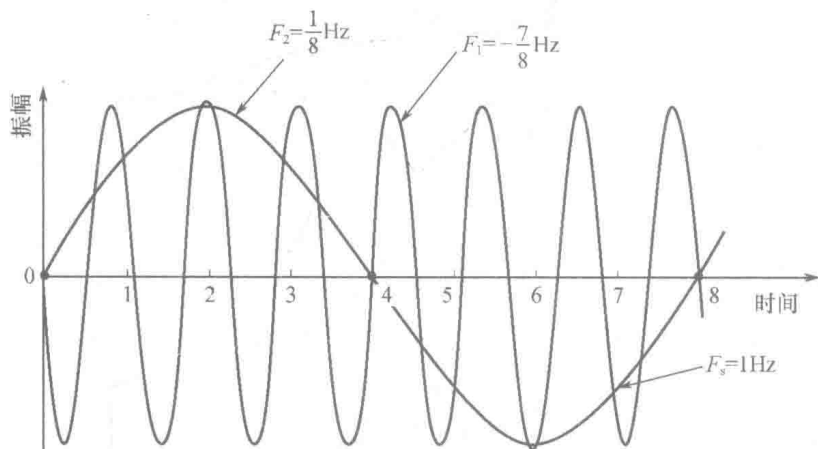


图 1-6 混叠示例

既然对应于 $\omega = \pi$ 的频率 $F_s/2$ 是可以由采样率 F_s 唯一表征的最高频率,那么确定大于 $F_s/2$ ($\omega = \pi$) 的任一(混叠)频率小于 $F_s/2$ 的等价频率的映射是一件简单的事情。我们可以使用 $F_s/2$ 或 $\omega = \pi$ 作为枢轴点,并将混叠频率反射或“对折”到范围 $0 \leq \omega \leq \pi$ 。由于反射点是 $F_s/2$ ($\omega = \pi$),所以频率 $F_s/2$ ($\omega = \pi$) 就是对折频率。

【例 1-2】 考虑模拟信号

$$x_a(t) = 3\cos 100\pi t$$

- (1) 求避免混叠所需的最小采样率。
- (2) 假设信号采样率为 $F_s = 200\text{Hz}$, 采样后得到的离散时间信号是什么?
- (3) 假设采样率为 $F_s = 75\text{Hz}$, 采样后得到的离散时间信号是什么?
- (4) 如果生成与(3)得到的相同样本,相应的信号频率 $0 < F < F_s/2$ 是什么?

【解】 (1) 模拟信号的频率是 $F = 50\text{Hz}$, 因此避免混叠所需的最小采样率是 $F_s = 100\text{Hz}$ 。

(2) 如果信号采样率为 $F_s = 200\text{Hz}$, 那么离散时间信号是

$$x(n) = 3\cos \frac{100\pi}{200}n = 3\cos \frac{\pi}{2}n$$

(3) 如果信号采样率为 $F_s = 75\text{Hz}$, 那么离散时间信号是

$$x(n) = 3\cos \frac{100\pi}{75}n = 3\cos \frac{4\pi}{3}n = 3\cos \left(2\pi - \frac{2\pi}{3}\right)n = 3\cos \frac{2\pi}{3}n$$

(4) 对于 $F_s = 75\text{Hz}$ 的采样率, 有

$$F = fF_s = 75f$$

(3) 中正弦信号的频率是 $f = 1/3$ 。因此, 得

$$F = 25\text{Hz}$$

显然, 正弦信号

$$y_s(t) = 3\cos 2\pi Ft = 3\cos 50\pi t$$

以 $F_s = 75\text{Hz}$ 的采样率采样可生成相同的样本。因此, 在采样率为 $F_s = 75\text{Hz}$ 时, 频率 $F = 50\text{Hz}$ 是频率 $F = 25\text{Hz}$ 的混叠。

1.2.2 采样定理

对于给定的任意模拟信号, 应该如何选定采样周期 T 或采样率 F_s 呢? 要回答这一问题, 我们必须具备一些关于被采样信号的特征信息。尤其是, 必须具备一些涉及信号的频率范围的一般信息。例如, 我们一般都知道语音信号的频率成分低于 3000Hz 。另一方面, 电视信号一般都包含大到 5MHz 的重要频率成分。这些信号的信息内容包含在各种频率成分的振幅、频率和相位中, 但这些信号特征的细节知识在得到信号之前对我们是不可用的。事实上, 处理这些信号的目的通常是提取这些细节信息。然而, 如果我们知道一般类型信号的最大频率范围(如语音信号类型、视频信号类型等), 那么就可以指定模拟信号转换成数字信号所必需的采样率。

假设任何模拟信号都可以表示成不同振幅、频率和相位的正弦信号的和, 即

$$x_a(t) = \sum_{i=1}^N A_i \cos(2\pi F_i t + \theta_i) \quad (1-2-18)$$

其中, N 代表频率成分的数目。所有信号(如语音信号和视频信号)都可以通过任意的短时分割服从于这样一种表示形式。这些振幅、频率和相位通常会从一个时间段到另一个时间段随着时间慢慢改变。然而, 假定这些频率不会超过某个已知频率, 也就是 $F_{\max}$ 。例如, 对于语音信号类型 $F_{\max} = 3000\text{Hz}$, 而对于电视信号 $F_{\max} = 5\text{MHz}$ 。对于任何一种给定类型的信号的不同实现方式, 最大频率可能稍有变化, 因此通过将模拟信号通过一个滤波器以严重衰减大于 $F_{\max}$ 的频率成分, 我们希望能保证 $F_{\max}$ 不会超过某个预定的值, 于是我们肯定这一族中没有一个信号包含大于 $F_{\max}$ 的频率成分。实际中, 这样的滤波通常在采样之前使用。

鉴于对 $F_{\max}$ 的了解, 可以选择合适的采样率。我们知道, 当信号以 $F_s = 1/T$ 的采样率采样时, 一种可以被准确重构的模拟信号的最高频率是 $F_s/2$ 。高于 $F_s/2$ 或低于 $-F_s/2$ 的任何频率都导致与 $-F_s/2 \leq F_0 \leq F_s/2$ 范围内的相应频率相同的样本。为了避免由混叠引起的争议, 必须选择充分高的采样率。也就是说, 必须选择大于 $F_{\max}$ 的 $F_s/2$ 。因此, 为了避免混叠问题, 可选择 F_s 使其满足

$$F_s > 2F_{\max} \quad (1-2-19)$$

其中, $F_{\max}$ 是模拟信号中的最大频率成分。采用这种方式选择采样率, 模拟信号中的任何频率成分, 即 $|F_i| < F_{\max}$, 就都可以映射成某个离散时间正弦信号, 其频率

$$-\frac{1}{2} \leq f_i = \frac{F_i}{F_s} \leq \frac{1}{2} \quad (1-2-20)$$

或等价为

$$-\pi \leq \omega_i = 2\pi f_i \leq \pi \quad (1-2-21)$$

既然 $|f| = \frac{1}{2}$ 或 $|\omega| = \pi$ 是离散时间信号中的最高(唯一)频率,那么按照式(1-2-19)选择采样率就可以避免混叠问题。换言之,条件 $F_s > 2F_{\max}$ 保证了模拟信号中的所有频率成分都能映射到频率在基本区间内的相应的离散时间频率成分。这样,模拟信号的所有频率成分都可以无混叠地表示成采样的形式,因此使用合适的插值(数模转换)方法,模拟信号可以从样本值无失真地重构。这个“合适的”或理想的插值公式是由采样定理指定的。

采样定理 如果包含在某个模拟信号 $x_a(t)$ 中的最高频率是 $F_{\max} = B$,而信号以采样率 $F_s > 2F_{\max} \equiv 2B$ 采样,那么 $x_a(t)$ 可以从样本值准确恢复,插值函数为

$$g(t) = \frac{\sin 2\pi B t}{2\pi B t} \quad (1-2-22)$$

于是, $x_a(t)$ 可以表示为

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) g\left(t - \frac{n}{F_s}\right) \quad (1-2-23)$$

其中, $x_a(n/F_s) = x_a(nT) \equiv x(n)$ 是 $x_a(t)$ 的样本。

当 $x_a(t)$ 的采样以最小采样率 $F_s = 2B$ 执行时,式(1-2-23)中的重构公式变成

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a\left(\frac{n}{2B}\right) \frac{\sin 2\pi B(t - n/2B)}{2\pi B(t - n/2B)} \quad (1-2-24)$$

采样率 $F_N = 2B = 2F_{\max}$ 称为奈奎斯特频率。图 1-7 展示了使用式(1-2-22)中的插值函数的理想 D/A 转换过程。

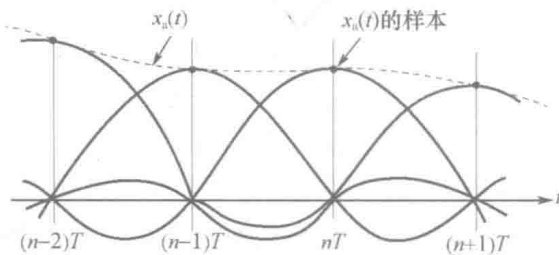


图 1-7 理想的 D/A 转换(插值)

可以从式(1-2-23)或式(1-2-24)观察到,从 $x(n)$ 重构 $x_a(t)$ 是一个复杂的过程,包含了插值函数 $g(t)$ 及其时移 $g(t - nT)$ 的加权和,其中 $-\infty < n < \infty$,权重因子是样本 $x(n)$ 。由于复杂性和式(1-2-23)或式(1-2-24)所需样本的无限数目,这些重构公式主要是理论上的。

【例 1-3】 考虑模拟信号

$$x_a(t) = 3\cos 50\pi t + 10\sin 300\pi t - \cos 100\pi t$$

求该信号的奈奎斯特频率。

【解】 上述信号所代表的频率是

$$F_1 = 25\text{Hz}, \quad F_2 = 150\text{Hz}, \quad F_3 = 50\text{Hz}$$

于是 $F_{\max} = 150\text{Hz}$,按照式(1-2-19)有

$$F_s > 2F_{\max} = 300\text{Hz}$$

奈奎斯特频率是 $F_N = 2F_{\max}$,因此, $F_N = 300\text{Hz}$ 。

【例 1-4】 考虑模拟信号

$$x_a(t) = 3\cos 2000\pi t + 5\sin 6000\pi t + 10\cos 12000\pi t$$

(1) 该信号的奈奎斯特频率是多少?