



临沂大学学术专著

LINYIDAXUE XUESHU ZHUANZHU

非均匀粒子 光散射特性及折射率 分布测量研究

姜会芬 韩香娥 编著

.....



西安电子科技大学出版社
<http://www.xduph.com>

临沂大学学术专著

非均匀粒子光散射特性及 折射率分布测量研究

姜会芬 韩香娥 编著

西安电子科技大学出版社

内容简介

本书利用基于非均匀粒子光散射理论的彩虹技术,研究了折射率分布为指数分布或幂分布情况下的非均匀球、柱粒子对平面光波和高斯波束的彩虹强度分布;介绍了利用非均匀粒子激光彩虹的强度分布测量非均匀粒子折射率分布和直径的方法;给出了具有非均匀温度/折射率分布的微小液滴的折射率轮廓和直径的同时测量方法。

本书不仅对于燃烧过程的研究具有重要意义,而且对于燃烧过程、化工、新型聚合物光纤研制等研究领域中的小粒子粒度分析具有广泛的实用价值。此外,本书所研究的技术适合于非接触、在线测量。

本书可供物理学本科学生及无线电物理和光学专业的研究生使用,也可供相关研究人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

非均匀粒子光散射特性及折射率分布测量研究/姜会芬,韩香娥编著.

—西安:西安电子科技大学出版社,2015.11

ISBN 978-7-5606-3936-9

I. ①非… II. ①姜… ②韩… III. ①光散射—折射率—研究

IV. ①O436.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 269362 号

策划编辑 刘玉芳

责任编辑 刘玉芳 毛红兵

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

网 址 www.xduph.com 电子邮箱:xdupfxb001@163.com

经 销 新华书店

印刷单位 虎彩印艺股份有限公司

版 次 2015年11月第1版 2015年11月第1次印刷

开 本 787毫米×1092毫米 1/16 印张 7.5

字 数 174千字

定 价 24.00元

ISBN 978-7-5606-3936-9/O

XDUP 4228001-1

* * * * * 如有印装问题可调换 * * * * *

前 言

本文选题来源于教育部科学技术研究重点项目“基于彩虹测试技术的非均匀粒子粒度测量”(项目编号: 106149), 主要从理论上研究非均匀粒子的光散射特性和折射率分布测量方法, 并附有实验测量结果。

本书的主要内容包括:

1. 详细推导了无限长非均匀介质圆柱对垂直入射平面波的散射理论; 在非均匀球粒子对平面波散射场改进算法的基础上, 提出了无限长非均匀介质圆柱对垂直入射平面波散射场的改进算法。

2. 推导了无限长非均匀介质圆柱对任意方位斜入射平面波的散射理论; 提出了计算其散射场的改进算法。

3. 利用非均匀粒子的 Lorenz - Mie 理论和几何光学理论研究了非均匀球、柱粒子的彩虹特性, 针对特定折射率分布的粒子存在不同阶次彩虹的相干现象特点, 利用低通、带通滤波和 IFFT 方法, 将各阶彩虹从相互干涉的强度分布中分离重建出来; 利用非均匀粒子的 Lorenz - Mie 理论和 Debye 级数分析了分层粒子的多重一阶彩虹现象, 为非均匀粒子尺寸参量和折射率分布的测量提供了重要的理论基础。

4. 利用非均匀柱粒子的 Lorenz - Mie 理论和 Debye 级数展开式, 模拟了梯度折射率聚合物光纤的彩虹强度角分布, 结果表明彩虹强度分布与折射率分布有关; 详细讨论了一阶、二阶彩虹的各个 Airy 峰角位置随折射率分布指数因子和表面折射率变化的关系; 基于非均匀粒子的彩虹强度分布与折射率分布的关系, 利用最小二乘法对非均匀粒子的折射率分布进行了反演; 最后给出了激光彩虹测量系统和简单的实验数据, 并与理论模拟结果进行对比。

5. 系统地解决了吸收介质中非均匀柱粒子对垂直入射平面波的散射问题, 包括散射场、散射截面、消光截面的解析解, 提出了快速、有效的计算方法; 数值模拟了均匀、非均匀圆柱的散射矩阵, 并与已有文献发表结果进行对比。

本书是作者姜会芬在西安电子科技大学攻读博士期间在导师韩香娥教授的指导下进行的研究工作及取得的成果。就我所知, 除了文中特别加以标注的内容外, 书中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果, 也不包含为获得西安电子科技大学或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。相关同志对本研究所做的贡献均已在参考文献中做了明确说明。

在撰写本书的过程中，作者得到了许多人的热情鼓励和支持，在此衷心地感谢他们的帮助。本书的出版得到了临沂大学专著出版资金资助。

由于作者水平有限，书中难免有疏漏和不妥之处，希望专家、读者给予批评和指正。

作 者

2015 年 9 月

目 录

第一章 绪论	1
1.1 引言	1
1.2 小粒子光散射理论的研究现状	3
第二章 小粒子光散射的基本理论	6
2.1 光散射概述	6
2.2 小粒子光散射的基本理论	7
2.2.1 几何光学理论	7
2.2.2 Airy 理论	11
2.2.3 Lorenz - Mie 理论	13
2.2.4 Debye 级数展开	16
第三章 无限长非均匀介质圆柱对垂直入射平面波的散射	19
3.1 引言	19
3.2 无限长非均匀介质圆柱对平面波的散射	20
3.2.1 散射场的计算	20
3.2.2 散射场系数的改进算法	24
3.2.3 改进算法正确性验证	25
3.2.4 算法效率	28
3.3 算例	30
第四章 无限长非均匀介质圆柱对斜入射平面波的散射	32
4.1 引言	32
4.2 散射场理论推导	33
4.3 散射系数的改进算法	40
4.4 算法正确性验证	41

4.5	算法效率	43
4.5.1	计算区域	44
4.5.2	计算时间	44
4.6	应用	45
第五章	非均匀球、柱粒子彩虹特性	47
5.1	引言	47
5.2	非均匀柱粒子散射的 Debye 级数展开	48
5.3	非均匀柱粒子彩虹强度及频谱分布	50
5.3.1	非均匀柱粒子一阶、二阶彩虹的强度和频谱分布	50
5.3.2	重建的一阶、二阶彩虹与 Debye 级数模拟结果比较	54
5.4	多重一阶彩虹的 Debye 级数模拟	57
5.5	非均匀球粒子的彩虹模拟及彩虹重建	62
5.5.1	非均匀球粒子折射率分布	62
5.5.2	非均匀球粒子几何光学射线追迹理论	63
5.5.3	非均匀球粒子一阶、二阶彩虹强度分布特点	66
5.5.4	非均匀球粒子二阶彩虹强度分布	67
5.5.5	非均匀球粒子二阶和五阶彩虹强度的重建	69
第六章	彩虹法非均匀柱粒子折射率分布测量	71
6.1	引言	71
6.2	非均匀柱粒子的彩虹强度分布	72
6.2.1	一阶、二阶彩虹的强度分布	72
6.2.2	非均匀柱粒子 Airy 峰角位置与折射率指数因子的关系	75
6.2.3	非均匀柱粒子 Airy 峰角位置与表面折射率的关系	78
6.2.4	非均匀柱粒子 Airy 峰角位置与折射率分布的关系	80
6.3	非均匀粒子的折射率分布测量	82
6.4	激光彩虹测量系统	87
第七章	吸收介质中非均匀圆柱对平面波的散射	92
7.1	引言	92

7.2	吸收介质中无限长非均匀圆柱对平面波的散射	93
7.3	散射矩阵、散射截面、消光截面	97
7.4	散射场系数的计算	99
7.5	算法验证	100
7.6	数值算例	103
参考文献		106

第一章 绪 论

1.1 引 言

随着科学技术的发展,在各种工业过程中研究和测量小粒子光学特性的要求越来越广泛和迫切。如大气环境科学中,对大气中的悬浮粒子、雨滴、冰晶的研究;在环保领域中,测量有害污染物的浓度;在生物医学中,对生物细胞的研究;在化学工业中,对输送物料的多相流的浓度和速度的非接触测量;以及在激光多普勒技术中,研究粒子的形状、尺寸、折射率分布和运动速度都具有重要的意义。为方便研究问题,对粒子形状经常采用一些简单模型,如将粒子简化为球形、柱形、椭球等。球形粒子的散射研究已经相当系统和完善,并且研究成果被广泛应用于各种光学测量中,取得了很好的社会效益和经济效益;相对来说非球形和非均匀粒子的散射研究,比较欠缺,相关研究理论主要有射线理论和基于边界条件的严格解析解的电磁场理论。其中,非球形粒子的光散射一直是许多领域的科学家感兴趣的问题,非球形粒子的散射理论在天体物理学、地球物理学、光学、微观物理学、生物学、胶体化学、声学、军事科学以及其他领域都有重要和广泛的应用。特别是激光被广泛应用于通信、雷达遥感、测距和探测目标中后,非球形粒子在传输中对光的散射和吸收作用受到了重视。在上述研究和测量技术的开发和应用中,采用激光测量是一种重要的手段,因此粒子对激光的散射和吸收作用是近几年的研究热点。

光学测量技术由于具有非接触、准确、快速的优点,一直受到人们的重视。自从激光问世以来,其理论研究和应用技术都有了飞速的发展,基于弹性光散射的粒度分析技术,如相多普勒、消光法、彩虹技术、小粒子成像技术在多相流、燃烧过程、流体力学、生物物理学、发动机、化工、环保等研究中有着广泛的应用。随着激光技术的发展和微弱信号检测技术的提高,基于粒子光散射理论的各种检测方法得到了广泛的应用。光通过微小粒子时会发生散射现象,散射光的性质、强度分布、偏振特性、光谱特性等都与散射体本身的特性有关,通过观测散射光的有关参量,可得到散射体本身结构的很多信息。

相多普勒仪(PDA)作为激光多普勒仪的新一代测量仪器,从20世纪80年代中期开始得到了飞速发展和广泛应用。它不但可以同时测量粒子的速度和大小,还可以进行粒子折射率、粒子表面曲率等特性的测量,为多相流、燃烧、化工、环保和喷雾过程的研究提供了有力的测量工具。

消光法(或称全散射法)依据单次散射理论,根据入射光通过被测粒子群的透射率谱分布测量微小粒子的尺寸分布(通常小于入射光波波长,粒子的数密度比较小),在粒度测量的许多领域被广泛采用。该方法的优点是测量速度快,可同时对大量的粒子进行测量并获得尺寸分布。但是,该方法无法进行大粒子尺寸的测量与反演。

小粒子成像是粒度测量的另一种方法。粒子图像测量技术(PIV)在现代流场中发挥了重要作用,是流场测速研究的发展方向之一。流场测速新方法的研究中,至今已发展了LDV(Laser Doppler Velocity)、PIV(Particle Image Velocity)等技术。LDV的综合性能较高,具有高精度、高分辨率和非接触测量等优点,通常作为仪器标校技术使用,但LDV只能实现单点测量。而PIV技术是一种全场、动态、非接触测量手段,已获得广泛使用,并成功应用于风洞、水洞、水槽燃烧及喷射等实验中。PIV的研究始于20世纪80年代,随着光学和计算机图像处理技术的迅猛发展,PIV取得了长足进步,许多研究成果已实用化,特别是常规二维PIV已相当成熟。技术进步新的要求和流场测速新课题挑战的不断出现,迫切需要三维PIV的深入研究。已出现的三维PIV主要有以下几种:PIV、PTV和全息(HPIV)等。

彩虹测量仪是利用光散射法对粒子直径、折射率(分布)等参量进行测试的方法之一。J. P. A. J. van Beeck(1997)在其博士论文中研究了均匀球粒子的彩虹现象,提出了一种同时测量粒子直径、温度和速度的非接触测量方法。传统测试方法根据彩虹角的位置和Airy峰的间距测量均匀球、柱粒子的折射率和直径,具有较高的精度。韩(2000)在博士论文中实现了粒子直径和折射率的同时、非接触的高精度测量。很多学者也研究了均匀、涂层球、柱粒子的彩虹散射特性。James A. Lock研究了球形粒子对高斯波束的散射形成的高阶彩虹现象。C. W. Chan等从理论上研究了利用高阶彩虹测量液珠的折射率。Charles L. Alder等研究了多重一阶彩虹现象,可以用来测量分层粒子的厚度,这是目前比较热门的测试技术之一。姜等从理论上初步研究了非均匀球粒子的彩虹现象,取得了一定的成果。J. P. A. J. van Beeck等利用彩虹测试技术和其他理论的结合来测量多个粒子的参量。James A. Lock等、李仁先等利用Debye级数研究了均匀、非均匀球以及柱粒子的彩虹现象,从几何光学角度给出了彩虹

现象的物理解释。已飞速发展的光散射理论和计算程序可以精确计算均匀和非均匀球形粒子和圆柱形粒子散射光强度角分布,为改进和扩展这一测量技术的测量范围提供了有力工具。彩虹强度分布的精细结构不仅可以用来高精度测量均匀粒子的折射率和直径,而且为测量、反演非均匀粒子折射率(或温度)分布提供了丰富的信息,使得利用彩虹技术进行非均匀粒子折射率分布的测量成为可能, Maria Rosaria Vetrano、J. P. A. J. van Beeck 等学者正在研究,并有了初步的成果。在此基础上,本书进一步研究了非均匀粒子的光散射特性,主要从理论上探讨了非均匀粒子的折射率分布的测量方法,为利用光散射法进行非均匀粒子折射率分布和直径等参量的同时测量提供了理论基础。

1.2 小粒子光散射理论的研究现状

研究粒子的电磁散射和光散射特性,早已成为一项重要的研究课题。在处理许多实际问题时,为了方便研究问题,经常采用一些简单模型,如将粒子简化为球形、圆柱形、椭球等。

球形粒子的散射研究已经相当系统和完善。从导体球到单层均匀介质球,再到多层介质球,从无耗到有耗,从各向同性到各向异性,从平面波入射到有限波束入射,以及波束的离轴、在轴入射等,研究成果已被广泛应用于各种光学测量中,取得了很好的社会效益和经济效益。有关球的散射问题已有众多学者研究过,对于各向同性的均匀球形粒子对平面波的散射,1908年, Lorenz 和 Mie 分别利用著名的 Maxwell 方程,求解了均匀介质的球形粒子对平面电磁波的散射,称为 Lorenz - Mie 理论。Van de Hulst 给出了由吸收物质和非吸收物质构成的球状、柱状和盘状粒子的详细计算。Aden 和 Kerker 在 1951 年首先给出了涂层球形粒子散射的公式,并进行了详细的讨论。Kerker(1969)研究多层球粒子的电磁散射,获得了计算球粒子电磁散射系数的矩阵公式。Toon(1981)给出了计算球形粒子散射的一种数值方法。Bohren(1983)等分别做了这方面的工作。吴振森、王一平(1991)提出了一种计算多层球散射场的改进数值方法。吴振森、郭立新等(1997)进一步提出了多层球对平面波和波束散射的改进算法,大大扩展了所能计算的球粒子的尺寸参量和分层数。Bruning 和 Lo 提出了精确求解两个球形粒子组成的系统对平面波散射的方法。白璐研究了群聚球形粒子对平面波的散射以及多粒子对高斯波束的相干散射。

有关无限长圆柱体的电磁散射问题研究由来已久。无限长均匀圆柱体对垂直入射平面电磁波的散射问题早在 1881 年即被 Lord Rayleigh 解决,并在文献

中详细地叙述了；平面波垂直入射无限长非均匀圆柱体的电磁散射理论在文献中也有介绍，吴振森等给出了详细推导。Kozaki、郭立新等、Mees Loic 深入研究了无限长均匀圆柱对有限波束的电磁散射理论。Wait、Barabas、Gurwich 等详细阐述了平面波斜入射均匀、非均匀柱体的电磁散射理论。Yuan 等、Peterson 等、Bussey 等、M. Barabas、吴振森等分别用不同算法对分层以及多层圆柱对垂直入射平面波的散射场的计算进行了研究。但相对理论研究而言，相应的算法相对滞后，并且还有大量工作需要改进完善以适应实际问题的需要。

另外，吸收介质中的粒子散射特性研究也是很重要的课题之一。吸收介质中非球形粒子主要发生在海洋、地球和大气系统中，比如海洋中微生物的遥感探测，地下目标的无损探测以及大气传输中的辐射传输模型等。因此研究非球形粒子在吸收介质中的电磁散射特性是非常必要的，其中圆柱形粒子是一个非常简单的模型。吸收介质中的均匀介质圆柱消光机理已经被研究过，但是自然界中大部分实际可以近似看做柱体的散射体都是非均匀介质，因此吸收介质中无限长非均匀圆柱的散射、吸收特性的研究是非常重要的。为此，本书还研究了吸收介质中无限长非均匀介质圆柱对垂直入射平面波的散射特性。

有关均匀、分层椭球粒子对平面波和有形波束的散射问题的研究也有很多学者研究过。F. Michael Schulz 等用 T 矩阵方法研究了椭球粒子在平面波中的散射问题。Bateshwar P. Sinha 等研究了两个平等放置的长导体椭球的平面波散射。Shoji Asano 利用分离变量法求解了椭球粒子在平面波中的散射，提出了一种处理边界条件的理论方法，较好地解决了边界问题。韩一平等重新推导了边界条件，纠正了 Asano 边界条件推导中的错误，深入研究了椭球粒子对高斯波束的散射，进一步的研究工作还正在进行。

粒度分析的光散射法以其快速、非接触测量等优点日益受到人们的重视。但将光散射法用于粒度测量还是近十几年的事情。许多学者已经对均匀球、柱粒子的彩虹测试技术进行了深入的研究，并且给出了高精度、同时测量均匀粒子直径和折射率的方法。考虑到许多实际过程中的粒子通常是非均匀的，如在发动机的燃油喷雾燃烧室中，其油珠的温度分布通常是非均匀的，而我们知道液体材料的折射率与温度密切相关，这表明上述过程中的粒子折射率分布为非均匀的。非均匀粒子尺寸和折射率分布的测量，对于探测发动机中的喷雾过程、温度和燃烧效率具有实际意义。又如光纤通信能力或带宽主要取决于光纤剖面的折射率分布，而对于梯度塑料光纤当其折射率为标准抛物线分布时，可以得到最好的带宽等光纤通信特性。因此，对于 GI-POF 折射率分布的准确

测量就变得非常重要。准确测量光纤折射率分布,可以直接得到光纤通信特性,对于光纤的设计、制造和评价来说十分重要,同时还可以得到光纤的最大理想数值孔径。由此可见,非均匀粒子折射率分布等参量的测量是非常必要的。

但是,目前对于非均匀粒子的探测还没有有效、完善的方法,而彩虹方法在探测粒子非均匀特性方面是最有潜力的方法之一。目前, Maria Rosaria Vetrano、J. P. A. J. van Beeck、Anders 和 Roth、Grehan 等、韩等对非均匀液珠的彩虹现象均有一定的研究,给出了非均匀球形液滴彩虹的 Airy 峰角位置与折射率分布的变化关系。Charles L. Alder、James A. Lock 等研究了分层粒子的多重一阶彩虹现象,可以用来测量分层粒子的厚度。由于非均匀柱粒子散射场计算的局限性,对非均匀柱粒子的研究很少。本书在前人工作的基础上,从理论和实验两方面进行了非均匀粒子光散射特性及折射率分布测量的研究工作。

第二章 小粒子光散射的基本理论

本章详细介绍了小粒子光散射的基本理论:几何光学理论、Airy 理论、Lorenz - Mie 理论以及 Debye 级数展开等,涉及均匀(或非均匀)球粒子和柱粒子对平面波(或有形波束)的散射。这几种理论分别从几何光学、物理光学和电磁场理论等几个方面解释了小粒子光散射的基本原理。

2.1 光 散 射 概 述

光散射是指光线通过不均匀介质而偏离其原来的传播方向,散开到所有方向的现象。众所周知,在均匀介质中,光线将沿原来的方向传播而不发生散射现象。当光线从一均匀介质进入另一均匀介质时,根据麦克斯韦电磁场理论,它只能沿着折射光线的方向传播,这是由于均匀介质中偶极子发出的次波具有与入射光相同的频率,并且偶极子发出的次波间有一定的位相关系,它们是相干的,在非折射光的所有方向上相互抵消,所以只发生折射而不发生散射。

如果在均匀介质中掺入一些大小为波长数量级且杂乱分布的颗粒物质,它们的折射率与周围均匀介质的折射率不同,如胶体溶液、悬乳液、乳状物等,原来均匀介质的光学均匀性就会遭到破坏,次波干涉的均匀性也会受到破坏。这种含有不均匀无规则分布的颗粒物质的介质引起了光的散射,称为亨达尔散射(Tygdall)。这时,散射光的强度分布及偏振规律与散射体的大小、散射体相对周围介质的折射率有关。

有些介质表面看来均匀纯净,但在介质内部由于密度的起伏,介质中存在着局部密度和平均密度之间统计性的偏离而破坏了其光学均匀性,也会引起光的散射,如大气散射,这种散射称为分子散射。当物质处在气、液二相的临界点时密度涨落很大,光波照射其上就会产生强烈的分子散射,这种散射光称为

临界乳光。上述两种散射(亨达尔散射和分子散射),其散射光的波长(或频率)与入射光一致。除此之外,还有一种散射,称为拉曼散射(Raman),其散射光中除了存在与入射光相同波长(或频率)的散射外,还存在其他波长(或频率)的散射。

当一束光入射到均匀介质中的单个粒子时,粒子周围会产生散射现象。小粒子的光散射包括均匀、非均匀粒子对平面波或有形波束的散射。小粒子是指宏观上的粒子,一般在微米量级,小粒子形状是有规则的,比如球形、圆柱形、椭球粒子等,也有不规则形状的粒子。在研究光散射现象时,常常引入散射光强、散射截面、吸收截面、消光截面以及相应的散射系数、吸收系数和消光系数等物理量。这些物理量与散射颗粒的大小、折射率以及入射光的波长等因素存在密切的关系。本书主要研究均匀介质中非均匀球形、圆柱形等规则形状粒子对平面波的光散射特性。

2.2 小粒子光散射的基本理论

本节主要介绍小粒子光散射的基本理论:几何光学理论、Airy 理论、Lorenz - Mie 以及 Debye 级数展开。

2.2.1 几何光学理论

图 2.1 为一束平行光照射到一球形透明粒子,光线在球表面反射和折射后的几何示意图,其中 N 为光线与球表面的相互作用次数(相互作用包括反射和折射)。当 $N=1$ 时,表示由球粒子表面直接反射的反射光, $N=3$ 的光线可能产生一阶彩虹(光线在球粒子内表面经历了一次反射); $N=4$ 的光线可产生二阶彩虹(光线在球粒子内表面经历了两次反射);光线在球粒子内部经历 $N-2$ 次反射后的透射光线,可形成 $N-2$ 阶彩虹。散射角 θ ,入射角 τ ,以及内部折射角 τ' 之间的关系为

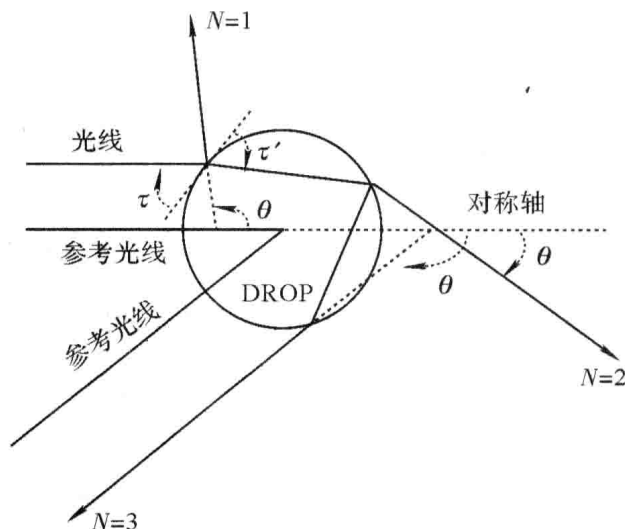


图 2.1 光线在球表面反射和折射后的几何路径示意图

$$\theta = 2\tau - 2(N-1)\tau' \quad (2-1)$$

其中, N 为散射光经历球粒子表面的次数。 τ 和 τ' 之间满足 Snell 定理, 即

$$\cos\tau = m\cos\tau' \quad (2-2)$$

其中, m 是粒子的复折射率, 这里假设环境折射率为 1。由式(2-1)和式(2-2)可以看出, 散射角 θ 为入射角 τ 和折射率 m 的函数。

实验表明, 散射光经历一次、两次或三次内表面反射(对应 $N=3, 4$ 和 5)时, 其散射角各有自己的存在范围, 而且均存在有极限角, 如当 $m=1.33$ 时, $N=3$ 的光线, 其散射角有一个极小值, 大约为 138° 。 $N=4$ 的光线, 其散射角有一个极大值, 大约为 129° 。 $N=5$ 的光线, 其散射角有一个极大值, 大约为 43° 。这些极限值实际上就对应它们的几何光学彩虹角。

利用上面给出的几何光学关系式(2-1)和式(2-2), 并考虑到几何光学彩虹角均为各自散射角的极值, 可以推导出各个阶次几何光学彩虹角的数学表达式, 具体过程如下:

对式(2-1)求微分, 并注意到对于各阶彩虹, 当 $N \geq 3$ 时, 有

$$\left. \frac{d\theta}{d\tau} \right|_{N \geq 3} = 0 \quad (2-3)$$

我们可以获得 $(N-2)$ 阶几何光学彩虹角 θ_{rg} , 即

$$\theta_{rg} = 2\tau_{rg} - 2(N-1)\arccos\left(\frac{1}{m}\cos\tau_{rg}\right) \quad (2-4)$$

其中, τ_{rg} 满足下面表达式

$$\sin\tau_{rg} = \sqrt{\frac{m^2 - 1}{(N-1)^2 - 1}} \quad (2-5)$$

显然,几何光学彩虹角与球粒子的折射率大小有关。

以上介绍的是均匀球粒子散射的几何光学理论,和非均匀球粒子的主要区别在于光线在均匀球粒子内部沿直线传播,在非均匀球粒子内部沿曲线传播,如图 2.2 所示。 τ 是入射角, τ' 是内部折射角,实线表示的是在均匀折射率为 m 的粒子中的传播光路;虚线代表的是非均匀粒子中折射率 $m[\tilde{r}] = m_0 - (m_0 - m_1)\tilde{r}$ 呈线性变化的光路。 θ_0 和 θ 分别表示非均匀球粒子和均匀球粒子的散射角。

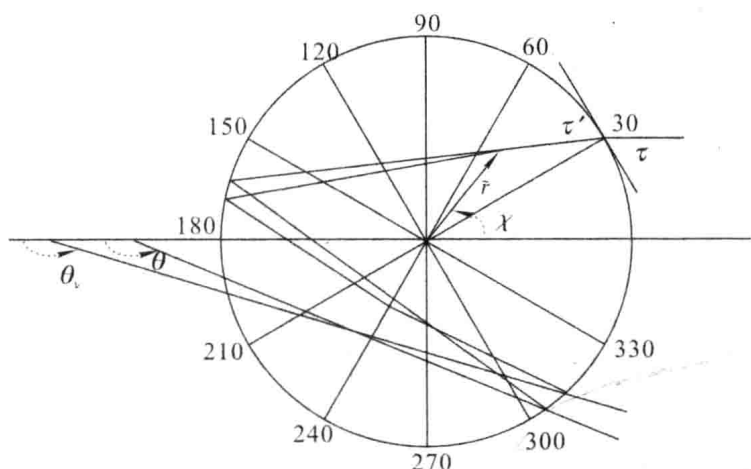


图 2.2 均匀和非均匀球粒子内部光线传播光路比较

假设 r 代表球粒子的球心到光线任意一点的位移矢量, s 代表从固定点到该点的长度,光线的矢量微分方程可以写成

$$\frac{d}{ds} \left(m \frac{dr}{ds} \right) = \nabla m \quad (2-6)$$

对于折射率为 $m[\tilde{r}]$ 的球对称的非均匀球粒子来说,式(2-6)可以写成无量纲的形式,即

$$\frac{\partial \chi}{\partial \tilde{r}} = \frac{c}{\tilde{r} (m[\tilde{r}]^2 \tilde{r}^2 - c^2)^{1/2}} \quad (2-7)$$

其中, $c = m_e \cos \tau$ 是一个常数, m_e 是外界环境的折射率, $\tilde{r} = r/R$ 是球的归一化半径,变量 $[\tilde{r}, \chi]$ 表示归一化半径和位移矢量所成角度之间的关系。对于折射率为 $m[\tilde{r}] = m_0 - (m_0 - m_1)\tilde{r}^2$ 的球形粒子,式(2-7)的解是抛物线型,在 $\tilde{r} \in [\tilde{r}_m, 1]$ 区间内的解为

$$\chi_1 = c [\tilde{r}_m^2 | m_1 - m_0 | (\tilde{r}_m^2 - \tilde{r}_1^2)^{1/2}]^{-1} i \Pi \left\{ 1 - \frac{\tilde{r}_2^2}{\tilde{r}_2 m}, \arcsin \left[\left(\frac{\tilde{r}_m^2 - \tilde{r}^2}{\tilde{r}_m^2 - \tilde{r}_2^2} \right)^{1/2} \right], \frac{\tilde{r}_2^2 - \tilde{r}_m^2}{\tilde{r}_1^2 - \tilde{r}_m^2} \right\} \quad (2-8)$$

式中, $\Pi(k; \varphi | m)$ 是第三类(纯虚数)椭圆积分, $\tilde{r}_m$ 是光线到球心的最短距离,