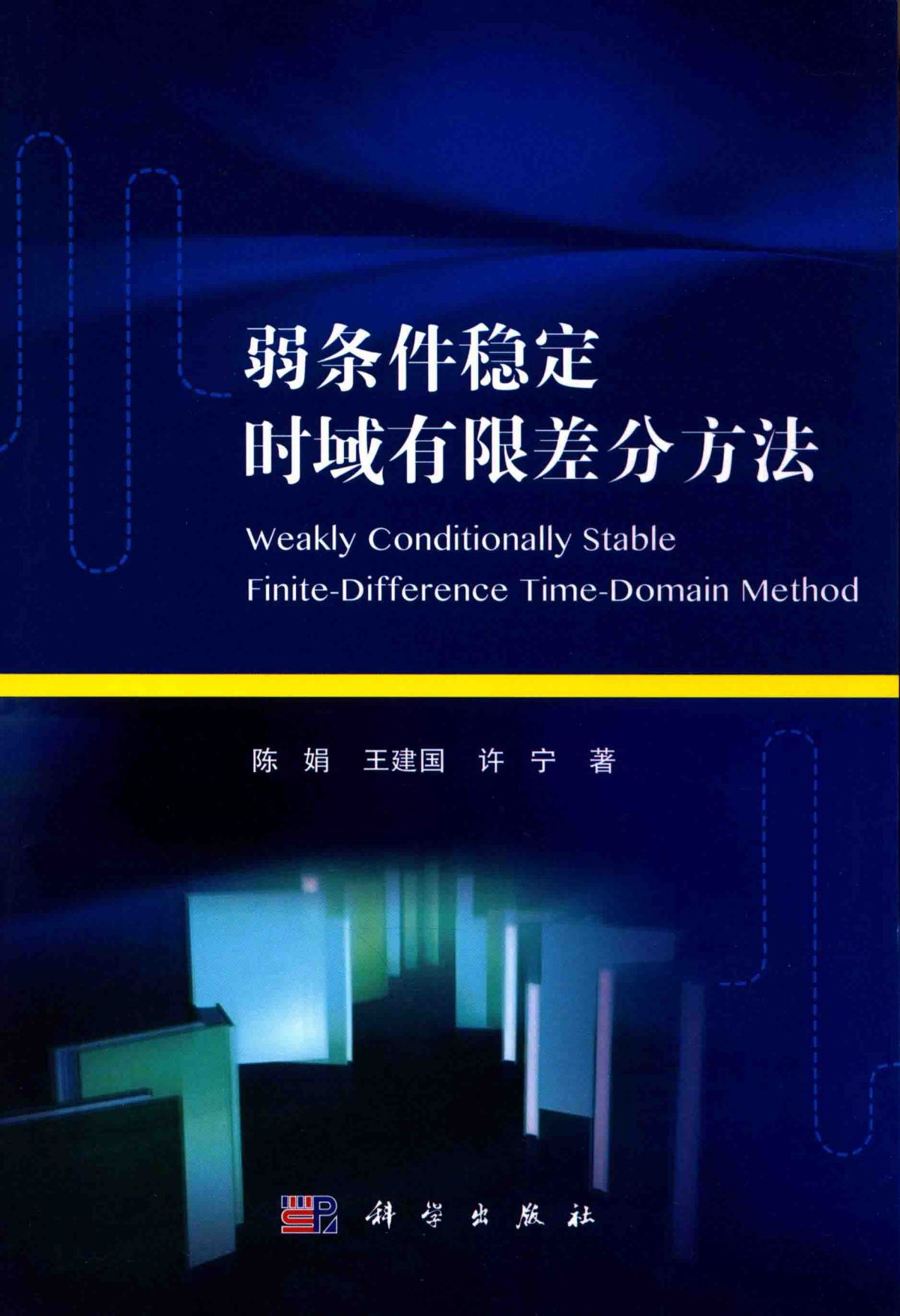




弱条件稳定 时域有限差分方法

Weakly Conditionally Stable
Finite-Difference Time-Domain Method

陈 娟 王建国 许 宁 著



科学出版社

弱条件稳定时域有限差分方法

Weakly Conditionally Stable Finite-Difference Time-Domain Method

陈 娟 王建国 许 宁 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书主要介绍时域有限差分方法的多种快速算法,包括双向弱条件稳定 FDTD 方法、单向弱条件稳定 FDTD 方法和无条件稳定 FDTD 方法,具体内容包括:方法的公式推导、时间稳定性条件的证明、数值色散特性分析、连接边界和吸收边界的设置以及这些方法在圆柱坐标、旋转对称坐标、色散媒质和周期结构中的应用,书中对这些方法的计算精度、计算效率和内存需求进行详细比较,并采用大量的数值算例对算法进行验证。

本书可作为研究生教材,也可作为相关专业研究人员、高校教师和高年级本科生的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

弱条件稳定时域有限差分方法/陈娟,王建国,许宁著. —北京:科学出版社,2016.3

ISBN 978-7-03-047381-3

I. ①弱… II. ①陈… ②王… ③许… III. ①电磁计算—有限差分法 IV. ①TM153

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 031960 号

责任编辑:余 丁 闫 悦 / 责任校对:郭瑞芝

责任印制:张 倩 / 封面设计:迷底书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新科印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 3 月第 一 版 开本:720×1 000 1/16

2016 年 3 月第一次印刷 印张:11 1/2

字数:220 000

定价:55.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

时域有限差分 (finite-difference time-domain, FDTD) 方法自 Yee 于 1966 年提出以来发展迅速, 获得了广泛应用。然而, 由于该方法需要满足时间稳定性条件, 所以其时间步长主要受空间最小网格尺寸的限制。这就使得该方法在模拟具有精细结构的电磁问题时, 计算效率明显不足。时间稳定性条件限制了 FDTD 方法在薄层结构、突变结构以及多尺度复杂结构等问题中的应用。为了克服这一缺点, 近年来, 研究者提出许多改进方法, 其中最为典型的方法有双向弱条件稳定 FDTD 方法、单向弱条件稳定 FDTD 方法和无条件稳定 FDTD 方法。但是, 目前这些方法均散见在一些期刊文献中, 没有专门的书籍对此进行系统深入的分析。本书对上述三种方法进行深入细致的讨论, 给出三种方法详细的数学推导过程, 对三种方法的时间稳定性条件、数值色散特性、连接边界和吸收边界的设置等问题进行详细分析, 并阐述这些方法在圆柱坐标、旋转对称坐标、色散媒质和周期结构中的应用。书中对这些方法的计算精度、计算效率和内存需求进行详细比较, 并采用大量的数值算例对各种方法的计算性能进行验证。

本书共 6 章。第 1 章为引言。第 2 章介绍 FDTD 方法的基本理论。第 3~5 章对双向弱条件稳定 FDTD 方法、单向弱条件稳定 FDTD 方法和无条件稳定 FDTD 方法进行详细的阐述, 具体内容包括这些方法的公式推导、时间稳定性条件的证明、数值色散特性分析、连接边界和吸收边界的设置等, 并讨论了这些方法在工程电磁学中的应用。第 6 章对这三种方法的计算精度、计算效率和内存需求进行详细比较。

本书的形成与课题组多年的科研工作是分不开的, 在此感谢先后与我们一起工作的同事和同学, 他们是张安学教授、黄斌科教授、蒋延生教授、田春明博士等。

感谢国家自然科学基金对课题组的大力支持, 本书的部分内容是在国家自然科学基金项目 61231003、61001039 资助下完成的研究成果。

限于作者学识水平, 书中难免有不足与疏漏, 热忱欢迎专家、学者和读者对本书提出宝贵意见。

作 者

2015 年 9 月

目 录

前言

第 1 章	引言	1
1.1	电磁学中的数值研究方法概述	1
1.2	FDTD 方法简介	2
1.3	FDTD 方法的快速算法	3
1.4	本书目的和内容安排	4
第 2 章	FDTD 方法的基本理论	6
2.1	FDTD 方法的基本公式	6
2.1.1	Maxwell 方程组和 Yee 元胞	6
2.1.2	三维直角坐标中的 FDTD 公式	8
2.2	FDTD 方法的时间稳定性条件	11
2.3	FDTD 方法的数值色散特性	14
2.4	FDTD 方法中源的设置	16
2.4.1	FDTD 方法中电/磁流源的设置	16
2.4.2	FDTD 方法中理想导体条件的设置	16
2.4.3	FDTD 方法中连接边界的设置	16
2.5	FDTD 方法的吸收边界	20
2.6	圆柱坐标系下的 FDTD 方法	24
2.7	旋转对称坐标系下的 FDTD 方法	26
2.8	色散媒质中的 FDTD 方法	28
2.9	周期结构中的 FDTD 方法	30
2.9.1	Floquet 定理	30
2.9.2	周期边界的 FDTD 实现	31
2.10	本章小结	33
第 3 章	双向弱条件稳定 FDTD 方法	34
3.1	双向弱条件稳定 FDTD 方法的基本公式	34
3.2	双向弱条件稳定 FDTD 方法的时间稳定性条件	38
3.3	双向弱条件稳定 FDTD 方法的数值色散特性	42
3.4	双向弱条件稳定 FDTD 方法中源的设置	45

3.4.1	双向弱条件稳定 FDTD 方法中电/磁流源的设置	45
3.4.2	双向弱条件稳定 FDTD 方法中理想导体的设置	52
3.4.3	双向弱条件稳定 FDTD 方法中连接边界的设置	55
3.5	双向弱条件稳定 FDTD 方法的吸收边界	63
3.6	双向弱条件稳定 FDTD 方法的计算精度和计算效率	68
3.7	双向弱条件稳定 FDTD 方法在工程电磁问题中的应用	69
3.8	圆柱坐标系下的双向弱条件稳定 FDTD 方法	73
3.9	旋转对称坐标系下的双向弱条件稳定 FDTD 方法	77
3.10	色散媒质中的双向弱条件稳定 FDTD 方法	80
3.11	周期结构中的双向弱条件稳定 FDTD 方法	84
3.12	双向弱条件稳定 FDTD 方法的研究进展	86
3.13	本章小结	86
第 4 章	单向弱条件稳定 FDTD 方法	87
4.1	单向弱条件稳定 FDTD 方法的基本公式	87
4.2	单向弱条件稳定 FDTD 方法的时间稳定性条件	92
4.3	单向弱条件稳定 FDTD 方法的数值色散特性	95
4.4	单向弱条件稳定 FDTD 方法的计算精度和计算效率	98
4.5	单向弱条件稳定 FDTD 方法的近似算法	99
4.5.1	N-O-D WCS FDTD 方法的基本公式	100
4.5.2	N-O-D WCS FDTD 方法的时间稳定性条件	106
4.5.3	N-O-D WCS FDTD 方法的数值色散特性	108
4.5.4	N-O-D WCS FDTD 方法的计算精度和计算效率	111
4.5.5	N-O-D WCS FDTD 方法在工程电磁问题中的应用	113
4.5.6	N-O-D WCS FDTD 方法在曲面边界模拟中的应用	115
4.5.7	圆柱坐标系下的 N-O-D WCS FDTD 方法	119
4.5.8	旋转对称坐标系下的 N-O-D WCS FDTD 方法	123
4.5.9	色散媒质中的 N-O-D WCS FDTD 方法	125
4.5.10	周期结构中的 N-O-D WCS FDTD 方法	132
4.6	单向弱条件稳定 FDTD 方法的研究进展	134
4.7	本章小结	135
第 5 章	无条件稳定 FDTD 方法	136
5.1	CN-FDTD 方法的基本公式	136
5.2	ADI-FDTD 方法的基本公式	139
5.3	ADI-FDTD 方法的时间稳定性条件	145
5.4	ADI-FDTD 方法的数值色散特性	147

5.5	ADI-FDTD 方法的数值验证	150
5.6	本章小结	152
第 6 章	几种数值方法的比较	153
6.1	几种方法的色散特性比较	153
6.2	几种方法的数值性能比较	157
6.2.1	几种方法的近似误差	157
6.2.2	几种方法的精度及内存需求	159
6.2.3	结论	165
6.3	本章小结	166
参考文献		167

第1章 引言

本章首先对电磁学中现阶段常用的数值方法进行简单介绍,回顾时域有限差分(finite-difference time-domain, FDTD)方法的基本原理,简单阐述 FDTD 方法的优缺点,对 FDTD 方法的几种快速算法进行详细介绍,并给出本书的研究目的和内容安排。

1.1 电磁学中的数值研究方法概述

自 1873 年麦克斯韦(Maxwell)建立电磁场基本方程以来,电磁波理论已有一百多年的历史,在天线、雷达、无线通信、遥感、生物电磁学、光学及高速电路等方面得到了广泛应用。电磁理论研究在历史上受一定条件的限制,数学发展程度、近似方法理论和计算机技术等,都会对其研究方式产生巨大的影响。20 世纪 30 年代以前,研究方法一般采用严格的解析方法,较为经典的是 Mie 理论和 Sommerfeld 积分理论。它们虽然能够体现物理问题的核心思想,并能提供明确的物理意义,但由于可以得到解析解的问题太少,所以其在实际应用中存在着较大的局限性。20 世纪 30 年代到 60 年代初,各种近似解析方法开始逐步出现。其基本思想是针对具体物理问题,通过数学上的某些近似,简化或转化成可求解问题。近似解析方法使得求解的范围有了一定程度的扩展。从 20 世纪 60 年代至今,电磁场的数值方法成为关注的热点。一方面由于求解问题的复杂化,很多问题无法用解析解或者近似解得到;另一方面由于计算机技术的发展,应用计算机替代人工完成烦琐的计算成为可能。

当代计算电磁学中的数值模拟方法主要有三大类。第一类是以电磁场问题的微分方程为基础的数值模拟方法,称为微分方程方法,如 FDTD 方法^[1]、有限元法^[2-4]等。第二类是以电磁场问题的积分方程为基础的数值模拟方法,称为积分方程方法,如矩量法^[5]和体积分方程法^[6]等。第三类就是各种混合方法,大致可以分为:体积分方程法和表面积分方程法混合、解析方法和数值方法混合、高频方法与低频方法混合以及时域和频域方法混合等。下面对常用的数值研究方法矩量法、有限元法以及 FDTD 方法进行简单介绍。

矩量法是一种将算子方程转化为矩阵方程,然后求解矩阵方程的方法。矩量法的求解步骤为:①建立求解问题的算子方程,并将未知量展开为由基函数构成的级数;②选取检验函数;③由内积构成矩阵方程;④解矩阵方程,求得未知量。该方法主要适用于分析复杂目标的散射、导线的辐射和天线的电流分布等问题。近年来,随着各

种快速方法的提出和计算机性能的提高,以矩量法为基础的一些高效方法(如快速多极子方法)得到了广泛的应用^[7]。

有限元法是由 Courant 于 1943 年提出的,其基本原理是用许多子域来代表整个连续区域。它的分析步骤为:①区域的离散或子域的划分;②插值函数的选择;③方程组的建立;④方程组的求解。该方法主要适用于对非均匀目标的求解,它能对复杂几何形状、复杂非均匀目标灵活方便地进行离散与网格剖分。有限元法最开始用于飞机设计,后来随着计算机的发展,该方法逐渐应用到结构分析、流体力学、振动、电磁学等许多复杂的工程问题中。近年来,有限元法的一个重大进展就是时域有限元法的提出和发展^[4]。时域有限元法既能像下面介绍的 FDTD 方法那样灵活方便地处理时间变量,进行时间离散,同时又能像有限元法那样灵活处理复杂的形状、复杂非均匀介质等问题。因此,时域有限元法广泛应用于复杂非均匀介质的时域电磁响应分析^[4]。

FDTD 方法是由 Yee 于 1966 年提出的^[1],该方法是求解 Maxwell 微分方程的直接时域方法。它直接用差分代替 Maxwell 时域旋度方程中的微分,得到关于场分量的有限差分格式,通过建立时间离散的递进序列,在相互交织的网格空间中交替计算电场和磁场。它的分析步骤是:①对电磁场的 E 、 H 分量在空间和时间上采取交替抽样的离散方式;②每个 E (或 H) 场分量周围有四个 H (或 E) 场分量环绕;③应用这种离散方式将时间变量的 Maxwell 旋度方程转化为一组差分方程;④在时间轴上逐步推进地求解空间电磁场。

1.2 FDTD 方法简介

FDTD 方法自诞生以来,很快在电磁场的数值计算领域得到了广泛应用^[8-28]。这是因为它具有非常突出的优点。①直接时域计算。FDTD 方法作为一种瞬态方法,在脉冲源的激励下,通过一次时域分析计算,经傅氏变换后便可获得丰富的频域信息。②容易对复杂结构建模。在 FDTD 方法的计算中,由于目标的电磁参数已经反映在每一个网格的计算中,所以它能够实时再现场的空间分布,并且能够精确模拟各种物体的辐射特性或散射特性。③节约计算机的存储空间和计算时间。FDTD 方法不需要对矩阵求逆,如果网格的总数为 N ,则 FDTD 方法所需的存储空间和计算时间均与 N 成正比。④适合并行计算。FDTD 方法中,每个网格点上的电场(或磁场)分量仅与它相邻的磁场(或电场)分量有关,这使得它特别适合于并行计算,从而节约了大量的存储空间和计算时间。⑤方法的通用性。因为 FDTD 方法是直接建立在 Maxwell 方程组上的一组差分方程,所以其对电磁问题的求解具有通用性。

尽管 FDTD 方法具有上述优点,但由于它是由 Maxwell 方程组离散后得到的显式差分方法,所以其必须满足时间稳定性条件,即

$$\Delta t \leq 1 / \left(c \sqrt{1 / (\Delta x)^2 + 1 / (\Delta y)^2 + 1 / (\Delta z)^2} \right) \quad (1-1)$$

式中, c 表示计算区域中电磁波的传播速度; Δx 、 Δy 和 Δz 分别表示 x 、 y 和 z 方向上的空间网格长度。式 (1-1) 表明 FDTD 方法的时间步长主要由计算空间中空间网格长度的最小值决定。因此, 当模拟目标具有精细结构时, 为了精确模拟其电磁特性, 空间网格必须足够小, 那么根据稳定性条件, 时间步长也需要相应地取得很小, 这就使得计算的总时间步数猛增, 有时甚至达到无法实现的地步。随之带来的问题是不但大大增加了计算时间, 而且由于计算时间步数过长会使误差累积, 致使计算精度下降甚至计算结果发散。时间稳定性条件限制了 FDTD 方法在薄层结构、突变结构以及多尺度复杂结构等问题中的应用, 这是 FDTD 方法最明显的一个缺点。

1.3 FDTD 方法的快速算法

为了克服 FDTD 方法中空间网格长度对时间步长的限制, 近年来, 研究者提出了许多改进算法, 其中最为典型的是交替方向隐式 (alternating-direction implicit) 时域有限差分 (ADI-FDTD) 方法^[29-39]、双向弱条件稳定 FDTD 方法^[40-52]和单向弱条件稳定 FDTD 方法^[53-63]。

1999 年, 日本学者 Namiki 将交替隐式差分技术与传统 FDTD 技术相结合^[29], 提出了 ADI-FDTD 方法。该方法的计算过程与传统 FDTD 方法不同, 它将原来传统的一个时间步分成两个时间分步, 每一个时间分步中, 对不同变量的空间求导采用隐式差分近似, 这就使得该方法的时间步长与空间网格长度无关, 可以取任意值。由于这种方法突破了传统 FDTD 方法的时间稳定性条件, 所以在模拟具有精细结构的电磁问题时, 该方法可选取较大的时间步长, 从而大大提高了计算效率。目前, ADI-FDTD 方法已经在电磁场的数值计算中得到广泛的应用。

虽然 ADI-FDTD 方法的时间步长不再受空间网格长度的限制, 但其隐式差分格式也带来不足之处, 至少表现在三个方面^[64]。一是计算精度的降低。ADI-FDTD 方法中引入分裂误差, 该误差与时间步长的平方以及场的空间变化率成正比。因此, 尽管 ADI-FDTD 方法的时间步长可以取任意值, 但是大的时间步长会带来大的计算误差。同时, 如果计算空间场的变化率较大, 那么 ADI-FDTD 方法的计算精度也会明显降低。二是计算复杂度与内存需求的增加。在 ADI-FDTD 方法中, 一次迭代分两步完成, 它总共需要求解 6 个三角矩阵方程和 6 个显式迭代方程。每一次迭代所需的计算量以及计算的复杂程度都明显大于传统 FDTD 方法。除此之外, ADI-FDTD 方法还有最为显著的一个缺点便是色散误差的增加, 尤其是在时间步长取较大值的时候。

为了减小 ADI-FDTD 方法的色散误差, 提高其计算精度, 研究者提出许多改进方法^[65-73]。其中, 应用最为广泛的是高阶 ADI-FDTD^[66-68]方法和分裂误差减小的 ADI-FDTD^[69-71]方法。前者主要用于改善 ADI-FDTD 方法的数值色散特性, 后者则侧重于提高 ADI-FDTD 方法的计算精度。但是, 两者都大大增加了 ADI-FDTD 方法的计算量以及计算复杂度, 并且性能的提高均不明显。

实际的电磁问题中, 模拟目标在空间三个方向上均具有精细结构的情况并不多见, 大多数的模拟物体只在一个方向或者两个方向上具有精细结构, 如细长缝隙的耦合分析, 介质贴片天线的模拟, 薄层结构在互联级的分析, 薄层涂覆电大目标的电磁散射模拟等。这些结构只需要在一个方向或者两个方向上采用小网格进行剖分。因此, 对这些结构进行数值分析, 并不需要采用一种时间步长与三个方向的空间网格长度均无关的 FDTD 算法 (如 ADI-FDTD 方法), 实际上, 只要时间步长与最小的空间网格长度无关, 便可得到很高的计算效率。

基于上述思想, 近年来作者提出了两种新的弱条件稳定 FDTD 方法: 双向弱条件稳定 (two-directional weakly conditionally stable, T-D WCS) FDTD 方法^[40-52]和单向弱条件稳定 (one-directional weakly conditionally stable, O-D WCS) FDTD 方法^[53-63]。双向弱条件稳定 FDTD 方法的时间步长只由两个方向上的空间网格长度决定, 其适合于沿一个方向具有精细结构的电磁问题的模拟; 单向弱条件稳定 FDTD 方法的时间步长只由一个方向上的空间网格长度决定, 其适合于沿两个方向具有精细结构的电磁问题的模拟。这两种弱条件稳定 FDTD 方法的时间步长均与空间的精细网格长度无关, 因此, 在模拟具有精细结构的电磁问题时, 这两种方法相对于传统 FDTD 方法, 计算效率大大提高。

双向弱条件稳定 FDTD 方法中, 一次迭代需要求解 2 个三角矩阵方程和 4 个显式迭代方程; 单向弱条件稳定 FDTD 方法中, 一次迭代需要求解 4 个显式迭代方程和 4 个隐式迭代方程。因此, 相对于 ADI-FDTD 方法, 这两种方法的计算过程较为简单, 计算时间大大缩短, 且易于编程实现。同时, 由于弱条件稳定 FDTD 方法中不存在分裂误差, 所以相对于 ADI-FDTD 方法, 弱条件稳定 FDTD 方法的计算精度明显提高^[44,74]。

双向弱条件稳定 FDTD 方法、单向弱条件稳定 FDTD 方法和 ADI-FDTD 方法构成一套完整的 FDTD 快速求解体系, 在对实际中广泛存在的具有任意精细结构的时域电磁问题进行模拟时, 都能够进行高效的求解, 如集成电路器件中的精细结构的电磁仿真, 薄层结构在互联级的分析, 薄层涂覆电大目标的电磁散射模拟, 光滑结构和突变结构并存的混合结构时域模拟, 不同方向上尺寸差异较大的结构模拟等。

1.4 本书目的和内容安排

目前, 国内外介绍 FDTD 方法的书籍较多, 但它们大多是对传统 FDTD 方法的分析。对弱条件稳定 FDTD 方法和无条件稳定 FDTD 方法还缺乏系统深入的分析 and 讨论。

本书对弱条件稳定 FDTD 方法和无条件稳定 FDTD 方法进行详细探讨, 分析了这些方法的时间稳定性条件、数值色散特性、连接边界和吸收边界的设置, 以及这些方法在圆柱坐标、旋转对称坐标、色散媒质和周期结构中的应用, 并通过数学推导从理论上证明了这些方法相对于传统 FDTD 方法的误差。最后对这些方法的数值色散特性、

计算精度、计算效率以及计算所需内存进行详细的比较,分析了影响这些方法计算精度的各种因素,并给出了各种方法的优缺点,以及适用范围。

本书共6章,分别讨论以下几个问题。

第1章对目前常用的数值计算方法进行了简单概述,详细介绍了时域有限差分方法及其快速算法,并对本书的内容和章节安排进行了说明。

第2章对FDTD方法进行简单的回顾,论述FDTD方法的基本公式、时间稳定性条件、数值色散特性及吸收边界条件,讨论激励源的设置以及网格的剖分。

第3章主要探讨双向弱条件稳定FDTD方法,给出双向弱条件稳定FDTD方法的基本公式,对其稳定性条件和数值色散特性进行详细的分析;并对双向弱条件稳定FDTD方法中的激励源的设置、理想导体条件的实现、连接边界和吸收边界的设置给出较为详细的说明;给出双向弱条件稳定FDTD方法在实际应用中的例子,论证双向弱条件稳定FDTD方法在电磁模拟中的有效性;本章最后部分对圆柱坐标、旋转对称坐标、色散媒质以及周期结构中的双向弱条件稳定FDTD方法进行简单介绍。

第4章主要探讨单向弱条件稳定FDTD方法,给出了单向弱条件稳定FDTD方法的基本公式,对其稳定性条件和数值色散特性进行详细的分析,对单向弱条件稳定FDTD方法的近似算法N-O-D WCS FDTD方法进行较为详细的描述,并结合实际算例对N-O-D WCS FDTD方法在电磁模拟中的有效性进行论证。书中将CP-FDTD方法和N-O-D WCS FDTD方法相结合,给出可用于曲面边界求解的CP-WCS FDTD方法,对该方法的计算精度和效率进行数值验证。本章最后部分简单介绍圆柱坐标、旋转对称结构、色散媒质以及周期结构中的N-O-D WCS FDTD方法。

第5章对ADI-FDTD方法进行简单的介绍,给出ADI-FDTD方法的基本公式,对其时间稳定性条件及其数值色散特性进行详细的分析。

第6章对双、单向弱条件稳定FDTD方法和ADI-FDTD方法的数值色散特性、计算精度、计算效率以及计算所需内存进行详细的比较,并对影响这些方法计算精度的各种因素进行详细的分析,在此基础上,给出各种方法的优缺点,并对各种方法的适用范围进行详细的说明。

第 2 章 FDTD 方法的基本理论

FDTD 方法是当今计算电磁学中应用最为广泛的数值模拟方法之一。本章着重论述 FDTD 方法的基本公式、时间稳定性条件、数值色散特性以及吸收边界条件,并讨论激励源的设置以及网格的剖分。对于圆柱坐标、旋转对称坐标、色散媒质中的 FDTD 方法以及周期结构中的 FDTD 方法,本章也给予较为详细的说明。

2.1 FDTD 方法的基本公式

2.1.1 Maxwell 方程组和 Yee 元胞

Maxwell 方程组是支配宏观电磁现象的一组基本方程,它既可以写成微分形式,又可以写成积分形式。FDTD 方法是由微分形式的 Maxwell 旋度方程出发进行差分离散的。

Maxwell 旋度方程为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (2-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{J}_m \quad (2-2)$$

式中, $\mathbf{H}$ 为磁场强度,单位为安培/米(A/m); $\mathbf{D}$ 为电通量密度,单位为库仑/米²(C/m²); $\mathbf{J}$ 为电流密度,单位为安培/米²(A/m²); $\mathbf{E}$ 为电场强度,单位为伏特/米(V/m); $\mathbf{B}$ 为磁通量密度,单位为韦伯/米²(Wb/m²); $\mathbf{J}_m$ 为磁流密度,单位为伏特/米²(V/m²)。

各向同性介质中的本构关系为

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad \mathbf{J}_m = \sigma_m \mathbf{H} \quad (2-3)$$

式中, ε 表示介质的介电常数,单位为法拉/米(F/m); μ 表示磁导系数,单位为亨利/米(H/m); σ 表示电导率,单位为西门子/米(S/m); σ_m 表示磁导率,单位为欧姆/米(Ω /m)。

在直角坐标系中,式(2-1)和式(2-2)写为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_x \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma E_z \end{aligned} \right\} \quad (2-4)$$

以及

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} - \sigma_m H_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} - \sigma_m H_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} - \sigma_m H_z \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

下面将式(2-4)和式(2-5)中的一阶偏导数进行差分近似。令 $f(x, y, z, t)$ 代表 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 在直角坐标系中的某一分量。 $f(x, y, z, t)$ 在时间和空间的离散取以下符号表示:

$$f(x, y, z, t) = f(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = f^n(i, j, k) \quad (2-6)$$

对 $f(x, y, z, t)$ 关于时间和空间的一阶偏导数取差分近似, 即

$$\left. \begin{aligned} \left. \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x} \right|_{x=i\Delta x} &\approx \frac{f^n(i+1/2, j, k) - f^n(i-1/2, j, k)}{\Delta x} \\ \left. \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial y} \right|_{y=j\Delta y} &\approx \frac{f^n(i, j+1/2, k) - f^n(i, j-1/2, k)}{\Delta y} \\ \left. \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial z} \right|_{z=k\Delta z} &\approx \frac{f^n(i, j, k+1/2) - f^n(i, j, k-1/2)}{\Delta z} \\ \left. \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t} \right|_{t=n\Delta t} &\approx \frac{f^{n+1}(i, j, k) - f^n(i, j, k)}{\Delta t} \end{aligned} \right\} \quad (2-7)$$

电场和磁场各节点的空间排布采用著名的 Yee 元胞, 如图 2-1 所示。从该图可以

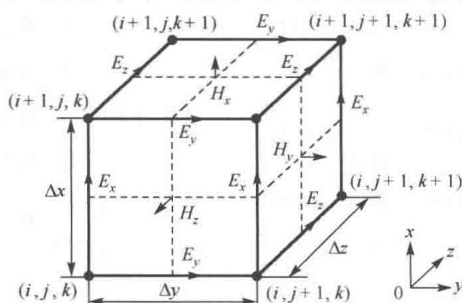


图 2-1 Yee 氏网格及场量分布

看出每一个电场分量由四个磁场分量环绕，同时，每一个磁场分量由四个电场分量环绕。这种电磁场分量的空间取样方式不仅符合安培环路定律和法拉第电磁感应定律的自然结构，而且这种电磁场各分量的空间相对位置也适合于 Maxwell 方程的差分计算，能够恰当地描述电磁场的传播特性。

2.1.2 三维直角坐标中的 FDTD 公式

将式 (2-4) 和式 (2-5) 中的时间求导项采用式 (2-7) 的差分近似，得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\Delta t \partial}{\mu \partial z} & \frac{\Delta t \partial}{\mu \partial y} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\Delta t \partial}{\mu \partial z} & 0 & -\frac{\Delta t \partial}{\mu \partial x} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\Delta t \partial}{\mu \partial y} & \frac{\Delta t \partial}{\mu \partial x} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E_x^{n+1} \\ E_y^{n+1} \\ E_z^{n+1} \\ H_x^{n+1} \\ H_y^{n+1} \\ H_z^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\Delta t \partial}{\varepsilon \partial z} & \frac{\Delta t \partial}{\varepsilon \partial y} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\Delta t \partial}{\varepsilon \partial z} & 0 & -\frac{\Delta t \partial}{\varepsilon \partial x} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\Delta t \partial}{\varepsilon \partial y} & \frac{\Delta t \partial}{\varepsilon \partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E_x^n \\ E_y^n \\ E_z^n \\ H_x^n \\ H_y^n \\ H_z^n \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

此处假设电导率 σ 和磁导率 σ_m 的值均为零。若令

$$\begin{aligned} [A_{x1}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial}{\mu \partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & [B_{x1}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\mu \partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [A_{y1}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\mu \partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & [B_{y1}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\mu \partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$[A_{z1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial}{\mu \partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [B_{z1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\mu \partial z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A_{x2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\varepsilon \partial x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [B_{x2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\varepsilon \partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A_{y2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\varepsilon \partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [B_{y2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\varepsilon \partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A_{z2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\varepsilon \partial z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [B_{z2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\varepsilon \partial z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则式 (2-8) 等价于

$$\left[\begin{aligned} & \mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2} ([A_{x1}] + [A_{x1}] + [A_{y1}] + [A_{y1}] + [A_{z1}] + [A_{z1}]) \\ & - \frac{\Delta t}{2} ([B_{x1}] + [B_{x1}] + [B_{y1}] + [B_{y1}] + [B_{z1}] + [B_{z1}]) \end{aligned} \right] \mathbf{U}^{n+1} =$$

$$\begin{bmatrix} I + \frac{\Delta t}{2}([A_{x2}] + [A_{x2}] + [A_{y2}] + [A_{y2}] + [A_{z2}] + [A_{z2}]) \\ + \frac{\Delta t}{2}([B_{x2}] + [B_{x2}] + [B_{y2}] + [B_{y2}] + [B_{z2}] + [B_{z2}]) \end{bmatrix} U^n \quad (2-9)$$

式中, I 为一个 6×6 的单位矩阵; $U^{n+1} = [E_x^{n+1} \ E_y^{n+1} \ E_z^{n+1} \ H_x^{n+1} \ H_y^{n+1} \ H_z^{n+1}]^T$; $U^n = [E_x^n \ E_y^n \ E_z^n \ H_x^n \ H_y^n \ H_z^n]^T$ 。

若进一步将式 (2-8) 中的空间求导采用式 (2-7) 中的差分近似, 则可以得到

$$\begin{aligned} E_x^{n+1}(i+1/2, j, k) &= E_x^n(i+1/2, j, k) \\ &+ \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left[\frac{H_z^n(i+1/2, j+1/2, k) - H_z^n(i+1/2, j-1/2, k)}{\Delta y} \right. \\ &\quad \left. - \frac{H_y^n(i+1/2, j, k+1/2) - H_y^n(i+1/2, j, k-1/2)}{\Delta z} \right] \end{aligned} \quad (2-10-1)$$

$$\begin{aligned} E_y^{n+1}(i, j+1/2, k) &= E_y^n(i, j+1/2, k) \\ &+ \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left[\frac{H_x^n(i, j+1/2, k+1/2) - H_x^n(i, j+1/2, k-1/2)}{\Delta z} \right. \\ &\quad \left. - \frac{H_z^n(i+1/2, j+1/2, k) - H_z^n(i-1/2, j+1/2, k)}{\Delta x} \right] \end{aligned} \quad (2-10-2)$$

$$\begin{aligned} E_z^{n+1}(i, j, k+1/2) &= E_z^n(i, j, k+1/2) \\ &+ \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left[\frac{H_y^n(i+1/2, j, k+1/2) - H_y^n(i-1/2, j, k+1/2)}{\Delta x} \right. \\ &\quad \left. - \frac{H_x^n(i, j+1/2, k+1/2) - H_x^n(i, j-1/2, k+1/2)}{\Delta y} \right] \end{aligned} \quad (2-10-3)$$

$$\begin{aligned} H_x^{n+1}(i, j+1/2, k+1/2) &= H_x^n(i, j+1/2, k+1/2) \\ &- \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_z^{n+1}(i, j+1, k+1/2) - E_z^{n+1}(i, j, k+1/2)}{\Delta y} \right. \\ &\quad \left. - \frac{E_y^{n+1}(i, j+1/2, k+1) - E_y^{n+1}(i, j+1/2, k)}{\Delta z} \right] \end{aligned} \quad (2-10-4)$$

$$\begin{aligned} H_y^{n+1}(i+1/2, j, k+1/2) &= H_y^n(i+1/2, j, k+1/2) \\ &- \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_x^{n+1}(i+1/2, j, k+1) - E_x^{n+1}(i+1/2, j, k)}{\Delta z} \right. \\ &\quad \left. - \frac{E_z^{n+1}(i+1, j, k+1/2) - E_z^{n+1}(i, j, k+1/2)}{\Delta x} \right] \end{aligned} \quad (2-10-5)$$