



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

| 经 | 济 | 管 | 理 | 类 |

微 积 分 (第二版)

■ 章学诚 刘西垣 编 著



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

| 经 | 济 | 管 | 理 | 类 |

微 积 分

(第二版)

■ 章学诚 刘西垣 编著



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分:经济管理类/章学诚,刘西垣编著. —2 版. —武汉:武汉大学出版社,2015.8

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

ISBN 978-7-307-16136-8

I. 微… II. ①章… ②刘… III. 微积分 IV. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 138809 号

责任编辑:顾素萍 责任校对:汪欣怡 版式设计:马 佳

出版发行: **武汉大学出版社** (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件: cbs22@whu.edu.cn 网址: www.wdp.com.cn)

印刷:湖北金海印务有限公司

开本: 720 × 1000 1/16 印张:28.5 字数:526 千字 插页:1

版次:2007 年 7 月第 1 版 2015 年 8 月第 2 版

2015 年 8 月第 2 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-307-16136-8 定价:45.00 元

版权所有,不得翻印;凡购我社的图书,如有质量问题,请与当地图书销售部门联系调换。

第二版说明

感谢读者和武汉大学出版社使本书在第一次出版后时隔 7 年得以再版。第二版对第一版做了如下修改：

1. 对全书中有失误或不妥之处做了改正。
2. 由本书前一作者对最后三章加了几个附注，作者为了解一点数学史，知道有关数学分支发展的由来及其中的艰难历程，对于理解所学内容会是有益的。这也有助于提高我们的人文素养。
3. 加了附录一，介绍了张景中给出的极限定义的另一种形式，希望有助于初学者减少在学习极限概念所遇到的困难。
4. 加了附录二和附录三，这部分由赵梅春和郭求知同志编写。希望帮助参加数模竞赛和考研的同学提高应用微积分解决问题的能力。

感谢赵梅春和郭求知同志对本书的关心和支持。

章学诚 刘西垣

2015 年 7 月

于北京大学数学科学学院

第一版序言

数学，既是一门高度抽象的理论性学科，又是一门应用广泛的工具性学科。马克思曾指出，一门科学只有在成功地运用数学时，才算真正发展，走向成熟。在其政治经济学研究中，单是他留下的数学手稿就有上千页，他认为数学是进行科学研究的不可缺少的工具。当代经济学和管理科学的发展，充分证明了他的深刻预见，近 20 年来大多数诺贝尔经济学奖获得者的工作都与数学有关，其中有些获奖者就是杰出的数学家。经济学与数学有着天然的紧密关系，将宏观的质的分析与微观的量的分析统一起来，将经济思想与经济运行中存在的各种量与量之间的数量关系的研究结合起来，有助于提高研究成果的精确性、严密性、科学性和预见性。

由于计算机科学的飞速发展，当今的科学和技术变得更加数学化，数学能使我们更好地了解我们生活于其中的充满信息的世界。除了定理和理论外，数学还提供了许多极具特色的普遍适用的思考方式，例如：运用符号，建立模型，从数据进行推断，以及抽象化、最优化、逻辑分析，等等。应用这些数学思考方式的经验形成了数学能力，这是当今这个时代一种日益重要的智力。

数学不仅是各种科学技术的基础，而且也是一种文化。

本书是依据 1998 年原国家教委审定的《高等学校财经类专业核心课程教学大纲》（微积分部分）和近年由教育部委托北京大学光华管理学院和中国人民大学信息学院共同拟定的《经济管理学科数学基础教学大纲》（草案）中的微积分部分编写的。

300 多年前，主要由于受天文学和力学等科学问题的推动和启发，牛顿和莱布尼茨阐发了微积分的概念和方法，使她成为一门独立于古典几何和代数的数学分支。微积分是继欧几里得几何之后人类智慧在数学领域的一个最伟大的创造。三个多世纪过去了，她愈益欣欣向荣，枝繁叶茂，显示出了强大的生命力，科学的发展表明微积分在处理各类科学和工程技术中的数学问题时具有巨大的威力。与此同时，经过众多杰出数学家的不断努力，微积分早已脱去它初期的“神秘”外衣，成为一门理论严密体系完备的成熟的科学。

“微积分”是高等学校众多专业的基础课程。尽管“微积分”比较清晰易学，但在教学中也容易产生将它简单地归结为一些规则和算法的偏向，而忽视了它的思想、方法的深刻内涵和实际价值。学习微积分，不仅要学习它处理问题的思想、方法和技巧，也是锻炼数学能力和增强智力的有效途径。

“本能的好奇心是非常好的老师”，对数学尤其是如此，希望读者怀着探索 and 好奇的心态来学习微积分，它不仅可以起到提高学习效率的作用，而且学习本身也是一种“乐趣”。这是编者对读者的一种期望。

本书力求将看似“深奥”的理论写得比较自然顺畅；在概念的阐述上尽力辅以几何的解释，力争“形”“意”交融，微积分的发展史就是物理、几何、代数相互配合，“协同作战”的历史。此外，本书还配有较多类型的例题和习题作为理论的补充（其中包括从历年经济管理类专业硕士研究生试题中选出的一些考题），这些题不一定要在相应的学期内做完，可以在以后有兴趣或进一步提高时再做。教材中标注“*”号的部分可根据要求选学。本书不刻意追求数学理论的严密性（这是数学的另一重要特点），许多需要用到较深数学知识或较难证的命题不予证明，但照顾到不同学校和专业不同的要求，有些基本的较简单的定理和性质给出了证明，这对于加深对概念的理解、提高推理能力和数学素养是十分有益的。

本书第一至第七章由章学诚编写，第八至第十章由刘西垣编写。

限于编者的水平，书中难免会有不当之处，恳请读者予以批评指正。

编 者

2007 年 1 月

于北京大学数学科学学院

常用记号说明

$\exists$	表示存在. 例如, “对于 P , 存在 Q , 使得 ……” 可表示为 “对于 P , $\exists Q$, 使得 ……”.
$\in$	表示属于. 例如, “ x 属于集合 S ” 可表示为 “ $x \in S$ ”.
$\forall$	表示所有. 例如, “对于集合 S 中所有的 x ” 可表示为 “ $\forall x \in S$ ”.
$\sum$	连加号. 例如, $\sum_{i=1}^n a_i$ 表示 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.
$\prod$	连乘号. 例如, $\prod_{i=1}^n a_i$ 表示 $a_1 a_2 \cdots a_n$.
$U(a, \delta)$	表示 a 的 δ 邻域.
$\overset{\circ}{U}(a, \delta)$	表示 a 的去心 δ 邻域.
$U(a)$	表示 a 的邻域.
$\overset{\circ}{U}(a)$	表示 a 的去心邻域.
$\max S$	表示数集 S 中最大的数.
$\min S$	表示数集 S 中最小的数.
$\Rightarrow$	表示 “可推出”、“蕴含”. 例如, “由 P 可推出 Q ” 可表示为 “ $P \Rightarrow Q$ ”, 意即 Q 是 P 的必要条件, P 是 Q 的充分条件.
$\Leftrightarrow$	表示等价. 例如, “ P 等价于 Q ” 可表示为 “ $P \Leftrightarrow Q$ ”, 意即 P 与 Q 互为必要(或充分)条件.
■	表示定理证明完毕.

目 录

第一章 函数及其图形	1
1.1 预备知识	2
1.1.1 集合及其运算	2
1.1.2 绝对值及其基本性质	4
1.1.3 区间和邻域	4
1.2 函数	6
1.2.1 函数的概念	6
1.2.2 函数的表示法	10
1.2.3 函数的运算	12
1.3 函数的几种基本特性	13
1.4 反函数	17
1.5 复合函数	19
1.6 初等函数	21
1.6.1 基本初等函数	21
1.6.2 初等函数	25
1.7 简单函数关系的建立	25
1.7.1 简单函数关系的建立	25
1.7.2 经济学中几种常见的函数	27
习题一	29
第二章 极限和连续	33
2.1 数列极限	33
2.1.1 数列的概念	33
2.1.2 数列极限的定义	35
2.1.3 收敛数列的基本性质	38
2.2 函数极限	39
2.2.1 函数在有限点处的极限	39
2.2.2 自变量趋于无穷大时函数的极限	42

2.2.3	有极限的函数的基本性质	42
2.3	极限的运算法则	43
2.4	无穷小(量)和无穷大(量)	45
2.4.1	无穷小(量)	45
2.4.2	无穷大(量)	48
2.4.3	无穷大量与无穷小量的关系	49
2.4.4	无穷小量的比较	50
2.5	极限存在的准则和两个重要极限	52
2.5.1	夹逼准则和 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$	52
2.5.2	单调有界准则和 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	54
2.6	函数的连续性和连续函数	59
2.6.1	函数在一点处的连续	59
2.6.2	连续函数	60
2.6.3	连续函数的运算和初等函数的连续性	61
2.6.4	闭区间上的连续函数	66
2.7	函数的间断点	68
习题二		70
第三章	导数和微分	76
3.1	导数概念	77
3.1.1	两个经典问题	77
3.1.2	导数概念和导函数	78
3.1.3	单侧导数	82
3.1.4	函数可导与连续的关系	84
3.2	求导法则	85
3.2.1	函数的和、差、积、商的求导法则	85
3.2.2	反函数求导法则	86
3.2.3	复合函数求导法则	87
3.3	基本导数公式	92
3.4	高阶导数	95
3.5	函数的微分	97
3.5.1	微分概念	97
3.5.2	基本微分公式	100
3.5.3	微分法则	101

3.6	导数和微分在经济学中的简单应用	104
3.6.1	边际分析	104
3.6.2	弹性分析	105
	习题三	108
第四章	微分中值定理和导数的应用	114
4.1	微分中值定理	114
4.1.1	罗尔定理	114
4.1.2	拉格朗日中值定理	117
4.1.3	柯西中值定理	120
4.1.4	泰勒公式	121
4.2	洛必达法则	124
4.2.1	$\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	124
4.2.2	其他类型的未定式	128
4.3	函数的单调性	130
4.4	曲线的上、下凸性和拐点	133
4.4.1	曲线的上、下凸性和拐点	133
4.4.2	函数的凸性	136
4.5	函数的极值与最值	138
4.5.1	函数的极值	138
4.5.2	函数的最值	142
4.6	渐近线和函数作图	147
4.6.1	曲线的水平和竖直渐近线	148
4.6.2	函数作图	149
	习题四	152
第五章	不定积分	158
5.1	原函数和不定积分概念	158
5.1.1	原函数和不定积分	158
5.1.2	斜率函数的积分曲线	160
5.1.3	不定积分的基本性质	161
5.2	基本积分公式	163
5.3	换元积分法	166
5.3.1	第一换元积分法(凑微分法)	166
5.3.2	第二换元积分法	173

5.4	分部积分法	175
5.5	有理函数的不定积分	182
	习题五	186
第六章	定积分	191
6.1	定积分概念及其基本性质	192
6.1.1	两个经典例子	192
6.1.2	定积分概念	196
6.1.3	定积分的基本性质	199
6.2	微积分基本公式(牛顿 - 莱布尼茨公式)	203
6.2.1	变上限积分及其导数公式	203
6.2.2	微积分基本公式(牛顿 - 莱布尼茨公式)	207
6.3	定积分的换元积分法和分部积分法	210
6.3.1	定积分的换元积分法	210
6.3.2	定积分的分部积分法	215
6.4	定积分的应用	217
6.4.1	平面图形的面积	217
6.4.2	立体的体积	223
6.4.3	由边际函数求总函数	227
6.5	反常积分初步	228
6.5.1	无穷限反常积分	228
6.5.2	无界函数的反常积分	232
6.5.3	Γ 函数	235
	习题六	238
第七章	多元函数微积分	245
7.1	空间解析几何基础知识	245
7.1.1	空间直角坐标系	245
7.1.2	空间中常见图形的方程	247
7.2	多元函数的基本概念	251
7.2.1	准备知识	251
7.2.2	多元函数的概念	252
7.2.3	二元函数的极限	255
7.2.4	二元函数的连续性	256
7.3	偏导数	257
7.3.1	二元函数的偏导数	257

7.3.2	偏导数在经济学中的简单应用	261
7.3.3	二阶偏导数	262
7.4	全微分	264
7.4.1	全微分	264
7.4.2*	二元函数的泰勒公式	268
7.5	多元复合函数的求导法则和微分法则	268
7.5.1	多元复合函数的求导法则	268
7.5.2	多元复合函数的微分法则	273
7.6	隐函数及其求导法则	274
7.6.1	由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的隐函数及其求导法则	274
7.6.2	由方程 $F(x, y, z) = 0$ 确定的隐函数及其求导法则	277
7.7	二元函数的极值和最值	279
7.7.1	二元函数的极值	279
7.7.2	二元函数的最值	282
7.7.3	条件极值	285
7.8	二重积分	290
7.8.1	二重积分概念及其性质	290
7.8.2	二重积分的计算	292
习题七		306
第八章	无穷级数	312
8.1	数项级数的基本概念	312
8.2	级数的基本性质	315
8.3	正项级数	319
8.4	任意项级数, 绝对收敛与条件收敛	326
8.5	幂级数及其收敛特性	329
8.6	幂级数的和函数	334
8.7	函数的幂级数展开式	338
习题八		343
第九章	微分方程	347
9.1	微分方程的基本概念	348
9.2	一阶微分方程	349
9.2.1	可分离变量的微分方程	349
9.2.2	齐次微分方程	353
9.2.3	一阶线性微分方程	355

9.3	二阶常系数线性微分方程的解法	359
9.3.1	二阶常系数线性微分方程解的性质与通解的结构	359
9.3.2	二阶常系数齐次线性微分方程的解法	362
9.3.3	二阶常系数非齐次线性微分方程的解法	364
习题九		369
第十章	差分方程初步	372
10.1	差分方程的基本概念	373
10.2	一阶常系数线性差分方程	374
10.2.1	一阶常系数线性差分方程的标准形式与通解的结构	374
10.2.2	一阶常系数非齐次线性差分方程特解的求法	375
10.3	二阶常系数线性差分方程	380
10.3.1	二阶常系数线性差分方程的标准形式与通解的结构	380
10.3.2	二阶常系数齐次线性差分方程两个线性无关特解 的求法	381
10.3.3	二阶常系数非齐次线性差分方程特解的求法	384
习题十		388
习题答案		390
附录一	关于极限定义的另一形式	411
附录二	微积分在数学建模应用中的简单举例	413
附录三	历年经管类研究生入学考试数学(三) 试题精选	421

数学是这样一种东西：她提醒你有无形的灵魂，她赋予她所发现的真理以生命；她唤起心神，澄净智慧；她给我们的内心思想添辉；她涤尽我们有生以来的蒙昧与无知。

—— 普洛克拉斯(Proclus, 410—485) *

这本庞大的书(我指的是宇宙)中写了(自然)哲学，它一直敞开在我们的眼前，但不首先学会理解它的语言，并识别它书写所用的字符，是不能读懂它的，它是用数学的语言写成的。

—— 伽利略(Galilei, Galileo, 1564—1642) **

第一章 函数及其图形

由于实践和各门科学自身发展的需要，到了16世纪，对物体运动的研究成为自然科学的中心问题。与之相适应，数学在经历了两千多年的发展之后进入了一个新的时代，即变量数学的时代。作为对在运动中变化的量及它们之间的依赖关系的反映，数学中产生了变量和函数的概念。

例如：伽利略发现自由落体下落的距离 s 与经历的时间 t 的平方成正比，得到著名的公式

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \quad (g \approx 9.81 \text{ m/s}^2),$$

它确定了变量 t 与 s 之间的依赖关系，即函数关系，这就是自由落体运动规律的数学表述。

数学的一项重要任务，就是要找出反映各种实际问题中变量的变化规

* 普洛克拉斯，古希腊柏拉图派的领头人物，哲学家和大评论家，喜爱数学，并爱写诗。

** 伽利略，伟大的意大利物理学家和天文学家，科学革命的先驱，他开创了以实验事实为依据，并具有严密逻辑体系的近代科学，被称为“近代科学之父”。为证实和坚持传播N. 哥白尼的“日心说”，他晚年受到教会的迫害，被终身监禁。

律,即其中所蕴含的变量之间的函数关系.

函数是数学中最基本的概念之一,微积分研究函数的一些局部的和整体的性态.

本章介绍函数的一般概念,几种常用的表示方式,最基本的函数类——初等函数,函数的性质,以及经济学中几种常用的函数.

1.1 预备知识

1.1.1 集合及其运算

集合是数学中的一个基本概念,例如:一个班的全体学生是一个集合,一个车间某天生产的全部产品也构成一个集合,全体整数则构成数的一个集合,等等.由此可见,集合是日常生活中常会遇到的一个概念.集合论是数学的基础理论.

一般地说,具有某种指定性质的事物的总体称为一个**集合**.组成这个集合的事物称为这个集合的**元素**.

集合通常用大写的拉丁字母,如 $A, B, S, \dots$ 表示,其元素则用小写的拉丁字母,如 $a, b, s, \dots$ 表示.

若 S 是一个集合, s 是 S 中的一个元素,而 t 不在 S 中,则称 s 属于 S ,记为 $s \in S$, t 不属于 S ,记为 $t \notin S$ (或 $t \notin S$).

如果集合 S 只包含有限个元素,则称 S 为**有限集**,否则称为**无限集**.为方便计,数学中也将不含任何元素的“集合”称为**空集合**,并用专门记号“ $\emptyset$ ”表示.

说明一个集合通常有两种方法.一种是**列举法**,即将集合的所有元素列举出来,例如:由元素 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 组成的集合 A 可以表示成

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

另一种是**描述法**,即用刻画集合中全体元素的性质来说明.假设集合 S 是由具有某种性质 P 的元素的全体组成的,我们可以将 S 表示为

$$S = \{s \mid s \text{ 具有性质 } P\}.$$

例如:由所有满足条件 $x < 1$ 的实数 x 组成的集合 B ,可以表示为 $B = \{x \mid x < 1\}$.又如:集合

$$C = \{P(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

表示坐标平面上由坐标 (x, y) 满足方程 $x^2 + y^2 = 1$ 的点 P 的全体所组成的集合,几何上 C 表示以坐标原点 O 为中心、半径为 1 的圆.

数学中,常用 $\mathbf{N}$ 表示由全体正整数组成的集合,即 $\mathbf{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$. 由全体整数组成的集合用 $\mathbf{Z}$ 表示,即 $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots\}$. 由全体有理数所组成的集合用 $\mathbf{Q}$ 表示,即

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}, \text{且 } p, q \text{ 互质} \right\}.$$

由全体实数组成的集合记为 $\mathbf{R}$, 由于数轴上的点与实数一一对应, $\mathbf{R}$ 也可看成数轴(如图 1-1). 在以后,常常将实数看成数轴上的点,或用点表示一个实数.

在本书中若无特别说明,所说的数都是实数.

不同集合之间最基本的关系是包含关系. 假设 A, B 是两个集合,如果 A 中的元素都属于 B , 即

$$a \in A \Rightarrow a \in B,$$

则称 A 为 B 的子集,或称 A 包含于 B 或 B 包含 A , 记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$ (如图 1-2). 例如:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}.$$

如果 A, B 互相包含,即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称 A 与 B 相等,记为 $A = B$. 所以

$$A = B \Leftrightarrow "a \in A \Leftrightarrow a \in B".$$

可以认为空集 $\emptyset$ 是任意非空集合 A 的子集,即 $\emptyset \subset A$.

集合可以作运算. 设 A, B 是任意两个集合,它们的运算主要有以下几种:

- 1) 并 由 A, B 中的所有元素组成的集合称为 A 和 B 的并集(简称并), 记为 $A \cup B$ (如图 1-3). 所以

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

显然,并的运算是可交换的,即

$$A \cup B = B \cup A.$$

又如 $A \subset B$, 则 $A \cup B = B$.

- 2) 交 由既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为 A 和 B 的交集(简称交)(如图 1-4). 所以

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

显然, $A \cap B = B \cap A$.

又如 $A \subset B$, 则

$$A \cap B = A.$$



图 1-1

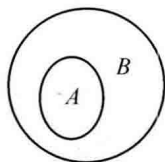


图 1-2

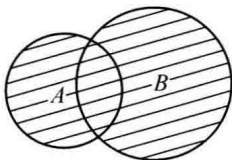


图 1-3

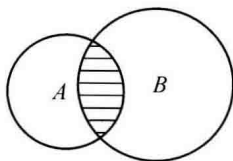


图 1-4

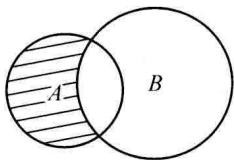


图 1-5

3) 差 由 A 中不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的差集(简称差), 记为 $A - B$ (如图 1-5). 所以

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\}.$$

例如: $\mathbf{Z} - \mathbf{N} = \{0, -1, -2, \dots, -n, \dots\}$.

又如: $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$ 就是由所有无理数组成的集合.

显然, 若 $A \subset B$, 则 $A - B = \emptyset$.

1.1.2 绝对值及其基本性质

设 x 为一实数, 则其绝对值定义为

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

$|x|$ 的几何意义是表示数轴上从原点 0 到点 x 的距离. 而 $|x - y|$ 则表示数轴上两点 x 和 y 之间的距离.

若设 $a > 0$, 则 $|x| < a$ 表示数轴上点 x 与原点 0 之间的距离小于 a , 即 $-a < x < a$. 所以

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a.$$

同样

$$|x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ 或 } x > a.$$

例 1 解下列绝对值不等式:

$$1) \quad |x - 1| < 3; \quad 2) \quad |x + 1| \geq 2.$$

解 1) $|x - 1| < 3$ 即为 $-3 < x - 1 < 3$, 因此 $-2 < x < 4$.

2) $|x + 1| \geq 2$ 即为 $x + 1 \geq 2$ 或 $x + 1 \leq -2$, 从而

$$x \geq 1 \text{ 或 } x \leq -3.$$

不难证明绝对值具有下列性质: 设 x, y 是任意两个实数, 则

$$1^\circ \quad |x| \geq 0;$$

$$2^\circ \quad |-x| = |x|;$$

$$3^\circ \quad -|x| \leq x \leq |x|;$$

$$4^\circ \quad |x \pm y| \leq |x| + |y|;$$

$$5^\circ \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|;$$

$$6^\circ \quad |xy| = |x| |y|.$$

1.1.3 区间和邻域

在微积分中, 用得最多的数集是区间和邻域.

设 $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, 则数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 称为以 a, b 为端点的开区间,