高中用书

翟连林 主编

平面解析几何一题多解

（修订版）

北京出版社

中学数学智力开发丛书

平面解析几何一题多解

（修　订　版）

主　编　翟连林

编　委　（依姓氏笔划为序）

王学功　王乾岭　叶龄逸

刘盛锡　陈士杰　李福宽

林福堂　施英杰　项昭义

执　笔　杨志刚　王家宝　槐玉枝

魏胜利　许晚生　焦金良

北　京　出　版　社

中学数学智力开发丛书
平面解析几何一题多解(修订版)
PINGMIAN JIEXI JIHE YITI DUOJIE
(XIUDINGBAN)
翟连林　主编
*
北　京　出　版　社　出　版
(北京北三环中路6号)
邮政编码:100011
北　京　出　版　社　总　发　行
新华书店北京发行所经销
北京市朝阳北苑印刷厂印刷
*
787×1092毫米　32开本　10印张　219 000字
1993年10月第1版　1997年8月第5次印刷
印数49 001—55 000
ISBN 7-200-01940-2/G·570
定价:10.00元

再版说明

从教学实践中我们体会到：一题多解是开发智力、培养能力的一种行之有效的方法，它对沟通不同知识间的联系，开拓人们的思路，培养发散思维能力，激发读者的学习兴趣都是十分有益的。为此，我们编写了《中学数学智力开发丛书》。这套丛书出版发行后，受到广大读者的欢迎，从1990年初版至今，已印刷四次，总印数达35.6万册。在新形势下我们又重新修订，出版这套丛书的第二版，包括《初中代数一题多解》、《平面几何一题多解》、《高中代数一题多解》、《平面三角一题多解》、《立体几何一题多解》、《平面解析几何一题多解》、《高中数学综合题一题多解》。为了充实内容，这套丛书增加了《初中数学试题一题多解》、《初中数学综合题一题多解》、《高中数学试题一题多解》等书，使整套书囊括了初中数学和高中数学的全部内容，有益于读者按需选择。

与其它各类学习数学的图书比较，这套丛书突出了发散思维能力的培养，精选实用、新颖的题目，增加了巧妙解法，力求体现科学性、趣味性、典型性和启发性。

由于我们的水平有限，书中缺点、错误在所难免，欢迎读者批评指正。

编　者

1993年8月

初 版 说 明

培养正确迅速的运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力以及分析问题和解决问题的能力，是中学数学教学中的一个重要任务。要完成这一任务，必须演算一定数量的题目。但不少自学青年和学生在演算习题时，往往只追求数量，而忽视有目的的总结、归纳，抓不住基本解题规律。这样尽管用了不少时间，费了很大精力，结果收效甚微。

长期的教学实践使我们体会到：恰当而又适量地采用一题多解的方法，进行思路分析，探讨解题规律和对习题的多角度“追踪”，能“以少胜多”地巩固基础知识，提高分析问题和解决问题的能力，掌握基本的解题方法和技巧。为此，总结我们多年来从事数学教学的经验，数学教材的编写以及指导初、高中毕业生进行数学复习的经验，编写了这套“中学数学智力开发丛书”。这套丛书包括：《初中代数一题多解》、《平面几何一题多解》、《高中代数一题多解》、《立体几何一题多解》、《平面三角一题多解》、《平面解析几何一题多解》、《高中数学综合题一题多解》。

在编写这套丛书时，我们力求作到以下两点：第一，紧密配合中学数学教学内容，帮助读者在理解课本知识的基础上，开阔视野，启迪思维；第二，内容编排循序渐进，结构新颖，对每道题目的多种解法，注重思路分析和解题规律的总结，以帮助读者从中领悟要点，掌握解数学题的常用方法及基本解题规律。

在本书编写过程中，刘金玲、董春容、耿雪、王学东四位同志帮助核算，阮光南同志帮助绘图，在此一并表示感谢。

由于我们水平有限，书中不妥之处，敬请广大读者批评指正。

编　者

1989年10月

目　录

第一章　一题多解的意义与作用

解析几何是用代数方法研究几何问题的一个数学分支。题目中蕴含着众多的数学关系，涉及到代数、几何、三角等各种数学知识，加之解题的着眼点不同，使得题目的解答方式不尽相同，这就决定了一个解析几何问题可能有不同的解法。一题多解不仅可以加深人们对基础知识的理解、提高应用基本技能的熟练程度，而且是培养和提高数学思维能力的主要渠道。

解析几何一题多解的意义和作用具体表现在如下三个方面。

一、多方探索、异途同归，有利于提高发散思维的灵活性

发散思维是一种重要的思维方式，它是从某一问题出发，运用已掌握的知识和方法，进行多方探索，寻求问题的解决方案，具有求异性、探求性和多发性，而解析几何本身的特征（用代数方法研究几何问题）则为提高人们的发散思维能力奠定了基础。

例1　求经过点$P(2,3)$，且被两直线l_1：$3x+4y-7=0$和l_2：$3x+4y+8=0$所截得的线段$|AB|=3\sqrt{2}$的直线l的方程。

【分析1】 由于所求直线过已知点，因此，只需求得该直线的斜率即可。由题设条件所求直线被两条平行直线截得的弦长为 $3\sqrt{2}$，利用两点间的距离公式（其中含有待求直线斜率）便可求得直线斜率。

【解法1】 如图 1-1。设所求直线方程为

$$y-3=k(x-2),$$

分别与直线l_1、l_2的方程联立，解得交点A、B的坐标为

$$\left(\frac{8k-5}{4k+3},\ \frac{k+9}{4k+3}\right)、\left(\frac{8k-20}{4k+3},\ \frac{9-14k}{4k+3}\right).$$

$\because\quad |AB|=3\sqrt{2},$

$$\therefore\quad \left(\frac{8k-5}{4k+3}-\frac{8k-20}{4k+3}\right)^2+\left(\frac{k-5}{4k+3}-\frac{9-14k}{4k+3}\right)^2=(3\sqrt{2})^2,$$

解得 $k=\dfrac{1}{7}$或-7。

故 所求直线方程为$x-7y+19=0$或$7x+y-17=0$。这种解法一般很容易想到，但是需要解方程和方程组，稍有不慎就会出现计算错误。

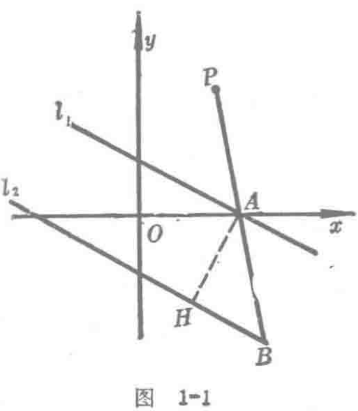

图 1-1

【分析2】 由于待求直线过已知点，如图 1-1。点P位于平行线l_1、l_2同侧，联想直线参数方程中t的几何意义，$|AB|=|PB-PA|=|t_1-t_2|$。故可采用直线的参数方程求解。

【解法2】 设过点P的直线参数方程为

$$\begin{cases} x = 2 + t\cos\alpha, \\ y = 3 + t\sin\alpha. \end{cases} \quad (t\text{为参数})$$

代入l_1、l_2的方程，并消去x、y，得

$$t_1 = \frac{-11}{3\cos\alpha + 4\sin\alpha}, \quad t_2 = \frac{-26}{3\cos\alpha + 4\sin\alpha}.$$

利用t的几何意义可知 $PA = t_1$，$PB = t_2$。

$$\therefore \quad |t_1 - t_2| = \left|\frac{15}{3\cos\alpha + 4\sin\alpha}\right| = 3\sqrt{2}.$$

解之，得$\sin(\alpha + \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$，其中$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{4}$。

$$\because \quad 0 \leqslant \alpha < \pi, \ 0 < \varphi < \frac{\pi}{4},$$

$$\therefore \quad 0 < \alpha + \varphi < \frac{5\pi}{4}.$$

即 $\alpha + \varphi = \frac{\pi}{4}$或 $\alpha + \varphi = \frac{3}{4}\pi$。

于是 所求直线l的斜率为

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = \frac{1}{7},$$

或 $k = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - \varphi\right) = -7$。

故 所求直线方程为$x - 7y + 19 = 0$或$7x + y - 17 = 0$。

显然解法2的运算量明显地少于解法1。

【分析3】 由于l_1、l_2是两条平行直线，容易求得它们之间的距离。如图1-1，过A作$AH \perp l_2$于点H。在$\mathrm{Rt}\triangle AHB$中，可由$|AB|$、$|AH|$求得$\angle ABH$，这样，可由两条直线的交角公式，求得待求直线的斜率。

【解法3】 如图1-1，过A作$AH \perp l_2$于点H，

则 $$|AH|=\frac{|8-(-7)|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3.$$

又 $|AB|=3\sqrt{2}$,

$\therefore$ $\angle ABH=45°$.

设直线l的斜率为k，由两条直线交角公式，得

$$\mathrm{tg}45°=\left|\frac{k+\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}k}\right|,$$

解之，得$k=\frac{1}{7}$或$k=-7$。

故 所求直线方程为$x-7y+19=0$或$7x+y-17=0$。

这个解法巧妙地利用了几何图形的性质，冲破了解析几何解题常规，使人们的思维得到升华。

纵观上述三个解法，思考方向同是一个——求直线的斜率，但着眼点不同。解法1着眼于两点间距离；解法2着眼于$|PA|$、$|PB|$、$|AB|$间的等量关系；解法3则着眼于待求直线与已知直线的位置关系。

解析几何一题多解的“异途”是手段，目的是“同归”。要通过多方探索，寻求不同的解题途径，通过比较分辨不同解法的优劣，总结解题规律，选择最佳解题方法，以利于思想方法上的迁移。

二、知识交融、方法贯通，有利于提高运用数学方法的自觉性

一题多解是学好解析几何的一个重要途径，它既可以利

用解析几何知识的内在结构，选择不同的坐标形式或运用不同的计算公式纵向求解，又可以联系代数、三角及平面几何知识横向寻求解题思路，从而有利于加深对数学知识的理解和认识，熟悉各种解题方法。

例 2　已知圆$x^2+y^2=4$的一条割线的斜率为2，此割线被圆所截的弦长为$2\sqrt{2}$，求此割线方程。

【分析1】　这是一道求直线方程的问题，由于直线的斜率已知，自然想到直线的斜截式，只需求出直线在y轴上的截距。

【解法1】 设割线的斜截式方程为$y=2x+b$，

由方程组$\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ y=2x+b, \end{cases}$　消去y并整理，得

$$5x^2+4bx+b^2-4=0.$$

设割线与圆的两个交点为$Q_1(x_1,y_1)$、$Q_2(x_2,y_2)$，

则　$x_1+x_2=-\frac{4}{5}b$，$x_1x_2=\frac{1}{5}(b^2-4)$。

$\because$　$|Q_1Q_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$，

$y_2-y_1=2(x_2-x_1)$，

$\therefore$　$|Q_1Q_2|^2=(x_2-x_1)^2(1+2^2)$

$$=5[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]$$

$$=5\left[\frac{16}{25}b^2-\frac{4}{5}(b^2-4)\right]$$

$$=\frac{1}{5}(80-4b^2),$$

即　$(2\sqrt{2})^2=\frac{1}{5}(80-4b^2)$，

解之，得　$b=\pm\sqrt{10}$。

故　所求割线方程为 $y=2x\pm\sqrt{10}$。

【分析2】由解法1可知，此题求解关键是计算 b 的值，考虑到割线与圆的交点应满足 $x^2+y^2=4$，联想到同角三角函数的平方关系，可将交点坐标用三角函数表示，将问题转化为三角运算。

【解法2】设割线与圆的交点为 $Q_1(2\cos\theta_1, 2\sin\theta_1)$、$Q_2(2\cos\theta_2, 2\sin\theta_2)$ 其中 θ_1、$\theta_2\in(0, 2\pi)$，则

$$4(\cos\theta_1-\cos\theta_2)^2+4(\sin\theta_1-\sin\theta_2)^2=(2\sqrt{2})^2,$$

化简并整理，得　$\mathrm{tg}\theta_1\cdot\mathrm{tg}\theta_2=-1$，

$\therefore$　$OQ_1\perp OQ_2$，即　$\theta_2=\theta_1\pm\dfrac{\pi}{2}$。

由斜率公式，得　$\dfrac{2\sin\theta_1-2\sin\theta_2}{2\cos\theta_1-2\cos\theta_2}=2$，

即　$\sin\theta_1-\sin\theta_2=2(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$。

将 $\theta_2=\theta_1\pm\dfrac{\pi}{2}$ 代入上式，得

$$\sin\theta_1\mp\cos\theta_1=2(\cos\theta_1\pm\sin\theta_1),$$

化简并整理，得　$\mathrm{tg}\theta_1=-3$ 或 $\mathrm{tg}\theta_1=\dfrac{1}{3}$。

$\therefore$　割线方程为 $y-2\sin\theta_1=2(x-2\cos\theta_1)$，

即　$y=2x\pm\dfrac{2}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\theta_1}}(\mathrm{tg}\theta_1-2)$。

将 -3 和 $\dfrac{1}{3}$ 分别代替 $\mathrm{tg}\theta_1$，得所求割线方程为

$$y=2x\pm\sqrt{10}.$$

【分析3】注意到圆的弦长为$2\sqrt{2}$，亦可使用直线的参数方程。

【解法3】设割线的倾斜角为α，则$\operatorname{tg}\alpha=2$，

$$\therefore\quad \cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5},\ \sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

设割线在y轴上的截距为b，则割线的参数方程可写成

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{5}}{5}t, \\ y=b+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}t. \end{cases} \quad (t\text{为参数})$$

代入已知圆的方程，得

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{5}t\right)^2+\left(b+\frac{2\sqrt{5}}{5}t\right)^2=4,$$

整理，得 $t^2+\dfrac{4\sqrt{5}}{5}bt+b^2-4=0$。

设割线与圆的交点为Q_1、Q_2，则Q_1、Q_2对应的参数即为上述方程的两个根t_1、t_2。

$$\therefore\quad t_1+t_2=-\frac{4\sqrt{5}}{5}b,\ t_1\cdot t_2=b^2-4.$$

于是 $$(2\sqrt{2})^2=(t_1+t_2)^2-4t_1t_2$$

$$=\frac{16}{5}b^2-4(b^2-4)=\frac{1}{5}(80-4b^2).$$

解之，得 $b=\pm\sqrt{10}$。

故所求割线方程为 $y=2x\pm\sqrt{10}$。

【分析4】由已知圆的方程可知，该圆的圆心在坐标原

点，因此，所求割线应有两条，且由圆心向这两条割线引垂线时，两个垂足应关于圆心（原点）对称，据此可求两个垂足的坐标，进而利用点斜式求得割线方程。

【解法4】 自圆心O引所求割线的垂线，垂足分别为D及D'，则D、D'为割线截圆所得弦的中点。

因为圆的半径为2，弦长为$2\sqrt{2}$，

所以弦心距 $d=|OD|=|OD'|=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$。

设割线的倾斜角为α，则$\operatorname{tg}\alpha=2$。

$\therefore\quad \cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

于是D'点坐标为

$$\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right),\ \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right).$$

即 $\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}},\ \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$.

由于D、D'关于原点对称，

所以D点坐标为 $\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$

故所求割线方程为 $y\pm\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=2\left(x\mp\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$，

即 $y=2x\pm\sqrt{10}$.

以上给出了例2的四种不同解法。在这些解法中，由于

着眼点不同，涉及到许多的知识，如直线的斜截式、点斜式及参数方程，用到两点间距离公式、直线的斜率公式，韦达定理及三角函数变换公式。

三、一题多解、纵横交织，有利于提高解决综合问题的能力

数学综合题涉及数学各个分支的基础知识和解题方法，往往是知识纵横交叉，方法相互渗透，一般来讲，难度较大。通过解析几何一题多解可以不断丰富解综合题的经验，提高对综合题的认识和理解能力。

例 4 如图1-2所示，设$p \neq 0$，实系数一元二次方程$z^2-2pz+q=0$有两虚根z_1、z_2，再设z_1、z_2在复平面内对应点是Z_1、Z_2，求以Z_1、Z_2为焦点且过原点的椭圆的长轴的长。

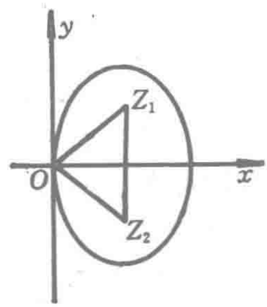

图 1-2

【分析1】 由题意可知z_1、z_2为共轭虚根，因此Z_1、Z_2关于x轴对称。又知椭圆以Z_1、Z_2为焦点，且过原点，故可利用复数的性质及椭圆的定义求长轴的长。

【解法1】 依题意可知，z_1、z_2为共轭虚数，由复数的性质及韦达定理，得

$$|z_1|^2=z_1 \cdot \bar{z}_1=z_1 \cdot z_2=q>0,$$

且$|z_1|=|z_2|$.

$$\therefore\ 2a=|z_1|+|z_2|=2\sqrt{q},$$

即椭圆的长轴长为 $2\sqrt{q}$ 。

【分析2】 利用复数加法和减法的几何意义，求出短轴长和焦距，再根据椭圆性质，求出长轴的长。

【解法2】 ∵ p、q为实数，$p\neq 0$，z_1、z_2为虚数，

则 判别式$\Delta=(-2p)^2-4q<0$。

即 $q>p^2>0$。

由 z_1、z_2为共轭虚数，知Z_1、Z_2关于x轴对称。

于是 椭圆短轴在x轴上。又 椭圆过原点，

∴ 原点为椭圆短轴的一个端点。

根据椭圆的性质及复数加减法的几何意义，即得

椭圆短轴长 $2b=|z_1+z_2|=|2p|=2|p|$，

焦距 $2c=|z_1-z_2|=\sqrt{|(z_1+z_2)^2-4z_1z_2|}$

$$=2\sqrt{q-p^2},$$

椭圆长轴长 $2a=2\sqrt{b^2+c^2}=2\sqrt{q}$ 。

【分析3】 由求根公式求出方程两根 z_1，z_2，再根据椭圆的性质及复数的几何意义，可求得椭圆长轴的长。

【解法3】 ∵ p、q为实数，$p\neq 0$，z_1、z_2为虚根，

∴ 判别式 $\Delta=(-2p)^2-4q<0$，即 $q>p^2>0$。

由实系数一元二次方程求根公式，得

$$z=\frac{2p\pm\sqrt{4q-(2p)^2}i}{2}=p\pm\sqrt{q-p^2}i.$$

而 Z_1、Z_2关于x轴对称，则 椭圆短轴在x轴上，

又 椭圆过原点，则 原点为椭圆短轴的一个端点。

根据椭圆的性质及复数的几何意义可得：

椭圆短轴长 $2b=|z_1+z_2|=2|p|$，

焦距 $2c=|z_1-z_2|=2\sqrt{q-p^2}$，