

# 高等气动弹性力学 与控制

赵永辉 黄锐 著



科学出版社

# 高等气动弹性力学与控制

赵永辉 黄 锐 著

科学出版社

北 京

## 内 容 简 介

本书包括气动弹性力学与控制中的若干高级内容,较为全面地反映气动弹性力学与控制学科的概貌,同时也包括该领域的若干最新成果.本书注重理论与实际应用相结合,并配有较多的数值算例.本书取材于国内外公开发表的学术论文和专著,其中包括作者在该领域中所取得的一些最新研究成果.

本书适合力学、航空航天、土木工程等专业的研究人员、高等院校学生、研究生和相关领域的工程技术人员使用.

### 图书在版编目(CIP)数据

高等气动弹性力学与控制/赵永辉,黄锐著. —北京:科学出版社,2015  
ISBN 978-7-03-044222-2

I. ①高… II. ①赵… ②黄… III. ①气动弹性动力学—研究 IV. ①O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 092074 号

责任编辑:刘凤娟/责任校对:钟 洋  
责任印制:徐晓晨/封面设计:耕 者

**科学出版社** 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

**北京教图印刷有限公司** 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2015 年 10 月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2015 年 10 月第一次印刷 印张:16

字数:363 000

定价:99.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

# 前 言

气动弹性力学研究结构与作用其上的空气动力之间相互耦合而产生的各种力学问题,包括静力学问题和动力学问题。

气动弹性力学是一门工程科学,其新知识、新方法的出现高度依赖实际需求,或受试验中发现的各种新现象的直接驱动,而不是凭空想象。例如,20世纪初人们在探索飞行奥秘的过程中,由于客观条件制约而不得不采取“先实践后理论”的方式。1903年莱特兄弟有动力载人飞机首次成功飞行的前几天,兰利教授的飞机在试飞时因机翼扭转刚度不足引起过度变形而失事,事后人们才认识到事故原因可归结为静气动弹性发散问题。又如,20世纪40年代之前的桥梁大多跨度较小,结构相对刚硬,没有暴露出气动弹性问题。1940年,塔科马大桥坍塌的事件使人们开始认识到,气动弹性问题对于土木工程同样非常重要。可以说,气动弹性力学的绝大部分理论和方法,都是人类用惨痛的教训和代价换来的,这些理论和方法几乎可从各类事故中一一对号入座。也正是因为这些事故,促进了气动弹性力学学科的诞生和发展。

今天,虽然气动弹性力学正在走向成熟,但解决工程实践中暴露出的各种实际问题仍是该学科发现新知识、创立新理论的主要途径。以目前世界上最尖端的高超音速飞行器研制中涉及的气动弹性问题为例,由于目前人们认知的局限性,对有些问题是根本无法预知的。哪些问题重要、值得去研究,哪些问题不重要,甚至根本不会出现,凭经验判断有时是错误的,必须通过试验才能知晓。因此,研究气动弹性力学的学者必须走出实验室,与工业部门紧密合作,通过实际案例弄清各类现象发生和发展的机理,找到解决的方案,进而推动该学科的进一步发展。

作者长期从事飞机结构气动弹性力学的研究,因此本书主要介绍飞行器研制中所涉及的气动弹性力学与控制问题。作者认为,研究飞行器结构气动弹性力学与控制的主要目的包括:一是在飞行器设计过程中,主动利用气动弹性力学原理去满足设计约束要求;如使用气动弹性剪裁技术去满足颤振、静变形、应力、重量的约束要求。二是对于飞行器试飞中发现的各种气动弹性现象,利用气动弹性力学基本原理弄清其发生和演变的规律,以便在飞行器定型之前能够采取措施避免有害气动弹性现象的出现;如F-16战机在试飞时在跨音速区域出现机翼/外挂的典型极限环振荡现象,必须对这种现象深入分析并提出解决方案。三是对于试验非常困难,甚至无法试验的情况,要利用气动弹性力学理论和方法进行气动弹性现象的预测;如预测高超音速飞行器的颤振现象,为飞行器设计提供指导。

近年来,随着科技进步和国际形势的变化,飞行器结构气动弹性力学与控制的研究方式正在发生变化,主要表现为:CFD技术正被大量应用到气动弹性力学研究中。作者认为,基于CFD的气动弹性力学大规模数值仿真时代已经到来,利用气动弹性力学的基本原理去解决工程实践中遇到的相关问题,将是未来气动弹性力学发展的主流。因此,本书也涉及一些与CFD有关的问题。例如,基于CFD的非定常气动力降阶建模问题。

飞机电传操纵系统出现后,迅速发展起来一项新技术,即随控布局飞机设计技术。该技

术旨在飞机设计阶段就充分考虑主动控制对提高飞机性能的作用。在随控布局飞机可能采用的各类主动控制中,与气动弹性力学关系密切的有颤振主动抑制、突风载荷减缓、机动载荷减缓这三大主动控制技术,本书只关注前两类主动控制。

作者在本书写作过程中坚持以下三项原则。一是实用性:鉴于气动弹性力学与控制是一门工程科学分支,尽量从方法的普适性和工程实用性方面去遴选内容。二是学术性:重视相关方法的理论阐述,尽量给出相关理论的详细推导过程,使读者能够了解相关方法的来龙去脉,便于读者开展后续研究。三是前沿性:吸收了作者所在团队的最新研究成果,如近年来提出的基于 CFD 的非定常气动力降阶建模的新方法等。

与作者 2007 年出版的《气动弹性力学与控制》(科学出版社)相比,本书侧重于气动弹性力学与控制学科所取得的最新研究进展,试图较为全面地反映该学科的近期发展概貌,供涉及该学科的研究者和工程师参考。限于作者的学术水平,书中难免存在不当之处,恳请读者批评指正。

作者由衷感谢北京理工大学胡海岩院士、南京航空航天大学韩景龙教授,他们仔细审阅了此书,并提出了许多宝贵意见。

本书的出版得到了国家自然科学基金(11472128)、南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室自主研究课题(0114G01)的资助,在此一并表示感谢。

作 者

2015 年 4 月 21 日

于南京航空航天大学

机械结构力学及控制国家重点实验室

# 目 录

前言	
第 1 章 非定常空气动力学基础	1
1.1 攻角阶跃变化产生的非定常气动力	1
1.2 二元机翼简谐运动下的非定常气动力	2
1.2.1 两自由度二元机翼简谐运动下的非定常气动力	3
1.2.2 三自由度二元机翼简谐运动下的非定常气动力	8
1.3 二元机翼任意运动下的非定常气动力	10
1.3.1 获得任意运动非定常气动力的基本思想	10
1.3.2 Wagner 函数	11
1.3.3 二元机翼任意运动下的非定常气动力	13
1.4 细长体的非定常气动力	14
1.5 基于超音速活塞理论的非定常气动力	16
1.5.1 Lighthill 的经典活塞理论	16
1.5.2 其他气动力模型	19
1.6 Lighthill 超音速活塞理论的应用	20
参考文献	24
第 2 章 基于偶极子网格法的非定常空气动力学计算	25
2.1 奇异积分方程及核函数的计算	25
2.1.1 奇异积分方程	25
2.1.2 核函数的表达式	27
2.1.3 核函数 $K_1$ 中积分 $I_1$ 的计算	29
2.1.4 核函数 $K_2$ 中积分 $I_2$ 的计算	29
2.2 空气动力学影响系数的定常和非定常部分	30
2.2.1 空气动力学影响系数	30
2.2.2 空气动力学影响系数的定常和非定常部分	31
2.3 空气动力学影响系数非定常部分的计算	32
2.3.1 增量核函数分子的二次多项式近似	32
2.3.2 积分 $J_{1ij}$ 和 $J_{2ij}$ 的解析表达式	34
2.3.3 空气动力学影响系数非定常部分 $D_{1ij}$ 和 $D_{2ij}$ 的表达式	35
2.3.4 计算过程中对奇异性的处理	36
2.4 空气动力学影响系数定常部分的计算	37
2.5 边界条件与非定常气动力计算	39
2.5.1 非定常气动力计算	39

2.5.2	边界条件	40
2.6	计算高频气动力的偶极子网格法	43
2.7	偶极子网格气动模型的考核算例	47
	参考文献	51
<b>第 3 章</b>	<b>结构与气动模型之间的位移插值和力等效</b>	<b>53</b>
3.1	结构与气动模型之间的数据传递	53
3.2	无限板样条方法	56
3.3	薄板样条方法	60
3.4	梁样条方法	63
3.5	刚性连接法与总体样条矩阵	71
	参考文献	72
<b>第 4 章</b>	<b>飞行器静气动弹性分析</b>	<b>73</b>
4.1	物理空间下的静气动弹性配平方程	73
4.2	弹性和刚性气动导数计算	77
4.3	模态空间下的静气动弹性配平方程	79
4.4	发散动压计算与配平分析	81
4.4.1	发散动压计算	81
4.4.2	静气动弹性配平	82
	参考文献	83
<b>第 5 章</b>	<b>线性颤振计算方法</b>	<b>84</b>
5.1	动气动弹性支配方程的一般形式	84
5.1.1	结构模型与气动模型的耦合	84
5.1.2	动气动弹性方程的建立	87
5.1.3	模态空气动力矩阵的简化表达	87
5.2	颤振计算的 $U-g$ 法	89
5.3	颤振计算的 $p-k$ 法	90
5.4	颤振计算的分段二次函数法	92
5.5	颤振计算中的模态跟踪技术	95
	参考文献	97
<b>第 6 章</b>	<b>线性颤振分析算例</b>	<b>98</b>
6.1	基于 Theodorsen 气动模型的颤振计算	98
6.2	基于亚音速偶极子网格气动模型的颤振计算	102
6.3	基于超音速活塞气动力模型的翼面颤振计算	107
6.3.1	活塞理论应用于翼面时的气动力表达式	107
6.3.2	翼面的颤振方程	108
6.3.3	颤振计算中的数值积分	109
6.3.4	固有振型在积分点处的值及斜率的计算	111
6.3.5	颤振形态的计算	114

6.3.6	后掠翼的超音速颤振算例	115
6.4	基于超音速活塞气动力模型的壁板颤振计算	117
6.4.1	零气流偏角下壁板的颤振方程	117
6.4.2	非零气流偏角下壁板的颤振方程	120
6.4.3	四边简支板的超音速颤振算例	122
	参考文献	125
<b>第 7 章</b>	<b>基于 CFD 的非定常气动力降阶模型及其应用</b>	126
7.1	基于 CFD 的非定常气动力降阶建模方法简述	126
7.2	基于 CFD 的非定常气动力非线性降阶建模	127
7.2.1	多输入多输出非线性降阶模型	128
7.2.2	跨音速气动弹性系统的时域建模	129
7.2.3	气动力非线性降阶建模及应用的数值仿真	131
7.3	基于代理技术的多马赫数气动力降阶模型	134
7.3.1	基于代理技术的气动力降阶模型	135
7.3.2	多马赫数气动力降阶建模的数值仿真	136
7.4	多操纵面弹性机翼非定常空气动力的降阶建模	139
	参考文献	145
<b>第 8 章</b>	<b>突风干扰下的气动弹性响应计算</b>	148
8.1	基本假设和突风的定义	148
8.1.1	基本假设	148
8.1.2	离散突风	149
8.1.3	连续突风	150
8.2	突风干扰下的气动弹性方程	152
8.2.1	谐和突风	152
8.2.2	计入突风影响的气动弹性方程	153
8.3	突风响应的计算方法	156
8.3.1	离散突风响应的频域计算方法	156
8.3.2	离散突风响应的时域计算方法	158
8.3.3	连续突风激励下的响应	160
8.4	内载荷的计算方法	160
8.4.1	模态位移法	160
8.4.2	力求和法	161
8.4.3	内载荷的功率谱密度	162
8.5	多突风区域下气动弹性系统的状态方程	163
8.5.1	多突风区域	163
8.5.2	两输入状态方程	164
8.5.3	单输入状态方程	167
8.6	连续突风干扰下气动弹性系统的状态方程	168



8.7 连续突风的数值模拟	171
8.7.1 连续突风 PSD 及突风滤波器总结	171
8.7.2 连续突风的数值模拟	174
8.8 离散和连续突风响应算例	176
8.8.1 BAH 机翼的突风响应计算	176
8.8.2 运输机的突风响应计算	181
参考文献	185
<b>第 9 章 弹性飞机的突风载荷减缓控制</b>	<b>187</b>
9.1 突风载荷减缓控制研究进展概述	187
9.2 开环气动伺服弹性方程	190
9.2.1 气动弹性状态方程	190
9.2.2 输出方程	193
9.2.3 作动器模型	194
9.2.4 开环状态方程	195
9.2.5 铰链力矩	195
9.3 突风干扰下的开环气动伺服弹性方程	197
9.3.1 气动弹性状态方程	197
9.3.2 输出方程	200
9.3.3 开环状态方程	201
9.4 基于模型预测控制的突风载荷减缓	202
9.4.1 模型预测控制的基本原理	202
9.4.2 基于模型预测控制的突风载荷减缓	203
9.4.3 突风载荷减缓的数值仿真结果	209
参考文献	211
<b>第 10 章 机翼颤振主动抑制仿真及风洞实验</b>	<b>213</b>
10.1 计入时滞的机翼颤振主动抑制	213
10.1.1 状态方程离散化及无时滞化	213
10.1.2 线性二次规划设计	215
10.1.3 卡尔曼观测器设计	217
10.1.4 数值仿真算例	217
10.2 机翼颤振主动抑制风洞实验平台设计	226
10.2.1 数据采集与滤波	227
10.2.2 颤振主动抑制控制器实验实现	227
10.2.3 作动器伺服跟踪	228
10.2.4 风洞模型开环测试实验	230
10.3 基于极点配置的机翼颤振主动抑制风洞实验	232
10.3.1 基于极点配置的控制律设计	232
10.3.2 鲁棒稳定性分析及闭环仿真	234

---

10.3.3 风洞实验	235
10.4 计入时滞的机翼颤振主动抑制风洞实验	237
10.4.1 计入时滞的最优控制律设计	237
10.4.2 数值仿真	239
10.4.3 风洞实验	240
参考文献	243

# 第 1 章 非定常空气动力学基础

非定常空气动力学是气动弹性力学最重要的研究内容. 非定常意味着随时间的演变, 非定常现象可由流场本身所具有的时间依赖性产生, 如流动分离; 也可由物体位置和姿态的变化, 或弹性结构与流体之间的耦合效应产生. 这里, 主要关注由于物体运动而产生的非定常气动力.

非定常空气动力学是研究物体相对于空气的运动随时间变化时, 作用于物体上空气动力变化规律的学科.

20 世纪 20 年代, 人们从飞机坠毁事故中初步认识到气动力、弹性力和惯性力三者耦合的机翼颤振现象, 非定常空气动力学研究也随之开始. 30 年代末期, 出现了二维振荡机翼的 Theodorsen 非定常气动力模型, 奠定了非定常空气动力学的基础. 60 年代以后, 振荡机翼非定常气动力理论由二维发展到三维, 其中最典型的是基于偶极子网格法的非定常气动力模型. 同时也发展出一些工程化的跨音速和超音速非定常气动力模型.

非定常空气动力学是气动弹性力学的难点. 本章讨论几种简单的非定常空气动力模型, 这些模型均具有显式的解析表达式, 包括适用于二元机翼和大展弦比机翼的 Theodorsen 非定常气动力模型; 在 Theodorsen 气动力模型基础上, 进一步导出适用于翼型任意运动的非定常气动力模型; 对于副油箱、外挂、导弹和火箭等细长体, 给出细长体非定常气动力模型; 给出基于超音速活塞理论的非定常气动力模型; 最后给出 Lighthill 活塞理论在双楔型二元翼型非定常气动力计算中的具体应用.

## 1.1 攻角阶跃变化产生的非定常气动力

准定常气动力意味着翼型经历可变沉浮、俯仰运动时, 作用在其上的气动载荷在任何瞬时都等于该翼型在常值位置和速度下的受力.

为了解非定常气动力特性, 首先考虑弦长为  $c$  的二维翼型, 具有初始小攻角  $\alpha$ , 在静止空气中以速度  $U_\infty$  运动. 假设流动为无黏不可压流, 现在让翼型突然发生一个攻角的阶跃变化  $\Delta\alpha = \alpha/2$ . 若采用定常气动力模型, 升力将有 50% 的增加值, 但事实并不如此.

实际情况是, 攻角阶跃变化引起的升力增量为

$$\Delta L = \frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 c a_t \Delta\alpha \cdot \phi_w(\tau), \quad (1.1.1)$$

式中,  $\rho_\infty$  为空气密度,  $a_t$  为升力线斜率,  $\phi_w(\tau)$  为 Wagner 函数<sup>[1]</sup>, 其表达式为

$$\phi_w(\tau) = 0, \quad \tau < 0 \quad \text{和} \quad \phi_w(\tau) = \frac{\tau + 2}{\tau + 4}, \quad \tau \geq 0, \quad (1.1.2)$$

式中,  $\tau = U_\infty t/b$  为无量纲时间,  $b$  为半弦长,  $t$  为物理时间.

Wagner 函数也可写为如下形式

$$\phi_w(\tau) = 1 - A_1 e^{-b_1 \tau} - A_2 e^{-b_2 \tau}, \quad \tau \geq 0, \quad (1.1.3)$$

式中,  $A_1 = 0.165, A_2 = 0.335, b_1 = 0.0455, b_2 = 0.3$ , 这个近似表达式的误差在 1% 以内.

Wagner 函数反映了攻角阶跃变化后, 作用于翼型上的升力随时间变化的动态过程, 是气动力非定常性的一种表征.

以初始作用于二维翼型上的升力为基准将升力正则化. 图 1.1.1 显示非定常升力瞬态变化增量为初始值与最终定常值的一半, 然后逐渐增加趋于最终的定常值. 当经历 15 个半弦长后, 达到的升力值约为定常值的 90%. 这说明, 攻角阶跃变化后, 在升力达到准定常值之前有一个相当长的时间滞后. 这种滞后是因为绕翼型环量变化到新的定常流条件, 以及尾流变化到新的定常条件都需要一定的时间<sup>[2]</sup>.

所以, 翼型攻角阶跃变化产生的非定常气动力并不等于

$$\Delta L = \frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 c a_t \Delta \alpha, \quad (1.1.4)$$

而是等于

$$\Delta L = \frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 c a_t \Delta \alpha \cdot \phi_w(\tau), \quad (1.1.5)$$

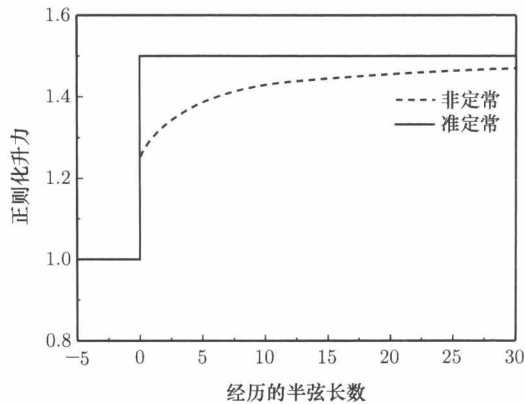


图 1.1.1 翼型攻角阶跃变化产生的升力

其中,  $\phi_w(\tau)$  反映攻角阶跃变化后作用于翼型上的升力在达到准定常值之前所经历的随时间变化的动态过程, 表征气动力的非定常特性.

## 1.2 二元机翼简谐运动下的非定常气动力

颤振分析既可以使用频域气动力也可以使用时域气动力. 不幸的是, 时域非定常气动力模型往往不容易获得, 往往只有频域非定常气动力. 事实上, 通过对颤振这一物理现象的定性分析, 可以知道频域非定常气动力正好满足颤振分析要求.

早在 20 世纪 30 年代, Theodorsen 就提出翼型在简谐运动下的非定常气动力模型, 这就是国际上著名的 Theodorsen 非定常气动力模型. 该模型适用于不可压缩无黏流, 可应用在二元机翼和大展弦比机翼的颤振计算中. Theodorsen 气动力推导非常复杂, 这里直接给出 Theodorsen 气动力的表达式并对该气动力模型的特性进行详细讨论.

### 1.2.1 两自由度二元机翼简谐运动下的非定常气动力

图 1.2.1 所示为一个单位展长二元机翼. 机翼半弦长为  $b$ , 弹性轴  $E$  距离翼弦中点为  $\bar{a} \cdot b$ ,  $\bar{a}$  为翼弦中点到弹性轴的距离占半弦长的百分比, 弹性轴在翼弦中点后时,  $\bar{a} > 0$ .

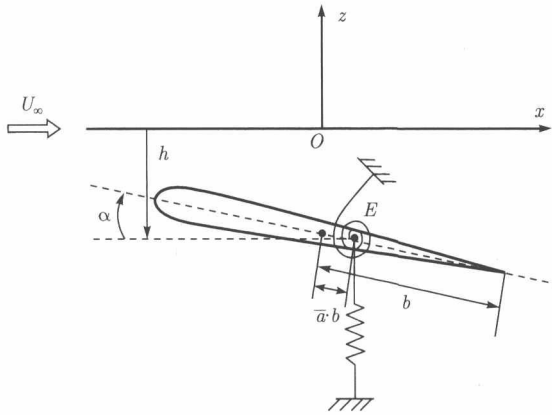


图 1.2.1 两自由度二元机翼的力学模型

对于不可压缩流中的二元机翼, 假设机翼作沉浮  $h = \bar{h}e^{i\omega t}$  (向下为正) 和俯仰  $\alpha = \bar{\alpha}e^{i\omega t}$  (迎风抬头为正) 的简谐运动, 则 Theodorsen 非定常气动力给出的单位展长上的气动升力  $L$  (向上为正) 和对弹性轴的俯仰力矩力  $T_\alpha$  (迎风抬头为正) 分别为

$$L = \underbrace{\pi\rho_\infty b^2(\ddot{h} + U_\infty\dot{\alpha} - b\bar{a}\ddot{\alpha})}_{\text{非环量部分}} + \underbrace{2\pi\rho_\infty U_\infty b C(k) \left[ \dot{h} + U_\infty\alpha + b \left( \frac{1}{2} - \bar{a} \right) \dot{\alpha} \right]}_{\text{环量部分}}, \quad (1.2.1a)$$

$$T_\alpha = \underbrace{\pi\rho_\infty b^2 \left[ b\bar{a}(\ddot{h} + U_\infty\dot{\alpha} - b\bar{a}\ddot{\alpha}) - \frac{1}{2}U_\infty b\dot{\alpha} - \frac{1}{8}b^2\ddot{\alpha} \right]}_{\text{非环量部分}} + \underbrace{2\pi\rho_\infty U_\infty b^2 \left( \bar{a} + \frac{1}{2} \right) C(k) \left[ \dot{h} + U_\infty\alpha + b \left( \frac{1}{2} - \bar{a} \right) \dot{\alpha} \right]}_{\text{环量部分}}, \quad (1.2.1b)$$

式中,  $\rho_\infty$  为空气密度,  $U_\infty$  为来流速度,  $k = \omega b / U_\infty$  为折合频率 (或减缩频率), 是一个无量纲参数.  $C(k)$  是著名的 Theodorsen 函数.

接下来对 Theodorsen 气动力作如下说明<sup>[3]</sup>.

(1) 气动力中第二项, 即包含  $C(k)$  的部分, 与涡产生的气动力有关, 称为环量部分, 可用  $L_c$  表示, 环量部分的  $2\pi$  为升力线斜率; 第一项为非环量部分, 可用  $L_{nc}$  表示.

(2) 升力  $L$  中的第一项为  $\pi\rho_\infty b^2(\ddot{h} + U_\infty\dot{\alpha} - b\bar{a}\ddot{\alpha})$ . 其中,  $\pi\rho_\infty b^2$  为单位展长机翼周围的视在质量, 即底面半径为  $b$  的单位展长圆柱体的质量.  $\ddot{h} + U_\infty\dot{\alpha} - b\bar{a}\ddot{\alpha}$  表示机翼剖面中点的速度作平移运动以及有攻角  $\alpha$  时所引起的加速度, 它与  $\pi\rho_\infty b^2$  的乘积代表机翼振动时带动空气与它一起运动而产生的惯性反作用力, 可用  $L_1$  表示, 其作用点为翼型的中点. 升力表达式中的第二项代表由环量产生的升力, 其合力通过气动中心, 用  $L_2$  表示.

(3) 表达式中的第一项是  $L_1$  对弹性轴的力矩; 第二项代表阻尼力矩; 第三项是机翼绕翼型中点作角加速度运动而引起的空气的惯性反作用力矩; 第四项代表  $L_2$  对弹性轴的力矩.

Theodorsen 函数  $C(k)$  的具体表达式为

$$C(k) = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + i \cdot H_0^{(2)}(k)} = F(k) + iG(k). \quad (1.2.2)$$

显然, Theodorsen 函数是折合频率  $k$  的复函数. 式 (1.2.2) 中,  $H_v^{(2)}$  表示第二类  $v$  阶 Hankel 函数. Hankel 函数定义为  $H_v^{(2)} = J_v - iY_v$ ,  $J_v$  和  $Y_v$  分别为第一类和第二类 Bessel 函数. 函数  $C(k)$  的计算有以下两种方法.

方法一: 使用 Theodorsen 函数  $C(k)$  的近似表达式计算<sup>[4]</sup>;

$$C(k) = \begin{cases} 1 - \frac{0.165}{1 - \frac{0.045}{k}i} - \frac{0.335}{1 - \frac{0.3}{k}i}, & k \leq 0.5, \\ 1 - \frac{0.165}{1 - \frac{0.041}{k}i} - \frac{0.335}{1 - \frac{0.32}{k}i}, & k > 0.5. \end{cases} \quad (1.2.3)$$

方法二: 使用 MATLAB 中的 `besselk` 命令计算 Theodorsen 函数  $C(k)$ .

函数  $C(k)$  描述了不同折合频率下谐和非定常气动力相对于准定常气动力在幅值和相位上的变化. 图 1.2.2 和图 1.2.3 给出了函数  $C(k)$  随折合频率的变化关系. 由图 1.2.2 和图 1.2.3 可得出以下结论.

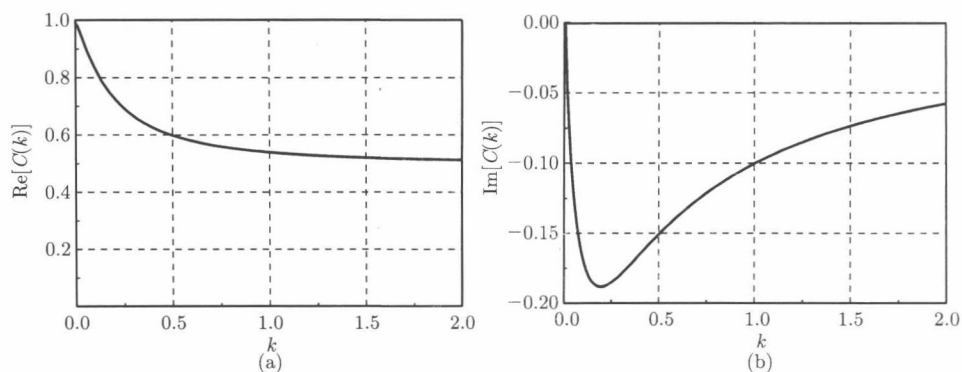
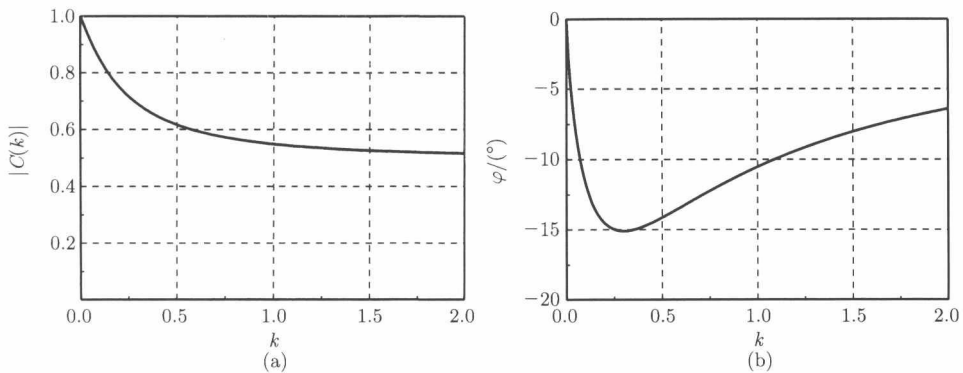


图 1.2.2 Theodorsen 函数  $C(k)$  实部和虚部随折合频率的变化

图 1.2.3 Theodorsen 函数  $C(k)$  幅值和相位随折合频率的变化

(1) 随着折合频率的增加,  $C(k)$  的幅值由 1 逐渐减小, 最后趋于 0.5。所以 Theodorsen 函数又称为升力亏损函数。当折合频率等于 0.06 时,  $C(k)$  的幅值大约减少 10%, 可通过判断折合频率是否大于 0.06 来衡量非定常效应的程度。因此, 反馈型气动力非定常效应之一是气动载荷幅值的减小。

(2) 由于  $G(k) \leq 0$ , 所以  $C(k)$  函数的相角总是小于或等于零, 表示相位的滞后效应。因此, 除幅值减小,  $C(k)$  函数引入了气动载荷相位滞后的非定常效应。由图 1.2.3 可以看出, 最大的相位滞后发生在  $k = 0.3$  左右, 此时的相位滞后约为  $15^\circ$ 。折合频率小于 0.3 时, 相位滞后随着折合频率的增加而增加。当折合频率大于 0.3 时, 相位滞后随着折合频率的增加而减小。因此, 反馈型气动力非定常效应之二是气动载荷对机翼运动存在相位滞后。

实际上, 可以把 Theodorsen 函数  $C(k)$  看成一个动态系统, 这个系统能把输入 (翼型在某一频率振荡时的准定常力) 转化为一个依赖折合频率的输出 (即非定常气动力)。

为进一步理解气动力的非定常效应, 将式 (1.2.1a) 改写为

$$L = \pi\rho_\infty b^2(\ddot{h} + U_\infty\dot{\alpha} - b\bar{a}\ddot{\alpha}) + \frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 \cdot 2b \cdot 2\pi \cdot C(k)\alpha_{qs}(t), \quad (1.2.4)$$

式中

$$\alpha_{qs} = (\dot{h} + U_\infty\alpha + b(0.5 - \bar{a})\dot{\alpha})/U_\infty. \quad (1.2.5)$$

如果将  $\alpha_{qs}$  定义为在翼型四分之三弦长点处定义的准定常攻角, 那么就可以把式 (1.2.6)

$$\alpha_{eq} = C(k)\alpha_{qs} = C(k)(\dot{h} + U_\infty\alpha + b(0.5 - \bar{a})\dot{\alpha})/U_\infty. \quad (1.2.6)$$

看成准定常攻角经非定常修正后的等效攻角。因此, 可以把非定常气动力看成经非定常修正后的等效攻角下的准定常气动力。

将  $h = \bar{h}e^{i\omega t}$  和  $\alpha = \bar{\alpha}e^{i\omega t}$  代入式 (1.2.1a) 和式 (1.2.1b) 中, 可将 Theodorsen 非定常气动力写成如下严格的频域形式

$$L = \pi\rho_\infty b^3\omega^2 \left\{ L_h \frac{\bar{h}}{b} + \left[ L_\alpha - \left( \frac{1}{2} + \bar{a} \right) L_h \right] \bar{\alpha} \right\} e^{i\omega t}, \quad (1.2.7a)$$

$$T_{\alpha} = \pi\rho_{\infty}b^4\omega^2 \left\{ \left[ M_h + \left( \frac{1}{2} + \bar{a} \right) L_h \right] \frac{\bar{h}}{b} + \left[ M_{\alpha} + \left( \frac{1}{2} + \bar{a} \right) (L_{\alpha} - M_h) - \left( \frac{1}{2} + \bar{a} \right)^2 L_h \right] \bar{\alpha} \right\} e^{i\omega t}, \quad (1.2.7b)$$

式中, 简谐振动的复系数为

$$L_h = -1 + i\frac{2}{k}(F(k) + iG(k)), \quad (1.2.8a)$$

$$L_{\alpha} = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{k}[1 + 2(F(k) + iG(k))] + \frac{2}{k^2}(F(k) + iG(k)), \quad (1.2.8b)$$

$$M_h = \frac{1}{2}, \quad M_{\alpha} = \frac{3}{8} - i\frac{1}{k}. \quad (1.2.8c)$$

Theodorsen 非定常气动力表达式 (1.2.7) 也可写成如下形式

$$L = \pi\rho_{\infty}bU_{\infty}^2 \left\{ L_h \frac{\bar{h}}{b} + \left[ L_{\alpha} - \left( \frac{1}{2} + \bar{a} \right) L_h \right] \bar{\alpha} \right\} e^{ik\tau}, \quad (1.2.9a)$$

$$T_{\alpha} = \pi\rho_{\infty}b^2U_{\infty}^2 \left\{ \left[ M_h + \left( \frac{1}{2} + \bar{a} \right) L_h \right] \frac{\bar{h}}{b} + \left[ M_{\alpha} + \left( \frac{1}{2} + \bar{a} \right) (L_{\alpha} - M_h) - \left( \frac{1}{2} + \bar{a} \right)^2 L_h \right] \bar{\alpha} \right\} e^{ik\tau}, \quad (1.2.9b)$$

式中, 简谐振动的复系数为

$$L_h = -k^2 + i2k(F(k) + iG(k)), \quad (1.2.10a)$$

$$L_{\alpha} = -\frac{1}{2}k^2 + ik[1 + 2(F(k) + iG(k))] + 2(F(k) + iG(k)), \quad (1.2.10b)$$

$$M_h = \frac{1}{2}k^2, \quad M_{\alpha} = \frac{3}{8}k^2 - ik, \quad (1.2.10c)$$

式中,  $\tau = U_{\infty}t/b$  为无量纲时间.

当折合频率很小 (如小于 0.06) 时, 可采用准定常流假定. 在 Theodorsen 非定常气动力表达式 (1.2.1) 中略去  $C(k)$  的作用 (令  $C(k) = 1$ ), 并忽略非环量项中与惯性反作用力有关的部分, 得到准定常气动力的表达式如下

$$L_{qs} = 2\pi\rho_{\infty}U_{\infty}b \left[ U_{\infty}\alpha + \dot{h} + b \left( \frac{1}{2} - \bar{a} \right) \dot{\alpha} \right], \quad (1.2.11a)$$

$$T_{\alpha qs} = 2\pi\rho_{\infty}U_{\infty}b^2 \left( \frac{1}{2} + \bar{a} \right) \left[ U_{\infty}\alpha + \dot{h} + b \left( \frac{1}{2} - \bar{a} \right) \dot{\alpha} \right] - \frac{1}{2}\pi\rho_{\infty}U_{\infty}b^3\dot{\alpha}. \quad (1.2.11b)$$

上面气动力矩公式中的最后一项  $-0.5\pi\rho_{\infty}U_{\infty}b^3\dot{\alpha}$  表示机翼剖面中点的转动角速度引起的气动阻尼力矩, 这一项在俯仰力矩的表达式中一般不可忽略.

将  $h = \bar{h}e^{i\omega t}$  和  $\alpha = \bar{\alpha}e^{i\omega t}$  代入式 (1.2.11) 中, 得到准定常气动力的频域表达式如下

$$L_{qs} = \pi\rho_{\infty}bU_{\infty}^2 \left\{ L_{qsh} \frac{\bar{h}}{b} + \left[ L_{qs\alpha} - \left( \frac{1}{2} + \bar{a} \right) L_{qsh} \right] \bar{\alpha} \right\} e^{ik\tau}, \quad (1.2.12a)$$



$$T_{\alpha qs} = \pi \rho_{\infty} b^2 U_{\infty}^2 \left\{ \left( \frac{1}{2} + \bar{a} \right) L_{qsh} \frac{\bar{h}}{b} + \left[ M_{qs\alpha} + \left( \frac{1}{2} + \bar{a} \right) L_{qs\alpha} - \left( \frac{1}{2} + \bar{a} \right)^2 L_{qsh} \right] \bar{\alpha} \right\} e^{ik\tau}, \quad (1.2.12b)$$

其中

$$L_{qsh} = i2k, \quad L_{qs\alpha} = 2 + i2k, \quad M_{qs\alpha} = -i0.5k. \quad (1.2.13)$$

由以上分析可知, 相比于准定常气动力, 反馈型非定常气动力的两个特征是: ①非定常气动力幅值的减小; ②非定常气动力相对于机翼运动存在相位上的滞后. 这两个特征均与折合频率的大小有关, 当折合频率很小 (如小于 0.06) 时, 可将非定常气动力视为准定常气动力.

为验证非定常气动力的两个特征, 令  $\bar{h} = 0$ ,  $\alpha = \bar{\alpha}e^{i\omega t} = \bar{\alpha}e^{ik\tau}$ , 则根据式 (1.2.9a) 和式 (1.2.12a), 得到非定常升力系数和准定常升力系数分别为

$$C_L = \pi \left[ L_{\alpha} - \left( \frac{1}{2} + \bar{a} \right) L_h \right] \bar{\alpha} e^{ik\tau}. \quad (1.2.14)$$

$$C_{Lqs} = \pi \left[ L_{qs\alpha} - \left( \frac{1}{2} + \bar{a} \right) L_{qsh} \right] \bar{\alpha} e^{ik\tau}. \quad (1.2.15)$$

令  $\bar{a} = -0.2$ ,  $\bar{\alpha} = 5^\circ$ , 折合频率  $k$  分别取为 0.05, 0.1, 0.2. 根据式 (1.2.14) 和式 (1.2.15) 计算非定常和准定常升力系数, 计算结果如图 1.2.4 ~ 图 1.2.6 所示.

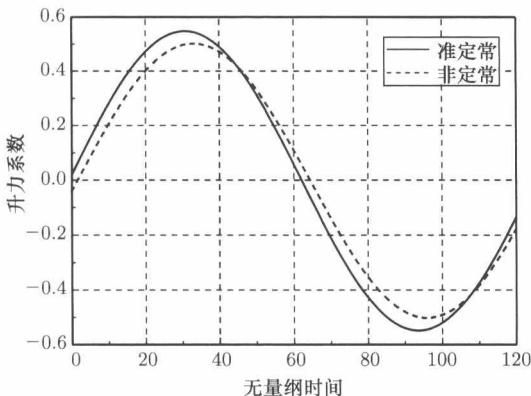


图 1.2.4 非定常和准定常气动力的比较 ( $k = 0.05$ )

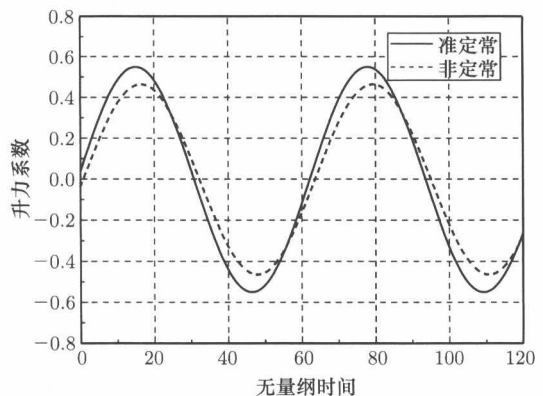


图 1.2.5 非定常和准定常气动力的比较 ( $k = 0.1$ )

由图 1.2.4 ~ 图 1.2.6 可以看出, 非定常气动力与准定常气动力之间存在相位差, 但这个相位差不大. 相比于准定常气动力, 非定常气动力幅值有衰减, 折合频率越高, 非定常气动力的幅值衰减越大. 图 1.2.7 说明非定常气动力与俯仰角运动之间存在相位差.