（第二版）

应用概率论
与数理统计同步辅导

YINGYONG GAILÜLUN YU SHULITONGJI TONGBU FUDAO

主编 张振荣 俞竺君

南開大學出版社

应用概率论与数理统计同步辅导

（第二版）

主　编　张振荣　俞竺君

副主编　张海燕　金惠兰

　　　　张金梅　黄　剑

南开大学出版社

天　津

图书在版编目(CIP)数据

应用概率论与数理统计同步辅导 / 张振荣，俞竺君主编. —2 版. —天津：南开大学出版社，2016.1
ISBN 978-7-310-05012-3

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①张… ②俞… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 277517 号

南开大学出版社出版发行
出版人:孙克强
地址:天津市南开区卫津路 94 号 邮政编码:300071
营销部电话:(022)23508339 23500755
营销部传真:(022)23508542 邮购部电话:(022)23502200

*

天津午阳印刷有限公司印刷
全国各地新华书店经销

*

2016 年 1 月第 2 版 2016 年 1 月第 1 次印刷
210×148 毫米 32 开本 9 印张 252 千字
定价:24.00 元

如遇图书印装质量问题,请与本社营销部联系调换,电话:(022)23507125

内容简介

本书是深入学习概率论与数理统计的辅导书.全书共分八章,内容包括随机事件及其概率、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、样本及统计量、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析.各章按知识结构,释难解惑,典型例题,考研真题,习题精解,模拟试题及模拟试题参考答案进行组织编写.

本书可用于学习概率论与数理统计的考研复习,同时也适合作为高校教师的教学参考书.

第一版前言

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的数学学科，是高等学校理工科类、经管类等专业重要的基础理论课，也是全国硕士研究生入学的数学考试必考课程.学生对它掌握的好坏，不仅直接关系到后续课程的学习，而且对提高教育质量和人才培养质量都有着深远的影响.

初学概率论与数理统计的同学往往不知如何去解题。本书的目的就是通过对释难解惑和经典例题的分析，帮助学生正确理解基本概念，掌握解题的方法与技巧，并通过适量的练习，达到培养分析问题解决问题能力的目的.

本书的内容与现行教材《应用概率论与数理统计》同步，共分八章，各章由重要概念、公式及结论，释难解惑，典型例题，考研真题，习题精解，模拟试题及模拟试题参考答案构成.

重要概念、公式及结论 对本章必须掌握的基本概念、性质、定理和公式进行归纳，使读者易学、易记、易掌握.

释难解惑 对重点、难点以及容易混淆的概念进行诠释，使读者掌握问题的本质.

典型例题 尽可能全面归纳这门课程所涉及的题型，逐一进行分析并给出了解题方法和规律.对解法的获得过程给予了直观、简便的分析，帮助读者掌握解题思路、获得解题方法、提高解题能力.

考研真题 精选与本节内容有关的考研真题，试题涵盖了 2004 年至 2013 年的各类典型题型，并做了详细的解答，供考研的学生使用.

习题精解 主要对配套教材《应用概率论与数理统计》的习题做了详细的解答，使读者进一步提高解题能力.

模拟试题及模拟试题参考答案　每章都配置了难易度适中的模拟试题及参考答案，以填空题、选择题、计算题的形式给出，供读者自测本章内容掌握的程度.

本书是编者深入研究教学大纲和研究生考试大纲之后撰写而成的，它不仅是广大学生的辅导书、教师教学的参考书，而且也是硕士研究生入学考试必备的复习用书.

本书的第一、二、三章由张海燕编写，第四、五章由金惠兰编写，第六章由俞竺君编写，第七、八章由张振荣编写，金惠兰负责统稿.

编写本书时，参阅了许多书籍，引用了许多经典的例子和解题思路，在此向有关作者致谢！

由于编者水平有限，书中错误和不妥之处，敬请读者不吝指教.

编　者

2013 年 10 月于天津农学院

第二版前言

《应用概率论与数理统计同步辅导》作为《应用概率论与数理统计》教材的同步辅导书，自出版以来，受到广大师生的热烈欢迎.很多读者提出了宝贵的意见和建议.在修订本书时，我们根据这些意见和建议，结合作者的教学实践经验，在内容上作了适当调整，将“重要概念、公式及结论”这一板块改为“知识结构”图形框架，把章节内容用图表显示，读者可以根据知识结构去教材中查阅详细概念，使得本书更加简洁；完善了“典型例题”部分，对每一章节的知识点对应的题型进行补充，给读者提供全面的题型.“考研真题”增加了 2014 年和 2015 年的考研真题，并进行详细解答.“习题精解”详细讲解了新版教材的章节习题，帮助读者更快更好地掌握学习内容.

本书共分为八章，各章由知识结构、释难解惑、典型例题、考研真题、习题精解、模拟试题及模拟试题参考答案构成.

本书的第一章由张金梅编写，第二章由张海燕编写，第三、八章由张振荣编写，第四、五章由金惠兰编写，第六章由俞竺君编写，第七章由黄剑编写，全书由张振荣统稿.

书中不妥之处，欢迎广大读者批评指正.

编　者

2015 年 9 月于天津农学院

目　　录

第一章 随机事件及其概率

一、知识结构

- 随机事件及其概率
  - 随机事件
    - 概念：随机试验、样本空间、随机事件
    - 关系及运算：包含、相等、互不相容（互斥）、对立（互逆）、和（并）、积（交）、差及完备事件组
    - 运算律：交换律、结合律、分配律、德·摩根律、吸收律、对立律
  - 事件的概率
    - 定义
      - 古典概型：见注（1）
      - 几何概型：见注（2）
      - 统计定义、公理化定义（非负性、规范性、可加性）
    - 主要性质
      - 可加性：见注（3）
      - 减法公式：见注（4）
      - 一般加法公式：见注（5）
    - 条件概率公式：见注（6）
      - 乘法公式：见注（7）
      - 全概率公式与贝叶斯公式：见注（8）
  - 事件的独立性
    - 两个事件的独立
    - 多个事件的独立性（相互独立及性质、两两独立）
    - 伯努利概型
      - 定理：见注（9）

注：

(1)古典概型：对样本空间 Ω 中任一事件 A

$$P(A)=\frac{\text{事件 }A\text{ 包含的基本事件数}}{\text{样本空间中所含的基本事件总数}}.$$

(2)几何概型：事件 A 对应区域为 D

$$P(A)=\frac{D\text{ 的几何测度}}{\text{样本空间 }\Omega\text{ 的几何区域 }G\text{ 的几何测度}}.$$

(3)可加性：$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$，特别：$P(\overline{A})=1-P(A)$.

(4)减法公式：

一般 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

特别当 $B\subset A$ 时：① $P(A-B)=P(A)-P(B)$；

② $P(B)\leqslant P(A)$.

(5)一般加法公式：

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC).$$

(6)条件概率公式：

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}(P(A)>0).$$

(7)乘法公式：

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

(8)全概率公式与贝叶斯公式：设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 Ω 的一个完备事件组，则对任一事件 B 都有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i),$$

$$P(A_k|B)=\frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)},(k=1,2,\cdots,n).$$

(9)定理：在一次试验中事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$，则在

n 重伯努利试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$$P(k;n,p)=C_n^k p^k q^{n-k},p+q=1,k=0,1,2,\cdots,n.$$

二、释难解惑

1.怎样区分互逆事件和互斥事件?

答 事件 A 与 B 互斥指的是两者不可能同时发生,而事件 A 与事件 B 互逆指的是 A 与 B 不但不能同时发生,还需 A 与 B 中有一个事件必发生.即

A 与 B 互斥 $\Leftrightarrow AB=\Phi$;

A 与 B 互逆 $\Leftrightarrow AB=\Phi$ 且 $A+B=\Omega$.

2.样本空间的选取是否唯一?

答 样本空间的选取一般不唯一.在解题的过程中,选取恰当的样本空间,可简化计算,参见例 1.11 方法二.

3.如何理解概率的公理化定义?

答 前苏联大数学家柯尔莫哥洛夫于 1933 年成功地将概率论实现公理化.前面我们曾指出:事件与试验相联,试验的每个结果称为事件.与此相应,在柯式的公理化体系中引进一个抽象的集合 Ω,其元素 ω 称为基本事件;一个事件是由若干个基本事件构成的,与此相应,在柯氏的公理化体系中考虑由 Ω 的子集构成的一个集类 F,F 中的每个成员就称为"事件".事件有概率,其大小随事件而异.换言之,概率是事件的函数,与此相应,在柯式的公理化体系中引进一个定义在 F 上的函数 P,对 F 中的任一成员 A,$P(A)$ 之值即可理解为概率.柯氏的公理化体系对此函数 P 加上几条要求(即公理):

(1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2) $P(\Omega)=1,P(\Phi)=0$;

(3)对于 Ω 中两两互斥的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 都有

$$\begin{aligned}P(\sum_{n=1}^{\infty}A_n)&=P(A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots)\\&=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots.\end{aligned}$$

我们举一简例说明概率的公理化定义的实现:掷一颗质地均匀的

骰子,观察出现的点数.集合 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ 有 6 个元素构成,反映掷骰子的 6 个基本结果.作为 F,在本例中包括 Ω 的所有可能子集,故 F 有 $2^6=64$ 个成员,即该随机试验产生 64 个事件,此时概率函数 P 定义为

$$P(A)=\frac{A\text{ 中所含成员数}}{6},$$

如 $A=\{1,2,3\}$,即表示出现的点数小于 4 这一随机事件,则

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

4.不可能事件的概率是 0,而概率是 0 的事件是否一定是不可能事件?

答 由概率的性质知不可能事件的概率是 0;但概率是 0 的事件不一定是不可能事件.例如:在几何概型下,样本空间 Ω 为区间[0,1]上的随机点构成,事件 $A=\{x\mid x=a\}$(其中 a 为区间[0,1]内的某一常数),则 $P(A)=P\{x\mid x=a\}=\frac{0}{1}=0$,但事件 A 并不是不可能事件。另外,我们在第二章学习了连续型随机变量的相关知识后也可对此加以说明.

5. $P(AB)$ 与 $P(B\mid A)$ 有何区别?

答 $P(AB)$ 表示事件 A 与 B 同时发生的概率,$P(B\mid A)$ 表示在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.它们的计算方法如下:

$$P(AB)=\frac{AB\text{ 所包含的基本事件数}}{\text{样本空间中所含的基本事件总数}};$$

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}\quad(\text{当 } P(A)>0 \text{ 时})$$

$$=\frac{\text{事件 } B \text{ 在 } \Omega_A \text{ 中所含的基本事件数}}{\text{缩减的样本空间 } \Omega_A \text{ 中所含的基本事件总数}}.$$

6.全概率公式和贝叶斯公式适用于哪些问题?

答 全概率公式适用问题的一般特征是:随机试验可分为两个层次,第一层次的所有可能结果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组,它们通常是第二个层次事件发生的基础或原因;需要求概率的事件是第

二个层次中的事件 B. 而找到完备事件组是运用全概率公式的关键.

贝叶斯公式适用问题的特征与全概率公式相同，只是所求问题为全概率公式的逆问题：已知第二个层次中的事件 B 发生了的条件下，求第一层次中的事件 A_j 发生的条件概率 $P(A_j \mid B)$，使用公式的关键仍然是找到完备事件组.

7.事件 A 与 B 互斥(或互不相容)，与事件 A 与 B 相互独立的区别和联系是什么?

答　事件 A 与 B 互斥即 $AB=\Phi$，描述的是两事件的关系，即两者不能同时发生.

事件 A 与 B 独立指事件 A 的发生与否与事件 B 的发生与否无关，即 $P(AB)=P(A)P(B)$ 或 $P(B \mid A)=P(B)$ 描述的是两个事件的概率关系.

当 $P(A)>0$ 且 $P(B)>0$ 时，

(1)若 A 与 B 独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)>0$，故 $AB \neq \Phi$，即 A 与 B 相容.

(2)若 A 与 B 互斥，即 $P(AB)=P(\Phi)=0$，而 $P(A)P(B)>0$，则 $P(AB) \neq P(A)P(B)$，即 A 与 B 不相互独立.

8. n 个事件相互独立与两两独立的区别与联系是什么?

答　根据定义，n 个事件相互独立需满足 $C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=2^n-n-1$ 个等式，而两两独立只需满足其中的 C_n^2 个等式即可，故 n 个事件相互独立一定两两独立，但两两独立不一定相互独立.

例如：已知甲、乙两袋中分别装有编号为 1,2,3,4 的四个球，今从甲、乙两袋中各取出一球，设 $A=\{$从甲袋中取出的是偶数号球$\}$，$B=\{$从乙袋中取出的是奇数号球$\}$，$C=\{$从两袋中取出的都是偶数号球或都是奇数号球$\}$，则 A,B,C 两两独立但不相互独立.

因为根据题意，$P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{2}$，以 i,j 分别表示从甲、乙两袋中取出球的号数，则试验的样本空间为

$$\Omega=\{(i,j) \mid i=1,2,3,4;j=1,2,3,4\},$$

由于 Ω 包含 16 个样本点，事件 AB 包含 4 个样本点 (2,1),

(2,3),(4,1),(4,3),而 AC,BC 都各包含 4 个样本点,故

$$P(AB)=P(AC)=P(BC)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}.$$

于是

$$P(AB)=P(A)P(B),$$
$$P(AC)=P(A)P(C),$$
$$P(BC)=P(B)P(C).$$

因此,A,B,C 两两独立.

又因为 $ABC=\Phi$,所以 $P(ABC)=0$,而 $P(A)P(B)P(C)=1/8$,显然,$P(ABC)\neq P(A)P(B)P(C)$,故 A,B,C 不是相互独立的.

三、典型例题

题型Ⅰ　通过事件的关系和运算用简单事件表示复合事件

例 1.1　设 A,B,C 为任意三个随机事件,则以下命题正确的是(　　).

(A) $A\cup B-B=A-B$　　(B) $(A-B)\cup B=A$

(C) $(A\cup B)-C=A\cup(B-C)$　　(D) $A\cup B=A\overline{B}\cup B\overline{A}$

解　由于 $A\cup B-B=(A\cup B)\overline{B}=A\overline{B}\cup B\overline{B}=A\overline{B}=A-B$,故应选(A),其余三个为错,原因在于

$(A-B)\cup B=(A\overline{B})\cup B=(A\cup B)(\overline{B}\cup B)=A\cup B$,

$(A\cup B)-C=(A\cup B)\overline{C}=A\overline{C}\cup B\overline{C}=(A-C)\cup(B-C)$,

$A\cup B=A\overline{B}\cup\overline{A}B\cup AB$.

题型Ⅱ　由已知事件的概率求出另外一些与之有关系的事件的概率

例 1.2　设 A,B 满足 $A\subset B$,$P(A)=0.1$,$P(B)=0.5$,求 $P(AB)$,$P(A+B)$,$P(\overline{A}\overline{B})$,$P(A\overline{B})$.

解　因 $A\subset B$,故 $AB=A$,$A+B=B$,从而

$P(AB)=P(A)=0.1$;　$P(A+B)=P(B)=0.5$.

又由 $A\subset B$,得到 $\overline{A}\supset\overline{B}$,故 $P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{B})=1-P(B)=0.5$.

因 $A\subset B$,$B\overline{B}=\Phi$,　故 $A\overline{B}=\Phi$,　从而 $P(A\overline{B})=0$.

例 1.3　设 A,B 互斥，且 $P(A)=\frac{1}{3},P(B)=\frac{1}{2}$，求 $P(AB)$，$P(A\bar{B}),P(A\cup\bar{B}),P(\bar{A}-B)$.

解　(1) $P(AB)=P(\Phi)=0$.

(2)由减法法则 $P(A-B)=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)$ 得到

$$P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{3}.$$

(3) $P(A\cup\bar{B})=P(A)+P(\bar{B})-P(A\bar{B})=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$.

(4) $P(\bar{A}-B)=P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A\cup B)$

$$=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=\frac{1}{6}.$$

题型Ⅲ　古典概型下概率的计算

例 1.4　一部 4 卷文集随便放在书架上，问各卷自左向右的卷号恰好为 1,2,3,4 的概率是多少？

解　基本事件总数为 $A_4^4=4\times3\times2\times1$，设 A 表示事件“各卷自左向右的卷号恰好为 1,2,3,4”，则 A 包含的基本事件数只有 1 个，故

$$P(A)=\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}.$$

例 1.5　将一枚质地均匀的硬币抛掷三次，记事件 $A=\{$恰有两次出现币值朝上$\}$，$B=\{$至少有一次出现币值朝上$\}$，求 $P(A),P(B)$.

解　每掷硬币三次为一次试验，用 H 表示币值朝上，T 表示币值朝下，则每次试验的结果都需要用三个字母表示.例如 HHT 表示前两次币值朝上，第三次币值朝下，于是样本空间 $\Omega=\{HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT\}$ 中包含基本事件总数为 $2^3=8$ 个，$A=\{HHT,HTH,THH\}$ 中包含的基本事件数为 $C_3^2=3$ 个，$\bar{B}=\{TTT\}$ 中包含的基本事件数为 1 个，所以

$$P(A)=\frac{3}{8},\quad P(B)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}.$$

例 1.6　从 1,2,…,10 共 10 个数中任取一数，设每个数以 1/10 的概率取中，取后放回，先后取 7 个数，求下列事件的概率：