

电磁场 与 电磁波 基础

王秀敏

主 编

姜国兴

高旭彬

刘 婷

王 珍

副主编

电磁场 与 电磁波 基础

王秀敏

主 编

姜国兴

高旭彬

刘 婷

王 珍

副主编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是面向应用技术型本科生编写的教学用书。本书的指导思想是：理论体系完整；推演论证过程简化；例题和习题题材丰富，难度适当；语言自然流畅，通读性好。内容共分8章，参考学时为48学时。重点讲述电磁场和电磁波的基本概念、基本规律和分析方法。第1章是矢量分析与场论；第2章是麦克斯韦方程组及边界条件；第3、4、5三章是静态场；第6章是时变电磁场；第7章是电磁波基础；第8章是导行电磁波。

版权所有，侵权必究。侵权举报电话：010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波基础/王秀敏主编.--北京：清华大学出版社，2016
ISBN 978-7-302-42839-8

I. ①电… II. ①王… III. ①电磁场②电磁波 IV. ①O441.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第028703号

责任编辑：朱红莲

封面设计：张京京

责任校对：王淑云

责任印制：沈 露

出版发行：清华大学出版社

网 址：<http://www.tup.com.cn>，<http://www.wqbook.com>

地 址：北京清华大学学研大厦A座 邮 编：100084

社总机：010-62770175 邮 购：010-62786544

投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 刷 者：三河市君旺印务有限公司

装 订 者：三河市新茂装订有限公司

经 销：全国新华书店

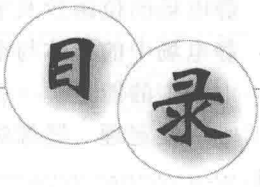
开 本：170mm×230mm 印 张：11.25 字 数：211千字

版 次：2016年2月第1版 印 次：2016年2月第1次印刷

印 数：1~1500

定 价：35.00元

产品编号：068112-01



CONTENTS

第 1 章 矢量分析与场论 1

 1.1 矢量的基本运算 1

 1.2 矢量场的通量与散度 4

 1.3 矢量场的环流与旋度 8

 1.4 标量场的方向导数与梯度 12

 1.5 正交曲面坐标系 场论 15

 1.6 亥姆霍兹定理 19

 小结 19

 习题 1 21

第 2 章 电磁场的基本方程及边界条件 24

 2.1 静电场的基本规律 24

 2.2 恒定磁场的基本规律 31

 2.3 电荷守恒定律 电流密度 34

 2.4 法拉第电磁感应定律 位移电流 36

 2.5 麦克斯韦方程组 41

 2.6 电磁场的边界条件 46

 小结 51

 习题 2 53

第 3 章 静电场的基本方程与边界条件 55

 3.1 静电场的基本方程与边界条件 55

3.2 静电场的位函数及电位方程	60
3.3 静电场中的导体与电容	65
3.4 电场中的能量	68
3.5 唯一性定理 镜像法	69
小结	74
习题 3	75
第 4 章 恒定电场	78
4.1 恒定电场的基本方程和边界条件	78
4.2 静电比拟法 电导	80
小结	85
习题 4	86
第 5 章 恒定磁场	87
5.1 恒定磁场的基本方程和边界条件	87
5.2 电感	92
5.3 磁场能量	96
小结	98
习题 5	99
第 6 章 时变电磁场	101
6.1 时谐电磁场的复数表示	101
6.2 复矢量的麦克斯韦方程组	104
6.3 电磁场能量 坡印廷矢量	109
小结	113
习题 6	114
第 7 章 电磁波基础	116
7.1 均匀平面电磁波在理想介质中的传播特点	116
7.2 电磁波在导电媒质中的传播	121
7.3 电磁波的极化	123
7.4 电磁波的反射和透射	126
小结	133
习题 7	135

第 8 章 导行电磁波	137
8.1 沿均匀波导装置传输电磁波的一般分析	137
8.2 矩形波导	143
8.3 波导中的能量传输与损耗	153
8.4 谐振腔	156
小结	160
习题 8	161
课后习题参考答案	163
参考文献	169

矢量分析与场论

第

1

章

电磁场是矢量场,矢量分析是研究电磁场特性的基本方法。本章主要介绍电磁场理论课程中涉及的矢量分析及场论的基础知识,为后续电磁场理论的学习奠定基础。

1.1 矢量的基本运算

矢量的基本运算包括矢量的加、减运算,矢量的相乘,矢量的导数、积分运算等。

1.1.1 矢量的加减运算

设有两个矢量,在直角坐标系中分别表示为

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$$

则两个矢量的加、减运算可由其对应分量相加或者相减来算出,即

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (A_x \pm B_x) \mathbf{i} + (A_y \pm B_y) \mathbf{j} + (A_z \pm B_z) \mathbf{k} \quad (1-1)$$

1.1.2 矢量的标量积和矢量积

两矢量相乘,结果有两种:结果为标量的称为矢量的标量积,也称为矢量的点乘,记为 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$;结果为矢量的称为矢量的矢量积,也称为矢量的叉乘,记为 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 。

(1) 两矢量点乘,结果为标量,大小等于两矢量的大小及两矢量夹角余弦的乘积。两矢量 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的点乘可写为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \alpha \quad (1-2)$$

式中, α 为矢量 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 正向的夹角。若 $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 结果为正;若 $\alpha = 90^\circ$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 结果为零;若 $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 结果为负。在直角坐标系中,两矢量的

点乘也可以用下式计算：

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1-3)$$

(2) 两矢量叉乘, 结果为矢量, 大小等于两矢量的大小及两矢量夹角正弦的乘积, 即

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB \sin \alpha \quad (1-4)$$

方向与 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 成右手螺旋关系, 即: 右手四指与拇指相互垂直, 当右手四指从 \mathbf{A} 经小于 π 的角转向 \mathbf{B} 时, 拇指伸直时所指的方向即为叉乘结果方向。在直角坐标系中, 两矢量的叉乘也可利用行列式计算如下:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1-5)$$

例题 1-1 已知两矢量 $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ 。试求: (1) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$; (2) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 。

解 (1) 根据直角坐标系中两矢量点乘计算公式, 可得

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 2 \times 1 + 4 \times (-1) + (-3) \times 0 = -2$$

(2) 根据直角坐标系中两矢量叉乘计算公式, 利用行列式计算可得

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0 + (-2\mathbf{k}) + (-3\mathbf{j}) - 4\mathbf{k} - 3\mathbf{i} - 0 \\ &= -3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k} \end{aligned}$$

例题 1-2 已知两矢量 $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ 。试求: 为使 $\mathbf{B} \perp \mathbf{A}$, 且 \mathbf{B} 的模 $B = 1$, 两个待定系数 a 、 b 的值。

解 因 $\mathbf{B} \perp \mathbf{A}$, 两矢量方向间夹角为 90° , $\cos 90^\circ = 0$, 则有 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$, 即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 3a + 4b = 0 \quad (1)$$

又因 $B = 1$, 得

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 1 \quad (2)$$

解由式(1)和式(2)构成的方程组, 得(两组解)

$$a = \frac{4}{5}, \quad b = -\frac{3}{5};$$

$$a = -\frac{4}{5}, \quad b = \frac{3}{5}。$$

1.1.3 矢量的三重积

矢量的三重积又称矢量的三连乘,也分两种情况,其结果也分别为标量和矢量。

(1) 标量三重积。结果为标量,运算满足的关系为

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (1-6)$$

(2) 矢量三重积。结果为矢量,运算满足的关系为

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (1-7)$$

1.1.4 矢量函数的导数与积分

在时变电磁场中经常遇到矢量不是常量,而是随时间变化的情况,即矢量是以时间 t 为参量的函数,记为 $\mathbf{A}(t)$ 。若矢量为随时间变化的函数,则矢量在直角坐标系中各坐标轴上的分量 $A_x(t)$ 、 $A_y(t)$ 、 $A_z(t)$ 也是随时间变化的函数。在直角坐标系中,矢量函数 $\mathbf{A}(t)$ 可表示为

$$\mathbf{A}(t) = A_x(t)\mathbf{i} + A_y(t)\mathbf{j} + A_z(t)\mathbf{k}$$

式中, \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 、 \mathbf{k} 分别为 x 、 y 、 z 三坐标轴方向的单位矢量,是不随时间变化的常矢量。

(1) 矢量函数的导数。若上式中 $A_x(t)$ 、 $A_y(t)$ 、 $A_z(t)$ 都是可导的,则矢量函数 $\mathbf{A}(t)$ 的导数可通过下式进行运算:

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \frac{dA_x(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{dA_y(t)}{dt}\mathbf{j} + \frac{dA_z(t)}{dt}\mathbf{k} \quad (1-8)$$

(2) 矢量函数的积分。与求导数方法类似,矢量函数的积分可通过下式进行运算:

$$\int_0^t \mathbf{A}(t) dt = \int_0^t A_x(t) dt \mathbf{i} + \int_0^t A_y(t) dt \mathbf{j} + \int_0^t A_z(t) dt \mathbf{k} \quad (1-9)$$

例题 1-3 已知一矢量函数为 $\mathbf{A}(t) = t^2\mathbf{i} + 5t\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ 。试求:此矢量函数对时间的一阶导数。

解 根据矢量函数导数公式,可得

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \frac{d(t^2)}{dt}\mathbf{i} + \frac{d(5t)}{dt}\mathbf{j} + \frac{d(3)}{dt}\mathbf{k} = 2t\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$$

例题 1-4 已知一矢量函数为 $\mathbf{A}(t) = t^2\mathbf{i} + 5t\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ 。试求:此矢量函数在 $0 \sim t$ 时间段的积分。

解 根据矢量函数积分公式,可得

$$\int_0^t \mathbf{A}(t) dt = \int_0^t t^2 dt \mathbf{i} + \int_0^t 5t dt \mathbf{j} + \int_0^t 3 dt \mathbf{k} = \frac{1}{3}t^3\mathbf{i} + \frac{5}{2}t^2\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$$

1.2 矢量场的通量与散度

如果在一个空间区域中,某物理系统的状态可以用一个随空间位置和时间变化的函数来描述(即每时刻区域中每个点的对应函数都有一个确定值),则在此区域中就确定了该物理系统的一种场。例如,地球表面附近重力加速度的分布就是一个重力场。场的一个重要属性是它占有一个空间,把物理状态作为空间和时间的函数来描述,而且,在此空间区域中,除了有限个点或某些表面外,该函数是处处连续的。

如果场中描述物理状态的函数与时间无关,这个场称为**静态场**。地球表面的重力场即是一个静态场;若场中描述状态的函数与时间有关,则称该场为**动态场**或**时变场**,交流电周围的磁场即是一个时变场。若描述场的物理量是个矢量,则该场称为**矢量场**,重力场、电场等都是矢量场;若描述场的物理量是个标量,则该场称为**标量场**,电位场、密度场等都是标量场。

对于描述场的物理量进行分析,并由物理量的特点分析场的性质,属于数学中“场论”的内容。场量的分析主要包括三个方面:矢量场的通量与散度、矢量场的环流与旋度、标量场的方向导数与梯度。本节介绍矢量场的通量与散度相关内容。

1.2.1 矢量场的通量

在矢量场中,各点的场量是随空间位置变化的矢量,在直角坐标系中,描述该场的函数可以表示为

$$\mathbf{A}(r) = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

为了形象描述矢量函数 $\mathbf{A}(r)$ 在场中的分布情况,我们可以在场中引入一些

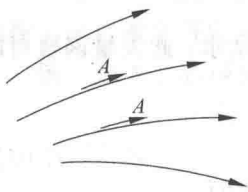


图 1-1 矢量场的场线

有向的曲线,称为**矢量线**(或**场线**)。静电场中的电场线和磁场中的磁感应线都是这类矢量线。关于矢量线,有如下两个规定:(1)在矢量线上,任一点的切线方向与该点的场矢量方向相同,如图 1-1 所示;(2)在场中,与矢量线垂直方向上单位面积内通过的矢量线的条数等于该处场矢量的大小。

在矢量场中,通过某一面积的矢量线的条数称为该面积的**通量**。根据上述矢量线规定(2)可知,在匀强场中,矢量线应处处彼此平行且间距相等,则场矢量大小为 A 的矢量场中,通过面积为 S 的平面的通量为

$$\Psi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} = AS \cos \theta$$

式中, θ 表示场矢量与平面法向间的夹角。若计算非均匀场中通过曲面的通量, 如图 1-2 所示, 可以把该面划分成无数小的面积元 ds 。由于面积元无限小, 因此可以认为面积元是一个小的平面, 而且可以认为在面积元所在处场是均匀分布的。设面积元的法向与该处场矢量方向的夹角为 θ , 则通过面元 ds 的通量为

$$d\Psi = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

通过整个曲面的通量等于通过所有面元通量之和, 即

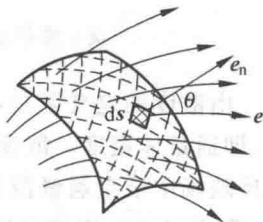


图 1-2 矢量场的通量

$$\Psi = \int_S d\Psi = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (1-10)$$

如果面是一个闭合曲面, 则通过此闭合曲面的通量可以表示为

$$\Psi = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (1-11)$$

由通量的定义不难看出: 对于闭合曲面(通常规定自内向外为面的法向), 当矢量线从曲面内向外穿出时, 面法向与场矢量方向的夹角取值范围为 $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$, 对应通量 $\Psi > 0$; 当矢量线与曲面平行时, 对应的 $\theta = 90^\circ$, 则 $\Psi = 0$; 当矢量线从曲面外向内进入时, 对应的 $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$, 则 $\Psi < 0$ 。或者反过来说, 当 $\Psi > 0$ 时, 说明穿出闭合曲面的通量多于进入的通量, 此时闭合曲面内必有发出矢量线的源, 称为**正通量源**, 静电场中的正电荷就是发出电场线的正通量源; 当 $\Psi < 0$ 时, 说明进入曲面的通量多于穿出曲面的通量, 此时闭合曲面内必有汇集矢量线的源, 称为**负通量源**, 静电场中的负电荷就是发出电场线的负通量源; 当 $\Psi = 0$ 时, 说明穿出和进入闭合曲面的通量一样多, 此时闭合曲面内正通量源与负通量源的代数和为零, 或者闭合曲面内无通量源。可见, 根据分析场矢量对应的闭合面通量值的正负, 可推断对应场域的通量源情况, 这就是前面提到的根据场矢量分析场性质的基本方法。

1.2.2 矢量场的散度

矢量场中穿过闭合曲面的通量是一个积分量, 它反映的是闭合曲面中源的总特性, 不能反映场域内每一个点的通量特性。为了反映场域内每一个点的通量特性, 我们需要把包围该点的闭合曲面向该点无限收缩, 进而, 我们引入矢量场散度的概念。

在矢量场中任一点 P 处做一个包围该点的闭合曲面 S , 当闭合曲面 S 所限

定的体积 ΔV 以任意方式无限趋近于 0 时, 比值 $\frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}}{\Delta V}$ 的极限称为矢量 \mathbf{A} 在

点 P 处的散度, 记为 $\text{div}\mathbf{A}$, 即

$$\text{div}\mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}}{\Delta V} \quad (1-12)$$

由散度的定义可知: (1) 散度是标量, 它是场矢量通过某点处单位体积的通量, 即通量体密度。散度的大小描述了场中该点的通量源的强度。(2) 散度的正负反映场中该点通量源的性质。若 $\text{div}\mathbf{A} > 0$, 则该点处有发出矢量线的正通量源; 若 $\text{div}\mathbf{A} < 0$, 则该点处有汇集矢量线的负通量源; 若 $\text{div}\mathbf{A} = 0$, 则该点处无通量源。一般的, 我们称 $\text{div}\mathbf{A} \neq 0$ 的场为发散场, $\text{div}\mathbf{A} = 0$ 的场为非发散场。

在直角坐标系中, 矢量 $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$ 的散度可以通过下式计算(推导过程省略):

$$\text{div}\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1-13)$$

式(1-13)表明, 矢量的散度是标量, 其值等于该矢量在三个坐标方向分量沿各自方向变化率之和; 式中, 符号“ ∇ ”称为哈密顿算符, 也称为矢量微分算子,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \quad (1-14)$$

式(1-14)表明, 哈密顿算符兼有矢量和微分运算双重功能, 当它作用于某矢量时, 先按矢量规则展开, 再作微分运算。下面以式(1-13)为例, 看一下哈密顿算符的使用方法

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \right) \cdot (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned}$$

例题 1-5 已知矢量 $\mathbf{A} = 3x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$ 。试求: 矢量在点 $P(1, 1, 0)$ 处的散度。

$$\text{解} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial(3x)}{\partial x} + \frac{\partial(y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(xyz)}{\partial z} = 3 + 2y + xy$$

把 P 点坐标代入上式, 可得矢量在 P 点的散度为

$$\nabla \cdot \mathbf{A}|_P = 3 + 2 \times 1 + 1 \times 1 = 6$$

散度值为正, 说明场中 P 点处有正的通量源。

例题 1-6 已知点电荷 q 在离其 r 处产生的电位移矢量为 $\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^3}\mathbf{r}$, 式中 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ 。试求: (1) 场中任意点处电位移矢量的散度 $\nabla \cdot \mathbf{D}$; (2) 场中穿过以 r 为半径的球面的电通量 Ψ 。

解 (1) 根据已知, 把电位移矢量写成直角坐标系中的形式为

$$\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi} \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = D_x\mathbf{i} + D_y\mathbf{j} + D_z\mathbf{k}$$

对电位移矢量三个坐标轴上的分量分别求对应方向的偏导数,为

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_x}{\partial x} &= \frac{q}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi} \left[\frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - x \cdot \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \cdot 2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi} \frac{r^3 - 3x^2 r}{r^6} \\ &= \frac{q}{4\pi} \frac{r^2 - 3x^2}{r^5} \end{aligned}$$

同理可得其他两个分量的导数分别为

$$\frac{\partial D_y}{\partial y} = \frac{q}{4\pi} \frac{r^2 - 3y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial D_z}{\partial z} = \frac{q}{4\pi} \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}$$

电位移矢量的散度为

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \frac{q}{4\pi} \frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0$$

可见,除点电荷所在源点($r=0$)外,空间各点的电位移矢量的散度为零,即场中其他位置无通量源。

(2) 根据通量的计算式,可得闭合面的通量为

$$\Psi_e = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \frac{q}{4\pi r^3} \oint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_n ds = \frac{q}{4\pi r^2} \oint_S ds = q$$

此结果表明,在此球面上所穿过的电通量 Ψ_e 的源正是点电荷 q 。

1.2.3 散度定理

由前面的分析可知,矢量场在某点的散度表示的是该处单位体积的通量,因此,矢量场散度的体积分应等于该矢量场通过包围该体积的封闭面的总通量(具体推导过程从略),即

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dv = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (1-15)$$

式(1-15)表达的内容称为散度定理(也称为高斯定理): 矢量场中某矢量的散度在体积 V 上的体积分等于该矢量在包围该体积的闭合面 S 上的面积分。散度定理给出了矢量的散度的体积分与该矢量的闭合曲面面积分之间的一个变换关系,是矢量分析中的一个重要的恒等式,在电磁场理论中会经常用到。

例题 1-7 已知球面 S 上任意点的位置矢量为 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = r\mathbf{e}_r$ (\mathbf{e}_r 为球面上沿径向的单位矢量)。试求: $\oint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{s}$ 。

解 根据已知,先求解矢量的散度为

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial r_x}{\partial x} + \frac{\partial r_y}{\partial y} + \frac{\partial r_z}{\partial z} = 3$$

根据散度定理,矢量在闭合面上的面积分等于矢量散度在闭合面包围体积上的体积分,即

$$\oint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{r} dv = 3 \int_V dv = 3 \times \frac{4}{3} \pi r^3 = 4\pi r^3$$

1.3 矢量场的环流与旋度

矢量场的环流与旋度也是描述矢量场性质的重要物理量,通过这两个场量的分析可以得到场域的旋涡性及场中某点的旋涡源的性质。

1.3.1 矢量场的环流

矢量 \mathbf{A} 沿场中某一闭合路径的线积分,称为矢量 \mathbf{A} 沿该路径的环流,记为

$$\Gamma = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-16)$$

式中, $d\mathbf{l}$ 为闭合路径上线元矢量,其大小为 dl ,方向为该处路径的切线方向(指向路径的绕行正方向一侧),如图 1-3 所示;一般将闭合路径的绕行正方向规定为:当沿着闭合路径的绕行正方向前进时闭合路径所包围的面积在其左侧,而路径包围面积的法向规定为与路径绕行方向成右手螺旋关系。

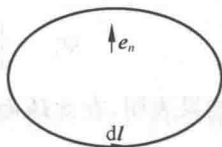


图 1-3 路径正方向

矢量场的场矢量沿闭合路径的环流与矢量穿过闭合曲面的通量一样,都是描述矢量场性质的重要的量。例

如,普通物理电磁学中研究的静电场中电场强度的环流为零,即 $\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$,为什么呢?环流为零反映了场怎样的性质呢?静电场场强沿闭合路径的线积分之所以为零,是因为静电场中场强线是有头有尾、不闭合的线,场矢量沿闭合路径进行线积分时,会出现正负量相互抵消的情况,进而使得闭合路径的总积分为零。反过来,如果一个矢量场中,场矢量沿闭合路径线积分为零,我们可以推断此场中的场线是有头有尾的线,而不是闭合的场线,即这样的场中没有产生闭合场线的源。再如,恒定磁场的安培环路定理表明:磁场强度 \mathbf{H} 沿闭合路径的环

流等于闭合路径内包围的电流的代数和,即 $\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$,这又如何分析,又反映了场怎样的性质呢?与前面类似,可分析如下:恒定磁场中磁场强度沿闭合路径的线积分之所以不为零,是因为恒定磁场中场线是无头无尾的闭合线,场矢量沿闭合路径进行线积分时,不会出现正负量相互抵消的情况。反过来,如果一个矢量场中,场矢量沿闭合路径的线积分不为零,我们则可以推断这个场中的场线是无头无尾的闭合线,这样的场中有产生闭合场线的源,我们称为旋涡源。恒定磁场中的旋涡源即是闭合回路包围的电流。综合以上可知:矢量场中场矢量的环流是否为零反映了场中该区域是否有旋涡源,场是否具备旋涡性。

1.3.2 矢量场的旋度

与矢量通过闭合面的通量一样,矢量沿闭合路径的环流也是场中一个区域的积分量,反映的是场中一个宏观大区域的性质。为反映场中给定点 P 附近的环流状态,我们需要把闭合曲线向 P 点无限缩小,使它包围的面积 Δs 趋近于

零,极限 $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta s}$ 称为矢量 \mathbf{A} 在 P 点处的环流面密度,或称环流强度。

对于一个确定的回路,回路包围的面积可以多种选择,所取面元 Δs 的方向也不尽相同,对应于一个闭合回路的环流面密度会有多个结果。为方便不同的场之间的比较,我们用场中某点矢量环流面密度的最大值作为衡量标准,并定义其为矢量的旋度:矢量的旋度大小等于该处环流面密度的最大值,方向沿着使环流面密度取得最大值的面元的法线方向。矢量的旋度记为 $\text{rot}\mathbf{A}$ (或 $\text{curl}\mathbf{A}$),即

$$\text{rot}\mathbf{A} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left[\frac{\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta s} \right]_{\max} \mathbf{e}_n \quad (1-17)$$

矢量的旋度反映的是场中某点处的旋涡源的强度。对于场中某点,当 $\text{rot}\mathbf{A} = \mathbf{0}$ 时,表明该处无旋涡源。若场中某区域处处 $\text{rot}\mathbf{A} = \mathbf{0}$,则称该区域为无旋场或保守场;当 $\text{rot}\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$,表明该处有旋涡源。

直角坐标系中,矢量函数 $\mathbf{A}(t) = A_x(t)\mathbf{i} + A_y(t)\mathbf{j} + A_z(t)\mathbf{k}$ 的旋度可以通过下式计算(推导过程省略)

$$\text{rot}\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \times [A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}] \quad (1-18)$$

此式也可用行列式计算为

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (1-19)$$

例题 1-8 已知描述场的矢量函数为 $\mathbf{A} = (x+y)^2 \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + xz \mathbf{k}$ 。试求：场中点 $P(1,2,1)$ 处矢量的旋度。

解 由旋度的计算公式, 可得

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x+y)^2 & yz & xz \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial(xz)}{\partial y} \mathbf{i} + \frac{\partial(x+y)^2}{\partial z} \mathbf{j} + \frac{\partial(yz)}{\partial x} \mathbf{k} - \left[\frac{\partial(x+y)^2}{\partial y} \mathbf{k} + \frac{\partial(yz)}{\partial z} \mathbf{i} + \frac{\partial(xz)}{\partial x} \mathbf{j} \right] \\ &= -y \mathbf{i} - z \mathbf{j} - 2(x+y) \mathbf{k} \end{aligned}$$

代入 P 点坐标值, 可得矢量在 P 点的旋度为

$$\nabla \times \mathbf{A}|_P = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 6\mathbf{k}$$

1.3.3 斯托克斯定理

由前面的分析可知, 矢量场在某点的旋度是环流的面密度, 表示的是场中该处单位面积的环流, 因此, 矢量场旋度的面积分应等于该矢量沿包围面积的闭合环路的总环流(具体推导过程从略), 即

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-20)$$

式(1-20)表达的内容称为斯托克斯定理: 矢量场中某矢量的旋度在面积 S 上的面积分等于该矢量沿包围该面积的闭合回路 L 上的线积分。斯托克斯定理给出了矢量的旋度的面积分与该矢量沿闭合回路线积分之间的变换关系, 是矢量分析中的另外一个重要的恒等式, 在以后学习的电磁场理论中也会经常用到。

例题 1-9 已知描述矢量场的函数为

$$\mathbf{A} = (2x-y)\mathbf{i} - (yz^2)\mathbf{j} - (y^2z)\mathbf{k}$$

试求: (1) 矢量沿闭合回路 $x^2 + y^2 = a^2 (z=0)$ 的环流; (2) 矢量的旋度表达式; (3) 对于此闭合回路验证斯托克斯定理。

解 (1) 由于闭合回路在 xOy 平面上, 线元可表示为 $d\mathbf{l} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$, 如图 1-4 所示。根据环流公式, 有

$$\begin{aligned}\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \oint_L \mathbf{A} \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) \\ &= \oint_L [(2x - y)\mathbf{i} - (yz^2)\mathbf{j} - (y^2z)\mathbf{k}] \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j})\end{aligned}$$

根据已知, 上式中 $z=0$, 则有

$$\begin{aligned}\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \oint_L (2x - y)\mathbf{i} \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) \\ &= \oint_L (2x - y)dx\end{aligned}$$

此式中有两个积分变量, 为统一变量, 设线元对应半径与 Ox 轴正向夹角为 φ , 则线元所在处坐标可分别表示为

$$x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi$$

代入上式, 则有

$$\begin{aligned}\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \int_0^{2\pi} (2a\cos\varphi - a\sin\varphi)(-a\sin\varphi)d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} [-a^2\sin(2\varphi) + a^2\sin^2\varphi]d\varphi \\ &= \pi a^2\end{aligned}$$

(2) 根据旋度公式, 利用行列式计算可得

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x - y & -yz^2 & -y^2z \end{vmatrix} \\ &= (-2yz + 2yz)\mathbf{i} + (0 - 0)\mathbf{j} + (0 + 1)\mathbf{k} \\ &= \mathbf{k}\end{aligned}$$

(3) 闭合回路包围面积的法向为 z 轴正向, 对于闭合回路包围的面积计算矢量旋度的面积分, 可得

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} d\mathbf{s} = \int_S d\mathbf{s} = \pi a^2$$

比较此结果与(1)问结果, 可知

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

斯托克斯定理得证。

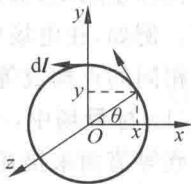


图 1-4 例题 1-9 用图