高等院校数学教材同步辅导及考研用书

高等数学

高教版（第七版）同济大学数学系编

习题精解及考研辅导

周华任 等 编

- 知识结构分析
- 典型方法归纳
- 各种题型集成
- 课后习题精解
- 考研真题精选
- 打磨能力训练
- 成就考试考研

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

高等院校数学教材同步辅导及考研用书

高等数学习题精解及考研辅导

高教版《高等数学》(第七版)(同济大学数学系编)

周华任　等编

东南大学出版社

·南京·

内容简介

本书是根据高等教育出版社的《高等数学》(第七版)(同济大学数学系编)编写的辅导及考研教材，包括了知识逻辑结构图，基础知识及考研考试内容，学习目的及考研考试要求，课后习题精解，考研真题精选五大部分，在详细给出书中习题解答过程的基础上，分析了考试的热点及出题的角度以及重点考查的知识点，具有很强的针对性和应用性。本书题目丰富，难度由浅入深，以研究生入学考试的题目难度为标准，循序渐进，在笔者的课程教学和考研辅导中取得了很好的效果。

本书适合于大学工科、经济学、管理学等专业的学生作为学习参考用书，也可供硕士研究生入学考试学习使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题精解及考研辅导/周华任等编. —南京：东南大学出版社，2015.12

高等院校数学教材同步辅导及考研用书

ISBN 978-7-5641-6113-2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①周… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 263061 号

高等数学习题精解及考研辅导

编　　者　周华任等
责任编辑　宋华莉
编辑邮箱　52145104@qq.com

出版发行　东南大学出版社
出 版 人　江建中
社　　址　南京市四牌楼 2 号(邮编:210096)
网　　址　http://www.seupress.com
电子邮箱　press@seupress.com
印　　刷　南京京新印刷厂
开　　本　700 mm×1 000 mm　1/16
印　　张　30
字　　数　798 千
版　　次　2015 年 12 月第 1 版　2015 年 12 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5641-6113-2
定　　价　56.00 元

经　　销　全国各地新华书店
发行热线　025-83790519　83791830

前　　言

高等数学是高等学校理工科各专业的一门重要基础课程，是学习后续课程及进行科学理论研究与实践的数学基础，也是研究生入学考试的必考科目之一。为此，我们精心组织策划了这本复习辅导用书。

本书是与《高等数学》(同济七版)同步配套的复习辅导用书，编写本书的目的有两个：一是帮助读者熟练掌握各种题型的解题思路、方法和技巧；二是通过精心选取的部分考研真题，帮助读者掌握考题的特点、重点和热点，做到知识的系统把握和灵活运用，为研究生入学考试做好准备。

本书由以下几个部分组成：

1. 知识逻辑结构图：将每章知识点列式图表，以便学习掌握。

2. 基础知识及考研考试内容：列出了各章的主要内容，突出必须掌握或考试中出现频率较高的核心内容。

3. 学习目的及考研考试要求：列出相应各章的考点内容，给出了相应的考研考试要求说明，以帮助广大同学对相应内容重点把握。

4. 课后习题精解：教材中课后习题丰富、层次多，对课后习题给出了详细的解答。为了突出重点，我们把选学内容和考研考试不做要求的题目进行了删除，这样便于突出重点。

5. 考研真题精选：精选历年全国研究生入学考试试题中具有代表性的题目进行了详细的解答，这些题目涉及内容广、题型多、技巧性强，可以使广大同学举一反三，触类旁通，开拓解题思路，更好地掌握高等数学的基本内容、考试题型和解题方法。

本书由周华任、宿兴涛、王秋良、熊春晖、王知田、刘硕松、李喜波、陈玉金编写。

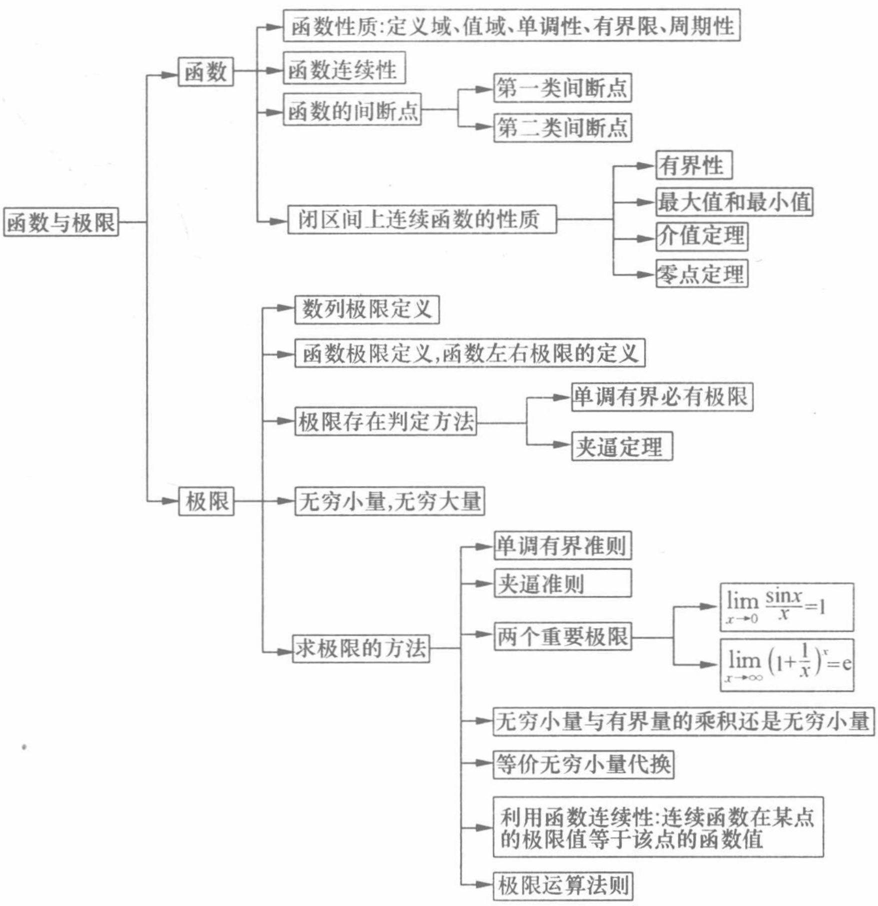
本书主要参考了高等教育出版社出版的《高等数学》(第七版上、下册)(同济大学数学系编)的部分内容，在此表示感谢。本书还参考了部分参考书及相关数学考研培训网站题库内容，在此一并表示感谢！由于参考内容作者信息及联系方式不详等原因，未能一一联系。如这些作者见到本书，请通过 zhou_huaren@163. com 方式与笔者联系商谈稿酬事宜。

本书适合于大学工科、经济学、管理学等专业的学生亦可作为硕士研究生入学考试的备考用书。由于水平所限，不妥之处在所难免，恳请读者及同行批评指正。

目　录

第一章　函数与极限

知识逻辑结构图



基础知识及考研考试内容

函数的概念及表示法,函数的有界性(有界和收敛的关系:存在正数 M,使 $f(x)<M$ 恒成立则有界,不存在 M 则无界;注意与无穷大的区别,如振荡型函数)、单调性、周期性(注意周期函数的定积分性质)和奇偶性(奇偶性的前提是定义域关于原点对称),复合函数(两个函数的定义域和值域之间的关系)、反函数(函数必须严格单调,则存在单调性相同的反函数且与其原函数关于 $y=x$ 对称)、分段函数和隐函数、基本初等函数的性质及其图形初等函数,函数关系的建立(应用题).

数列极限(转化为函数极限,单调有界,定积分,夹逼定理)与函数极限(四则变换,无穷小代换,积分中值定理,洛必达法则,泰勒公式)的定义及其性质,函数的左极限与右极限,无穷小(以零为极

限)和无穷大(大于任意正数)的概念及其关系,无穷小的性质及无穷小的比较(求导定阶),极限的四则运算(要在各自极限存在的条件下),极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则,两个重要极限:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

函数连续的概念(点极限存在且等于函数值),函数间断点的类型(第一类(有定义):可去型,跳跃型;第二类(无定义):无穷型,振荡型),初等函数的连续性,闭区间上连续函数的性质(零点定理、介值定理).

学习目的及考研考试要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,并会建立简单应用问题中的函数关系式.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.

5. 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念,以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.

6. 掌握极限的性质及四则运算法则.

7. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.

8. 理解无穷小、无穷大的概念,掌握无穷小的比较方法,会用等价无穷小求极限.

9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

课后习题精解

习题 1-1

1. 求下列函数的自然定义域:

(1) $y=\sqrt{3x+2}$;　(2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$;　(3) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$;

(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;　(5) $y=\sin\sqrt{x}$;　(6) $y=\tan(x+1)$;

(7) $y=\arcsin(x-3)$;　(8) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$;　(9) $y=\ln(x+1)$;

(10) $y=e^{\frac{1}{x}}$.

【解】 (1) $3x+2\geqslant0,x\geqslant-\dfrac{2}{3}$,定义域为$\left[-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$.

(2) $1-x^2\neq0,x\neq\pm1$,定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(3) $x\neq0$ 且 $1-x^2\geqslant0$,即 $x\neq0$ 且 $|x|\leqslant1$,定义域为$[-1,0)\cup(0,1]$.

(4) $4-x^2>0,|x|<2$,定义域为$(-2,2)$.

(5) 定义域为$[0,+\infty)$.

(6) $x+1\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,

定义域为$\left(k\pi+\dfrac{\pi}{2}-1,k\pi+\dfrac{3\pi}{2}-1\right)(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

(7) $-1\leqslant x-3\leqslant1,2\leqslant x\leqslant4$,定义域为$[2,4]$.

(8) $3-x\geqslant 0$ 且 $x\neq 0$，即 $x\leqslant 3$ 且 $x\neq 0$，定义域为$(-\infty,0)\cup(0,3]$.

(9) $x+1>0$，即 $x>-1$，定义域为$(-1,+\infty)$.

(10) $x\neq 0$，定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

2. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$；

(2) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$；

(4) $f(x)=1, g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

【解】 (1) 不相同. 因为 $\lg x^2$ 的定义域是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $2\lg x$ 的定义域是$(0,+\infty)$.

(2) 不相同. 因为两者对应法则不同，当 $x<0$ 时，$g(x)=-x$.

(3) 相同. 因为两者定义域、对应法则均相同.

(4) 不相同. 因为两者定义域不同.

3. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$

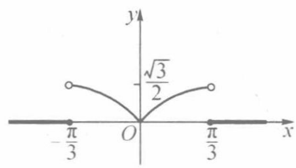
求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi(-2)$，并作出 $y=f(x)$ 的图形.

【解】 因为 $|x|=\left|\dfrac{\pi}{6}\right|<\dfrac{\pi}{3}$，所以

$$\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|=\frac{1}{2}.$$

同理可得 $$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}, \varphi(-2)=0$$



$y=\varphi(x)$ 的图形见右图.

4. 试证下列函数在指定区间内的单调性：

(1) $y=\dfrac{x}{1-x}$，$(-\infty,1)$；

(2) $y=x+\ln x$，$(0,+\infty)$.

【证】 (1) $\forall x_1,x_2\in(-\infty,1)$，且 $x_1<x_2$，由

$$\frac{x_2}{1-x_2}-\frac{x_1}{1-x_1}=\frac{x_2(1-x_1)-x_1(1-x_2)}{(1-x_1)(1-x_2)}=\frac{x_2-x_1}{(1-x_1)(1-x_2)}>0,$$

从而 $y(x_2)>y(x_1)$，所以$\dfrac{x}{1-x}$ 在$(-\infty,1)$ 内单调递增.

(2) $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，由 $y_2-y_1=(x_2+\ln x_2)-(x_1+\ln x_1)=x_2-x_1+\ln\dfrac{x_2}{x_1}$，因为 $x_2>x_1>0$，所以 $x_2-x_1>0$，且$\dfrac{x_2}{x_1}>1$，$\ln\dfrac{x_2}{x_1}>0$，从而 $y_2>y_1$，所以 $x+\ln x$ 在$(0,+\infty)$ 内单调递增.

5. 设 $f(x)$ 为定义在$(-l,l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在$(0,l)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在$(-l,0)$ 内也单调增加.

【证】 $\forall x_1,x_2\in(-l,0)$，且 $x_1<x_2$，则 $-x_1,-x_2\in(0,l)$，且 $-x_2<-x_1$.

由于 $f(x)$ 是$(-l,l)$ 内的奇函数，且在$(0,l)$ 内单调增加，所以

$$f(-x_2)-f(-x_1)=-f(x_2)+f(x_1)<0,$$

从而 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

6. 设下面所考虑的函数都是定义在区间 $(-l,l)$ 上的，证明：

(1) 两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数.

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

【证】 设 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 为奇函数，而 $g_1(x)$，$g_2(x)$ 为偶函数.

(1) $g_1(-x)+g_2(-x)=g_1(x)+g_2(x)$，所以两个偶函数的和仍为偶函数.

$f_1(-x)+f_2(-x)=-[f_1(x)+f_2(x)]$，所以两个奇函数的和仍为奇函数.

(2) $g_1(-x)\cdot g_2(-x)=g_1(x)\cdot g_2(x)$，所以两个偶函数的乘积是偶函数. 而

$$f_1(-x)\cdot f_2(-x)=-f_1(x)\cdot[-f_2(x)]=f_1(x)\cdot f_2(x),$$

所以两个奇函数的乘积是偶函数. 又

$$g_1(-x)\cdot f_1(-x)=g_1(x)\cdot[-f_1(x)]=-g_1(x)\cdot f_1(x),$$

所以偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

7. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非偶函数又非奇函数？

(1) $y=x^2(1-x^2)$；　(2) $y=3x^2-x^3$；　(3) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；

(4) $y=x(x-1)(x+1)$；　(5) $y=\sin x-\cos x+1$；　(6) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$.

【解】 (1) $f(-x)=(-x)^2[1-(-x)^2]=x^2(1-x^2)=f(x)$，

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(2) $f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3\neq -f(x)$，且 $f(-x)\neq f(x)$，

所以 $f(x)$ 既非偶函数又非奇函数.

(3) $f(-x)=\dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$，

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(4) $f(-x)=(-x)[(-x)-1][(-x)+1]=-x(x-1)(x+1)=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 为奇函数.

(5) $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1$，

$f(-x)\neq -f(x)$ 且 $f(-x)\neq f(x)$，

所以 $f(x)$ 既非偶函数又非奇函数.

(6) $f(-x)=\dfrac{a^{(-x)}+a^{-(-x)}}{2}=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}=f(x)$，

所以 $f(x)$ 为偶函数.

8. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期.

(1) $y=\cos(x-2)$；　(2) $y=\cos 4x$；　(3) $y=1+\sin\pi x$；

(4) $y=x\cos x$；　(5) $y=\sin^2 x$.

【解】 (1) $y=\cos(x-2)$ 是周期函数，周期 $l=2\pi$.

(2) $y=\cos 4x$ 是周期函数，周期 $l=\dfrac{\pi}{2}$.

(3) $y=1+\sin\pi x$ 是周期函数，周期 $l=2$.

(4) $y=x\cos x$ 不是周期函数.

(5) $y=\sin^2 x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x$ 是周期函数，周期 $l=\pi$.

9. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$；　(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；

(3) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$；　(4) $y=2\sin 3x\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$；

(5) $y=1+\ln(x+2)$；　(6) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

【解】 (1) 由 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 则 $x=y^3-1$，则反函数为 $y=x^3-1$.

(2) 由 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 则 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$，则反函数为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

(3) 由 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 则 $x=\dfrac{-dy+b}{cy-a}$，则反函数为 $y=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$.

(4) 由 $y=2\sin 3x\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$ 则 $x=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{y}{2}$，则反函数 $y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$.

(5) 由 $y=1+\ln(x+2)$ 则 $x=e^{y-1}-2$，则反函数 $y=e^{x-1}-2$.

(6) 由 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 则 $2^x=2^x\cdot y+y$，即 $2^x(1-y)=y$，$2^x=\dfrac{y}{1-y}$，$x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$，

则反函数 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$.

10. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，试证：函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

【证】 充分性：设 $M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2$，则 $\forall x\in X$，取 $M=\max\{|M_1|,|M_2|\}$，则 $|f(x)|\leqslant M$，从而 $f(x)$ 在 X 上有界.

必要性：设 $f(x)$ 有界，即 $\forall x\in X$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$，故知 $f(x)$ 既有下界 $M_1=-M$，又有上界 $M_2=M$，得证.

11. 在下列各题中，求由所给函数构成的复合函数，并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值：

(1) $y=u^2,u=\sin x,x_1=\dfrac{\pi}{6},x_2=\dfrac{\pi}{3}$；

(2) $y=\sin u,u=2x,x_1=\dfrac{\pi}{8},x_2=\dfrac{\pi}{4}$；

(3) $y=\sqrt{u},u=1+x^2,x_1=1,x_2=2$；

(4) $y=e^u,u=x^2,x_1=0,x_2=1$；

(5) $y=u^2,u=e^x,x_1=1,x_2=-1$.

【解】 (1) $y=\sin^2 x,y_1=\dfrac{1}{4},y_2=\dfrac{3}{4}$；

(2) $y=\sin 2x,y_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2},y_2=1$；

(3) $y=\sqrt{1+x^2},y_1=\sqrt{2},y_2=\sqrt{5}$；

(4) $y=e^{x^2},y_1=1,y_2=e$；

(5) $y=e^{2x},y_1=e^2,y_2=e^{-2}$.

12. 设 $f(x)$ 的定义域 $D=[0,1]$，求下列各函数的定义域：

(1) $f(x^2)$；　(2) $f(\sin x)$；　(3) $f(x+a)\ (a>0)$；　(4) $f(x+a)+f(x-a)\ (a>0)$.

【解】 (1) $x^2\in[0,1]$，即 $x\in[-1,1]$，故定义域为 $[-1,1]$.

(2) $\sin x\in[0,1]$，即 $x\in[2k\pi,2k\pi+\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$，故定义域为 $[2k\pi,2k\pi+\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$.

(3) $x+a\in[0,1]$,即 $x\in[-a,1-a]$,故定义域为$[-a,1-a]$.

(4) 由$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\0\leqslant x-a\leqslant 1,\end{cases}$得$\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\a\leqslant x\leqslant 1+a.\end{cases}$

所以 ① 当 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时,有 $a\leqslant x\leqslant 1-a$,即定义域为$[a,1-a]$;

② 当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时,定义域为空集.

13. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\0, & |x|=1,\\-1, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=e^x$,求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$,并作出这两个函数的图形.

【解】 将 $g(x)=e^x$ 代替 x 代入 $f(x)$ 中,得

$$f[g(x)]=f(e^x)=\begin{cases}1, & |e^x|<1,\\0, & |e^x|=1,\\-1, & |e^x|>1.\end{cases}$$

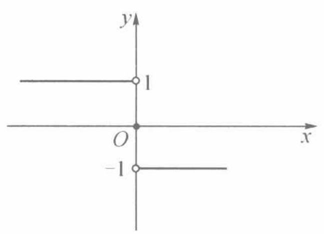
即 $$f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<0,\\0, & x=0,\\-1, & x>0.\end{cases}$$

函数 $f[g(x)]$ 的图形如下图(a) 所示.

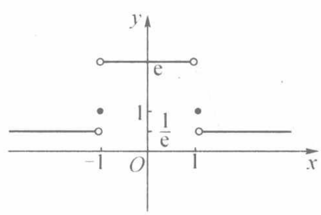
将 $f(x)$ 代替 x 代入 $g(x)$ 中,得

$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e^1=e & |x|<1,\\e^0=1, & |x|=1,\\e^{-1}=\dfrac{1}{e}, & |x|>1.\end{cases}$$

函数 $g[f(x)]$ 的图形如下图(b) 所示.

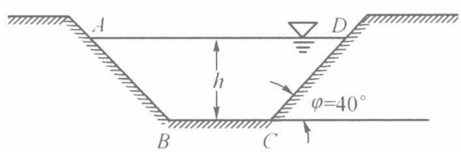


(a)



(b)

14. 已知水渠的横断面为等腰梯形,斜角 $\varphi=40°$(如图所示).当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时,求四周 $L(L=AB+BC+CD)$ 与水深 h 之间的函数关系式,并指明其定义域.



【解】 由图可知 $h=AB\sin\varphi=DC\sin\varphi$,故

$$AB=DC=\frac{h}{\sin 40°},$$

又从梯形的面积公式 $S_0=\dfrac{1}{2}h(BC+AD)$,得

$$\frac{1}{2}h(BC+(BC+2h\cot 40°)]=S_0,$$

从而 $BC = \dfrac{S_0}{h} - h\cot 40^\circ$，

所以 $L = AB + BC + CD = \dfrac{2h}{\sin 40^\circ} + \dfrac{S_0}{h} - h\cot 40^\circ$，

即　$L = \dfrac{S_0}{h} + \dfrac{2-\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}h$.

自变量 h 的取值范围由不等式组

$$\begin{cases} h > 0, \\ \dfrac{S_0}{h} - h\cot 40^\circ > 0 \end{cases}$$

确定，故定义域为 $0 < h < \sqrt{S_0 \tan 40^\circ}$.

15. 设 xOy 平面上有正方形 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ 及直线 $l: x + y = t(t \geqslant 0)$. 若 $S(t)$ 表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分的面积，试求 $S(t)$ 与 t 之间的函数关系.

【解】　当 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 时，$S(t) = \dfrac{1}{2}t^2$；

当 $1 < t \leqslant 2$ 时，$S(t) = 1 - \dfrac{1}{2}(2-t)^2 = -\dfrac{1}{2}t^2 + 2t - 1$；

当 $t > 2$ 时，$S(t) = 1$.

$$\text{故}\quad S(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}t^2, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ -\dfrac{1}{2}t^2 + 2t - 1, & 1 < t \leqslant 2, \\ 1, & t > 2. \end{cases}$$

16. 求联系华氏温度（用 F 表示）和摄氏温度（用 C 表示）的转换公式，并求

(1) 90℉ 的等价摄氏温度和 -5 ℃ 的等价华氏温度；

(2) 是否存在一个温度值，使华氏温度计和摄氏温度计的读数是一样的？如果存在，那么该温度值是多少？

【解】　由物理学的知识知道，华氏温度和摄氏温度之间的关系是一个线性函数，于是，可设

$$F = kC + l,$$

其中 k, l 为常数，且 32℉ 相当于 0 ℃，212℉ 相当于 100 ℃，即 $32 = l, 212 = 100k + l$. 由此解得 $l = 32, k = 1.8$，故华氏温度与摄氏温度的转换公式为 $F = 1.8C + 32$.

(1) 当 $F = 90$ 时，则 $90 = 1.8C + 32$，解得 $C = 32.2$；

当 $C = -5$ 时，则 $F = 1.8 \times (-5) + 32 = 23$.

(2) 设 $F = C = t$，即 $t = 1.8t + 32$，

由此解得 $t = -40$，即华氏温度 -40 ℉ 时，摄氏温度也是 -40 ℃.

17. 已知 Rt$\triangle ABC$ 中，直角边 AC、BC 的长度分别为 20、15，动点 P 从 C 出发，沿三角形边界按 $C \to B \to A$ 方向移动；动点 Q 从 C 出发，沿三角形边界按 $C \to A \to B$ 方向移动，移动到两动点相遇时为止，且点 Q 移动的速度是点 P 移动的速度的 2 倍. 设动点 P 移动的距离为 x，$\triangle CPQ$ 的面积为 y，试求 y 与 x 之间的函数关系.

【解】　因为 $AC = 20, BC = 15$，所以，$AB = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$.

由 $20 < 2 \cdot 15 < 20 + 25$ 可知，点 P、Q 在斜边 AB 上相遇.

令 $x + 2x = 15 + 20 + 25$，得 $x = 20$. 即当 $x = 20$ 时，点 P、Q 相遇.

因此，所求函数的定义域为(0,20).

(1) 当 $0 < x < 10$ 时，点 P 在 CB 上，点 Q 在 CA 上(图 1).

由 $|CP| = x$，$|CQ| = 2x$，得

$$y = x^2.$$

(2) 当 $10 \leqslant x \leqslant 15$ 时，点 P 在 CB 上，点 Q 在 AB 上(图 2).

$$|CP| = x,\ |AQ| = 2x - 20.$$

设点 Q 到 BC 的距离为 h，则

$$\frac{h}{20} = \frac{|BQ|}{25} = \frac{45 - 2x}{25},$$

得 $h = \dfrac{4}{5}(45 - 2x)$. 故

$$y = \frac{1}{2}xh = \frac{2}{5}x(45 - 2x) = -\frac{4}{5}x^2 + 18x.$$

(3) 当 $15 < x < 20$ 时，点 P、Q 都在 AB 上(图 3).

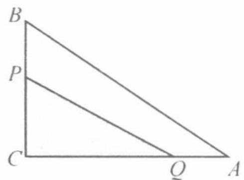


图 1

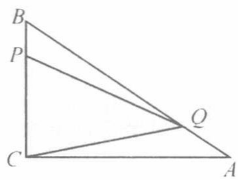


图 2

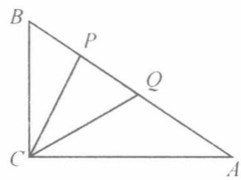


图 3

$$|BP| = x - 15,\ |AQ| = 2x - 20,\ |PQ| = 60 - 3x.$$

设点 C 到 AB 的距离为 h'，则

$$h' = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12,$$

得 $\quad y = \dfrac{1}{2}|PQ| \cdot h' = -18x + 360.$

综上可知

$$y = \begin{cases} x^2, & 0 < x < 10, \\ -\dfrac{4}{5}x^2 + 18x, & 10 \leqslant x \leqslant 15, \\ -18x + 360, & 15 < x < 20. \end{cases}$$

18. 利用以下联合国统计办公室提供的世界人口数据以及指数模型来推测 2010 年的世界人口.

年　份	人口数(百万)	当年人口数与上一年人口数的比值
1986	4 936	
1987	5 023	1.017 6
1988	5 111	1.017 5
1989	5 201	1.017 6
1990	5 329	1.024 6
1991	5 422	1.017 5

【解】 观察表的第 3 列，可以猜想 1986 年后的每一年，人口数约是上一年 1.018 倍，于是，1986 年后的第 n 年，世界人口数将是(单位：百万)

$$P(n) = 4\,936 \times 1.018^n,$$

而 2010 年相应于 $t = 24$，则

$$P(24) = 4\,936 \times 1.018^{24} \approx 7\,573.9\text{(百万)}$$

故 2010 年世界人口数估计为 7 573.9 百万.

习题 1－2

1. 下列各题中,哪些数列收敛,哪些数列发散?对收敛数列,通过观察$\{x_n\}$的变化趋势,写出它们的极限:

(1) $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$;　(2) $\left\{(-1)^n\dfrac{1}{n}\right\}$;　(3) $\left\{2+\dfrac{1}{n^2}\right\}$;

(4) $\left\{\dfrac{n-1}{n+1}\right\}$;　(5) $\{n(-1)^n\}$;　(6) $\left\{\dfrac{2^n-1}{3^n}\right\}$;

(7) $\left\{n-\dfrac{1}{n}\right\}$;　(8) $\left\{[(-1)^n+1]\dfrac{n+1}{n}\right\}$.

答　(5)(7)(8) 发散,(1)(2)(3)(4)(6) 收敛,极限为:(1) 0;(2) 0;(3) 2;(4) 1;(6) 0.

2. (1) 数列的有界性是数列收敛的什么条件?

(2) 无界数列是否一定发散?

(3) 有界数列是否一定收敛?

【解】 (1) 必要条件.

(2) 一定发散.

(3) 未必一定收敛,如数列$\{(-1)^n\}$有界,但它是发散的.

3. 下列关于数列$\{x_n\}$的极限是 a 的定义,哪些是对的,哪些是错的?如果是对的,试说明理由;如果是错的,试给出一个反例.

(1) 对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,不等式 $x_n-a<\varepsilon$ 成立;

(2) 对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,有无穷多项 x_n,使不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立;

(3) 对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,不等式 $|x_n-a|<c\varepsilon$ 成立,其中 c 为某个正常数;

(4) 对于任意给定的 $m\in\mathbf{N}_+$,存在 $N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,不等式 $|x_n-a|<\dfrac{1}{m}$ 成立.

【解】 (1) 错误. 如对数列$\left\{(-1)^n+\dfrac{1}{n}\right\}$,$a=1$. 对任给的 $\varepsilon>0$(设 $\varepsilon<1$),存在 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,当 $n>N$ 时,$(-1)^n+\dfrac{1}{n}-1\leqslant\dfrac{1}{n}<\varepsilon$,但$\left\{(-1)^n+\dfrac{1}{n}\right\}$的极限不存在.

(2) 错误. 如对数列

$$x_n=\begin{cases}n, & n=2k-1,\\ 1-\dfrac{1}{n}, & n=2k,\end{cases}\quad k\in\mathbf{N}_+,\quad a=1.$$

对任给的 $\varepsilon>0$(设 $\varepsilon<1$),存在 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,当 $n>N$ 且 n 为偶数时,$|x_n-a|=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ 成立,但$\{x_n\}$的极限不存在.

(3) 正确. 对任给的 $\varepsilon>0$,取$\dfrac{\varepsilon}{c}>0$,按假设,存在 $N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,不等式 $|x_n-a|<c\cdot\dfrac{\varepsilon}{c}=\varepsilon$ 成立.

(4) 正确. 对任给的 $\varepsilon>0$,取 $m\in\mathbf{N}_+$,使$\dfrac{1}{m}<\varepsilon$. 按假设,存在 $N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,不等式 $|x_n-a|<\dfrac{1}{m}<\varepsilon$ 成立.

4. 设数列$\{x_n\}$的一般项$x_n=\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}$,问$\lim\limits_{x\to\infty}x_n=$?求出$N$,使当$n>N$时,$x_n$与其极限之差的绝对值小于正数$\varepsilon$,当$\varepsilon=0.001$时,求出数$N$.

【解】 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=0$.

$|x_n-0|=\left|\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\right|=\frac{1}{n}\left|\cos\frac{n\pi}{2}\right|\leqslant\frac{1}{n}$,于是$\forall\varepsilon>0$,要使$|x_n-0|<\varepsilon$,只要$\frac{1}{n}<\varepsilon$,即$n>\frac{1}{\varepsilon}$,取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$即可.

当$\varepsilon=0.001$时,$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]=1\,000$,即若取$\varepsilon=0.001$,只要$n>1\,000$,就有$|x_n-0|<0.001$.

5. 根据数列根限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}=1$.

【证】 (1) $\forall\varepsilon>0$,欲使$\left|\frac{1}{n^2}-0\right|=\frac{1}{n^2}<\varepsilon$,只需$n^2>\frac{1}{\varepsilon}$,即$n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.于是$\forall\varepsilon>0$,取$N=\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$,只要$n>N$,就有$\left|\frac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$.

(2) $\forall\varepsilon>0$,由

$$\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{6n+2-6n-3}{2(2n+1)}\right|=\left|\frac{-1}{2(2n+1)}\right|$$
$$=\frac{1}{2(2n+1)}<\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

可知只要$n>\frac{1}{\varepsilon}$.取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,于是$\forall\varepsilon>0$,只要$n>N$,就有

$$\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon,所以\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}.$$

(3) $$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}\right|=\frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}$$
$$=\frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\frac{a^2}{n},$$

要使$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$,只要$\frac{a^2}{n}<\varepsilon$,即$n>\frac{a^2}{\varepsilon}$,于是$\forall\varepsilon>0$,取$N=\left[\frac{a^2}{\varepsilon}\right]$,只要$n>N$,就有$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

(4) $$|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}-1|=\left|1-\frac{1}{10^n}-1\right|=\frac{1}{10^n}<\frac{1}{n},$$

要使$|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}-1|<\varepsilon$,只要$\frac{1}{n}<\varepsilon$,即$n>\frac{1}{\varepsilon}$,于是$\forall\varepsilon>0$,取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,当$n>N$时,就有$|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}-1|<\varepsilon$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}=1$.

6. 若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$.并举例说明:如果数列$\{|x_n|\}$有极限,但数列$\{x_n\}$未必有极限.

【证】 因为$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$,所以$\forall\varepsilon>0$,$\exists N$,当$n>N$时,总有$|u_n-a|<\varepsilon$,

故　$||u_n|-|a||\leqslant|u_n-a|<\varepsilon$.

于是 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$, 当 $n>N$ 时，亦总有

$$||u_n|-|a||<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$.

反例：取 $x_n=(-1)^n$，显然 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

7. 设数列 $\{x_n\}$ 有界，又 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

【证】　因数列 $\{x_n\}$ 有界，故 $\exists M>0$，对一切 n 均有 $|x_n|\leqslant M$.

$\forall\varepsilon>0$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，所以 $\exists N$，当 $n>N$ 时，总有 $|y_n-0|=|y_n|<\dfrac{\varepsilon}{M}$，

从而 $|x_ny_n-0|=|x_n|\cdot|y_n|<M\cdot\dfrac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$.

故　$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

8. 对于数列 $\{x_n\}$，若 $x_{2k-1}\to a(k\to\infty)$，$x_{2k}\to a(k\to\infty)$，证明：$x_n\to a(n\to\infty)$.

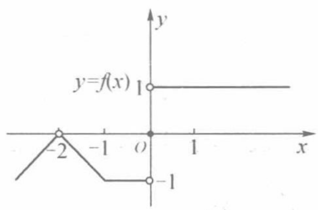
【证】　$\forall\varepsilon>0$，因为 $x_{2k-1}\to a(k\to\infty)$，所以 $\exists k_1>0$，当 $2k-1>2k_1-1$ 时，有 $|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$；又因为 $x_{2k}\to a(k\to\infty)$，所以 $\exists k_2>0$，当 $2k>2k_2$ 时，有 $|x_{2k}-a|<\varepsilon$.

现取 $N=\max(2k_1-1,2k_2)$，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

习题 1－3

1. 对右图所示的函数 $f(x)$，求下列极限，如极限不存在，说明理由.



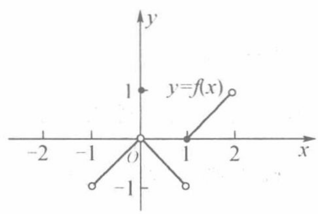
(1) $\lim\limits_{x\to-2}f(x)$；　(2) $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$；　(3) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

【解】　(1) $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=0$；

(2) $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=-1$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在，因为 $f(0^-)=-1$, $f(0^+)=1$, $f(0^-)\neq f(0^+)$.

2. 对右图所示的函数 $f(x)$，下列陈述中哪些是对的，哪些是错的？



(1) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在；　(2) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$；　(4) $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$；

(5) $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 不存在；

(6) 对每个 $x_0\in(-1,1)$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在.

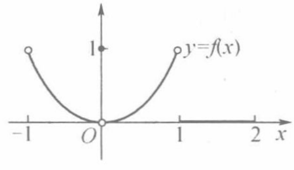
答　(1) 错；(2) 对；(3) 错. 事实上，$f(0^+)=f(0^-)=0$，因而 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$.

(注意：$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 是否存在及存在时极限值等于多少，与 $f(0)$ 是否有定义及有定义时 $f(0)$ 等于多少都没有关系.)

(4) 错；(5) 对. 事实上，$f(1^-)=-1$, $f(1^+)=0$，两者不等，因而 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 不存在.

(6) 对.

3. 如右图所示的函数，下列陈述中哪些是对的，哪些是错的？



(1) $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=1$；　(2) $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)$ 不存在；

(3) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$；　(4) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$；